This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

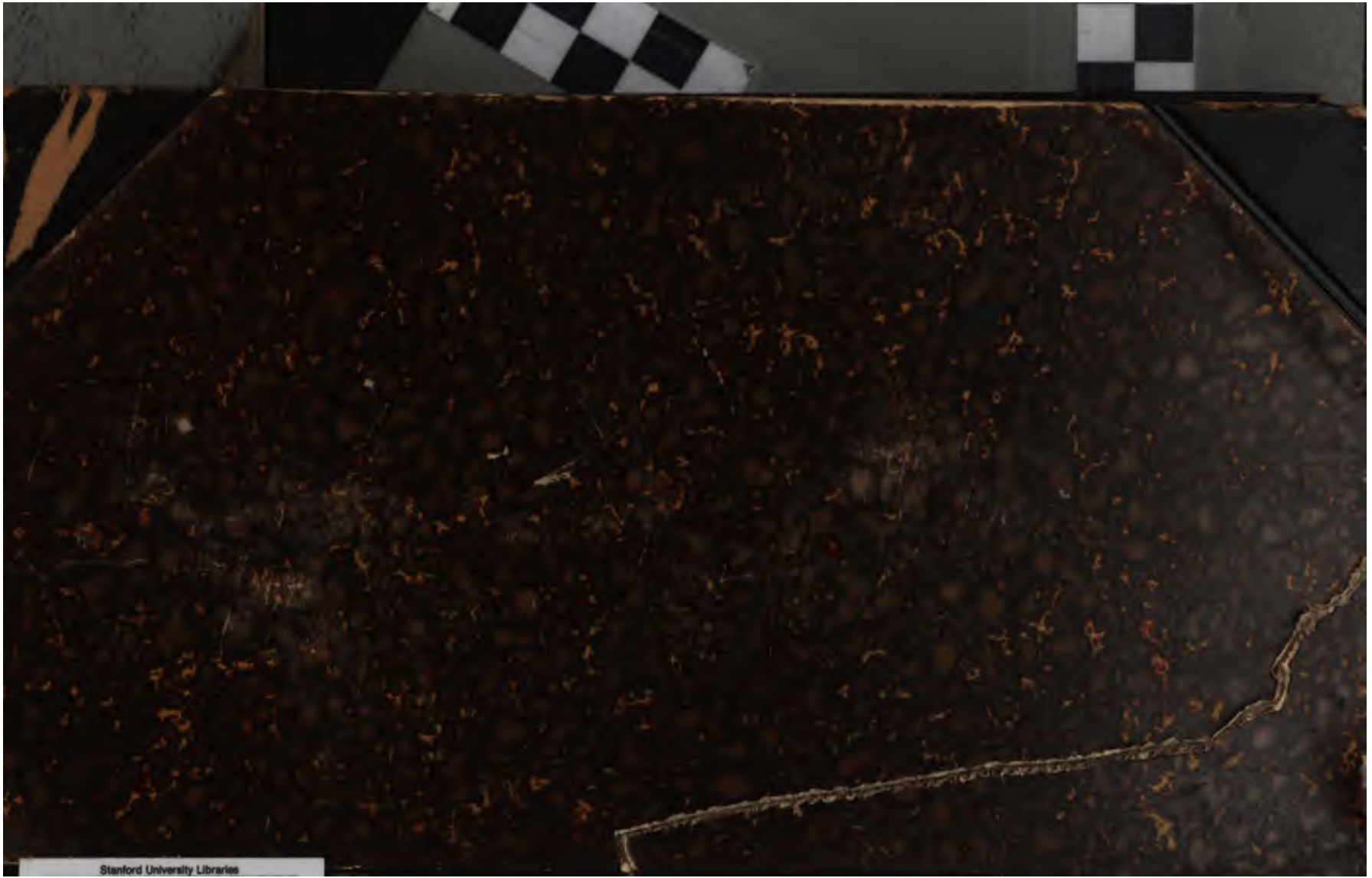
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

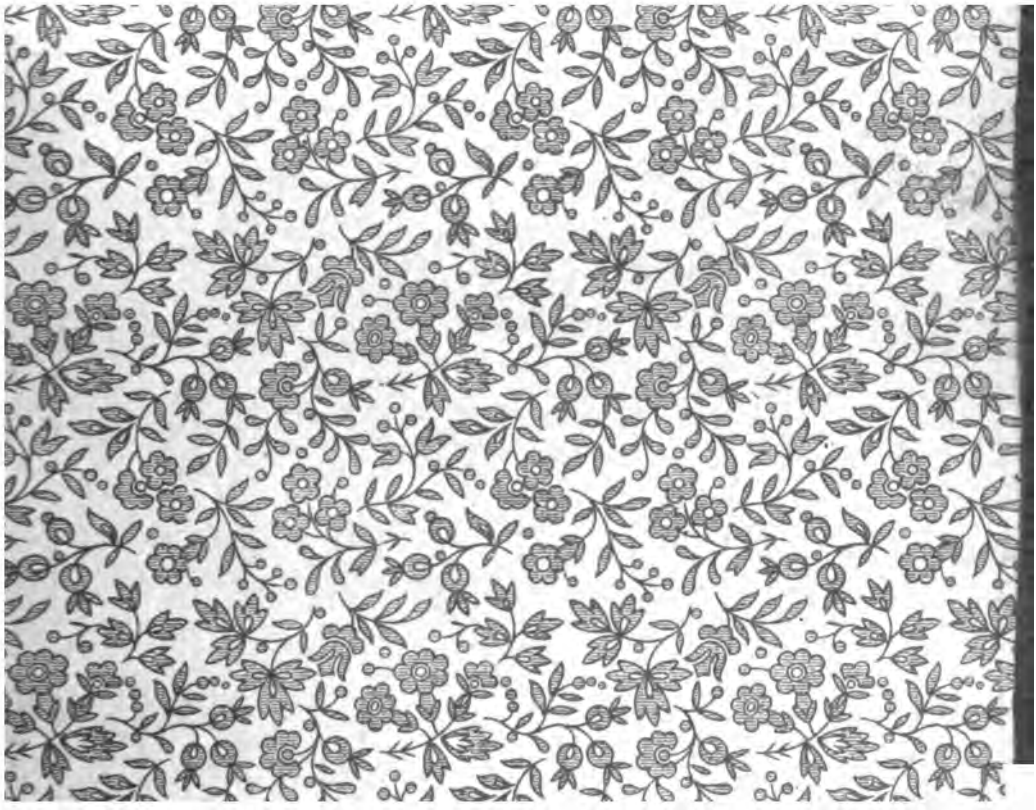
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`


Stanford University Libraries



MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

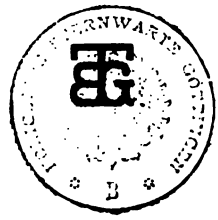
Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. Felix Klein zu Göttingen. und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXX. Band.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1887.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
a 28325

Inhalt des dreissigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Appel, à Paris. Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes. (Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein) 155

Bolza, in Freiburg i./Br. Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Functionen 478

—— Ueber Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich 546

Caspary, in Berlin. Ueber einen einfachen Beweis der Rosenhain'schen Fundamentalformeln 571

Cayley, in Cambridge. Note on Kiepert's L-equations, in the Transformation of Elliptic Functions 75

—— Note on the Jacobian Sextic Equation 78

—— On the Intersection of Curves 85

Delisle. †. Bestimmung der allgemeinsten der Functionalgleichung der σ-Function genügenden Function 91

Fricke, in Braunschweig. Ueber die ausgezeichneten Untergruppen vom Geschlechte $p = 1$, welche in der Gruppe der linearen ω-Substitutionen enthalten sind. 345

Heun, in München. Integration regulärer linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die Kettenbruchentwicklung von ganzen Abel'schen Integralen dritter Ordnung 553

Hilbert, in Königsberg. Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete 15

—— Ueber die Singularitäten der Discriminantenfläche. 437

—— Ueber binäre Formenbüschel mit besonderen Combinanteneigenschaften 563

Hurwitz, in Königsberg i. Pr. Ueber eine besondere Raumkurve 3. Ordnung 291

Kneser, in Breslau. Ueber die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher gegebene Gattungen algebraischer Grössen enthalten sind 179

Koenigsberger, in Heidelberg. Ueber die Anzahl der einer algebraischen Differentialgleichung angehörigen selbständigen Transcendenten 299

Krause, in Rostock. Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. I. . . 425

—— Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. II 516

Kürschák, in Budapest. Ueber dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke 578

Seite

v. Lilienthal, in Bonn. Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen . 1
Love, in Cambridge. On Recent English Researches in Vortex-motion . . 326
Maisano, in Messina. Die Discriminante der binären Form 6. Ordnung . . 442
Maschke, in Berlin. Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln 496
Meyer, in Tübingen. Zur Theorie der reducibeln ganzen Functionen von n Variabeln 30
Noether, in Erlangen. Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Functionen 410
Pasch, in Giessen. Ueber die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde 127
—— Ueber einige Punkte der Functionentheorie 132
Riecke, in Göttingen. Ueber einige Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrischen Erscheinungen 309
Schafheitlin, in Berlin. Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral 157
Schlesinger, in Basel. Ueber conjugirte Curven insbesondere über die geometrische Relation zwischen einer Curve dritter Ordnung und einer zu ihr conjugirten Curve dritter Classe 453
Segre, in Turin. Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques 203
—— Sur un théorème de la géométrie à n dimensions. (Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein.) 308
Sonine, in Warschau. Sur les fonctions cylindriques. (Extrait d'une lettre adressée à la rédaction) 582
Stickelberger, in Freiburg i. Br. Ueber einen Satz des Herrn Noether. 401
Study, in Leipzig. Ueber ternäre lineare Formen 120
Voss, in München. Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen. Zweiter Teil. Ueber die zu zwei eindeutig auf einander bezogenen Flächen gehörigen Strahlensysteme 227
—— Zur Theorie der Hesse'schen Determinante 418
Weltzien, in Berlin. Zur Theorie derjenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich rational und ganz durch zwei lineare Functionen und zwei Quadratwurzeln aus ganzen Functionen eines Parameters darstellen lassen 535

Inhaltsverzeichniss der Bände 21—30 584

Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen.

Von

R. v. Lilienthal in Bonn.

Die folgenden Entwicklungen beziehen sich auf die Krümmungsverhältnisse der Krümmungsmittelpunktsflächen. Es wird sich zeigen, dass hier die Methoden, welche in den „Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme" (Bonn 1886) auseinandergesetzt sind, grosse Vortheile gewähren. Um diese Methoden anwenden zu können, hat man vorauszusetzen, dass sowohl die betrachtete Fläche selbst wie eine jede ihrer beiden Krümmungsmittelpunktsflächen weder eine Kugel noch abwickelbar sei. Die genannten Untersuchungen sollen einfach mit „U" citirt und die dort angewandten Bezeichnungen auch hier benutzt werden.

§ 1.

Formeln für die erste Krümmungsmittelpunktsfläche.

Die Coordinaten der Punkte eines regulären Flächenstücks, das weder abwickelbar sein noch einer Kugel angehören darf, nennen wir x, y, z; mit X, Y, Z bezeichnen wir die Richtungscosinus der Flächennormalen, mit ϱ_1, ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien für ein reguläres Flächenelement, wo $\varrho_1 > \varrho_2$ sei. Die zu ϱ_1 gehörende Krümmungsmittelpunktsfläche heisse die erste, ihre Coordinaten seien x', y', z'; die zu ϱ_2 gehörende heisse die zweite, und ihre Coordinaten seien x'', y'', z''. Man hat dann:

$$x' = x + \varrho_1 X, \quad y' = y + \varrho_1 Y, \quad z' = z + \varrho_1 Z.$$

Nun ist nach U. 3) S. 16:

$$dx = -\varrho_1 A_1 (\sqrt{L} \cos\sigma\, dp + \sqrt{N} \cos(\sigma - \varphi) dq) - \varrho_2 A_2 (\sqrt{L} \sin\sigma\, dp + \sqrt{N} \cos(\sigma - \varphi) dq),$$

und nach U. 2. u. 3., S. 9:

$$dX = A_1 (\sqrt{L} \cos\sigma\, dp + \sqrt{N} \cos(\sigma - \varphi) dq) + A_2 (\sqrt{L} \sin\sigma\, dp + \sqrt{N} \sin(\sigma - \varphi) dq),$$

somit wird:

$$(1)\quad \begin{cases} dx' = (\varrho_1-\varrho_2)A_2\left(\sqrt{L}\sin\sigma\, dp + \sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\, dq\right) + X d\varrho_1, \\ \text{ebenso:} \\ dy' = (\varrho_1-\varrho_2)B_2\left(\sqrt{L}\sin\sigma\, dp + \sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\, dq\right) + Y d\varrho_1, \\ dz' = (\varrho_1-\varrho_2)C_2\left(\sqrt{L}\sin\sigma\, dp + \sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\, dq\right) + Z d\varrho_1. \end{cases}$$

Hieraus folgt, wie es auch geometrisch offenbar ist, dass A_1, B_1, C_1 — Richtungscosinus der Tangente der zu ϱ_1 gehörenden Krümmungslinie — die Richtungscosinus der Normalen unserer Fläche sind.

Zunächst sind die Bedingungen zu entwickeln, unter denen das betrachtete Stück der Fläche $(x'\,y'\,z')$ weder in eine Curve ausartet, noch abwickelbar ist, noch endlich einer Kugel angehört.

Die auf die Fläche $(x'\,y'\,z')$ bezogenen Grössen $E, F, G, L, M, N, \Theta, \Theta', \Theta''$ mögen der Reihe nach mit $E_1, F_1, G_1, L_1, M_1, N_1, \Theta_1, \Theta_1', \Theta_1''$ bezeichnet werden. Man erhält dann:

$$(2)\quad \begin{cases} E_1 = (\varrho_1-\varrho_2)^2 L\sin^2\sigma + \left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\right)^2, \\ F_1 = (\varrho_1-\varrho_2)^2\sqrt{L}\sqrt{N}\sin\sigma\sin(\sigma-\varphi) + \frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}, \\ G_1 = (\varrho_1-\varrho_2)^2 N\sin^2(\sigma-\varphi) + \left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\right)^2, \\ E_1G_1 - F_1^2 = (\varrho_1-\varrho_2)^2\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) - \frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma\right)^2. \end{cases}$$

Es artet daher unsere Fläche in denjenigen Theilen in eine Curve aus, für welche die Gleichung:

$$(3)\qquad \frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) = \frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma$$

besteht.

Um die Bedingung der Abwickelbarkeit zu finden, betrachten wir zunächst das System (U. S. 18 und 19):

$$A_1\frac{\partial A_1}{\partial p} + B_1\frac{\partial B_1}{\partial p} + C_1\frac{\partial C_1}{\partial p} = 0,$$

$$A_2\frac{\partial A_1}{\partial p} + B_2\frac{\partial B_1}{\partial p} + C_2\frac{\partial C_1}{\partial p} = -T_1,$$

$$X\frac{\partial A_1}{\partial p} + Y\frac{\partial B_1}{\partial p} + Z\frac{\partial C_1}{\partial p} = -\sqrt{L}\cos\sigma,$$

wo:

$$T_1 = \frac{\partial(\sigma-\varphi)}{\partial p} - \frac{\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial q} - \cos\varphi\,\frac{\partial\sqrt{N}}{\partial p}}{\sqrt{N}\sin\varphi}$$

gesetzt ist. Aus demselben folgt:

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial p} = -T_1 A_2 - X\sqrt{L}\cos\sigma, \\ \frac{\partial B_1}{\partial p} = -T_1 B_2 - Y\sqrt{L}\cos\sigma, \\ \frac{\partial C_1}{\partial p} = -T_1 C_2 - Z\sqrt{L}\cos\sigma, \end{cases}$$

Ebenso folgt aus dem System:

$$A_1\frac{\partial A_1}{\partial q} + B_1\frac{\partial B_1}{\partial q} + C_1\frac{\partial C_1}{\partial q} = 0,$$
$$A_2\frac{\partial A_1}{\partial q} + B_2\frac{\partial B_1}{\partial q} + C_2\frac{\partial C_1}{\partial q} = -T_2,$$
$$X\frac{\partial A_1}{\partial q} + Y\frac{\partial B_1}{\partial q} + Z\frac{\partial C_1}{\partial q} = -\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi),$$

wo:

$$T_2 = \frac{\partial\sigma}{\partial q} + \frac{\frac{\partial\sqrt{N}}{\partial p} - \cos\varphi\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial q}}{\sqrt{L}\sin\varphi}$$

gesetzt ist:

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial q} = -T_2 A_2 - X\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi), \\ \frac{\partial B_1}{\partial q} = -T_2 B_2 - X\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi), \\ \frac{\partial C_1}{\partial q} = -T_2 C_2 - Z\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi). \end{cases}$$

Da nun:

$$L_1 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial C_1}{\partial p}\right)^2,$$
$$M_1 = \frac{\partial A_1}{\partial p}\frac{\partial A_1}{\partial q} + \frac{\partial B_1}{\partial p}\frac{\partial B_1}{\partial q} + \frac{\partial C_1}{\partial p}\frac{\partial C_1}{\partial q},$$
$$N_1 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial C_1}{\partial q}\right)^2,$$

so wird:

$$(6)\qquad \begin{cases} L_1 = T_1^2 + L\cos^2\sigma, \\ M_1 = T_1 T_2 + \sqrt{L}\sqrt{N}\cos\sigma\cos(\sigma-\varphi), \\ N_1 = T_2^2 + N\cos^2(\sigma-\varphi), \\ L_1 N_1 - M_1^2 = \left(T_2\sqrt{L}\cos\sigma - T_1\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right)^2 \\ \qquad = \left(\frac{\partial\sqrt{L}\sin\sigma}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)}{\partial p}\right)^2. \end{cases}$$

Unsere Fläche ist daher in denjenigen ihrer Theile abwickelbar, für welche die Gleichung:

$$(7)\qquad \frac{\partial\sqrt{L}\sin\sigma}{\partial q} = \frac{\partial\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)}{\partial p}$$

besteht.*)

*) **Herr** Hoppe stellt im 63ten Bd. d. Arch. die Behauptung auf, dass die **Krümmungsmittelpunktsflächen** von nicht abwickelbaren Flächen niemals, hingegen

Da endlich:

$$-\Theta_1 = \frac{\partial A_1}{\partial p}\frac{\partial x'}{\partial p} + \frac{\partial B_1}{\partial p}\frac{\partial y'}{\partial p} + \frac{\partial C_1}{\partial p}\frac{\partial z'}{\partial p},$$

$$-\Theta_1' = \frac{\partial A_1}{\partial p}\frac{\partial x'}{\partial q} + \frac{\partial B_1}{\partial p}\frac{\partial y'}{\partial q} + \frac{\partial C_1}{\partial p}\frac{\partial z'}{\partial q} = \frac{\partial A_1}{\partial q}\frac{\partial x'}{\partial p} + \frac{\partial B_1}{\partial q}\frac{\partial y'}{\partial p} + \frac{\partial C_1}{\partial q}\frac{\partial z'}{\partial p},$$

$$-\Theta_1'' = \frac{\partial A_1}{\partial q}\frac{\partial x'}{\partial q} + \frac{\partial B_1}{\partial q}\frac{\partial y'}{\partial q} + \frac{\partial C_1}{\partial q}\frac{\partial z'}{\partial q},$$

so erhalten wir:

$$(8)\quad \begin{cases} \Theta_1 = T_1(\varrho_1 - \varrho_2)\sqrt{L}\,\sin\sigma + \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\sqrt{L}\cos\sigma, \\ \Theta_1' = T_1(\varrho_1 - \varrho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma \\ \quad = T_2(\varrho_1 - \varrho_2)\sqrt{L}\sin\sigma + \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi), \\ \Theta_1'' = T_2(\varrho_1 - \varrho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial q}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi), \end{cases}$$

wobei bemerkt werde, dass aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für Θ_1' die erste der beiden Beziehungen II. 9) S. 18 hervorgeht.

Die Bedingung, unter welcher der betrachtete Flächentheil einer Kugel angehört, lässt sich bekanntlich so schreiben:

$$(9)\qquad E_1 : F_1 : G_1 = \Theta_1 : \Theta_1' : \Theta_1'',$$

sodass wir in Gemässheit mit unseren Voraussetzungen annehmen dürfen, dass weder (3) noch (7) noch (9) besteht.

Jetzt sind wir berechtigt, die Darstellungen II. (3) S. 16 auch für die Fläche $(x'\,y'\,z')$ zu bilden. Bezeichnen wir daher die auf diese Flächen bezogenen Grössen A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, ϱ_1, ϱ_2, σ und φ der Reihe nach mit A_1', B_1', C_1', A_2' B_2', C_2', σ' und φ', so entsteht:

$$(10)\quad \begin{cases} dx' = -\varrho_1' A_1' \left(\sqrt{L_1}\cos\sigma' dp + \sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi')dq\right) \\ \qquad -\varrho_2' A_2' \left(\sqrt{L_1}\sin\sigma' dp + \sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi')dq\right), \\ dy' = -\varrho_1' B_1' \left(\sqrt{L_1}\cos\sigma' dp + \sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi')dq\right) \\ \qquad -\varrho_2' B_2' \left(\sqrt{L_1}\sin\sigma' dp + \sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi')dq\right), \\ dz' = -\varrho_1' C_1' \left(\sqrt{L_1}\cos\sigma' dp + \sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi')dq\right) \\ \qquad -\varrho_2' C_2' \left(\sqrt{L_1}\sin\sigma' dp + \sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi')dq\right). \end{cases}$$

---

von abwickelbaren Flächen stets abwickelbar seien. Der letzte Theil dieser Behauptung ist richtig, was schon von Herrn Weingarten Journal für r. u. a. Math. Bd. 59, S. 393 ausgesprochen ist. Der erstere hingegen gilt für die von Monge behandelten Flächen, bei denen die eine Krümmungsmittelpunktsfläche eine Kugel ist, und für die Canalflächen mit kreisförmigem Querschnitt jedenfalls nicht.

Die Vergleichung der Coefficienten von dp auf den rechten Seiten von (1) und (10) liefert die Beziehungen:

$$(11)\quad \begin{cases} (\varrho_1-\varrho_2)A_2\sqrt{L}\sin\sigma + X\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} = -\varrho_1' A_1'\sqrt{L_1}\cos\sigma' \\ \qquad\qquad -\varrho_2' A_2'\sqrt{L_1}\sin\sigma', \\ (\varrho_1-\varrho_2)B_2\sqrt{L}\sin\sigma + Y\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} = -\varrho_1' B_1'\sqrt{L_1}\cos\sigma' \\ \qquad\qquad -\varrho_2' B_2'\sqrt{L_1}\sin\sigma', \\ (\varrho_1-\varrho_2)C_2\sqrt{L}\sin\sigma + Z\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} = -\varrho_2' C_1'\sqrt{L_1}\cos\sigma', \\ \qquad\qquad -\varrho_2' C_2'\sqrt{L_1}\sin\sigma', \end{cases}$$

und die Vergleichung der betreffenden Coefficienten von dq ergiebt:

$$(12)\quad \begin{cases} (\varrho_1-\varrho_2)A_2\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) + X\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} = -\varrho_1' A_1'\sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi') \\ \qquad\qquad -\varrho_2' A_2'\sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi'), \\ (\varrho_1-\varrho_2)B_2\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) + Y\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} = -\varrho_1' B_1'\sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi') \\ \qquad\qquad -\varrho_2' B_2'\sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi'), \\ (\varrho_1-\varrho_2)C_2\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) + Z\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} = -\varrho_1' C_1'\sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi') \\ \qquad\qquad -\varrho_2' C_2'\sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi'). \end{cases}$$

Ebenso liefert die Anwendung von ll (2) und (3) S. 9:

$$(13)\quad \begin{cases} dA_1 = A_1'(\sqrt{L_1}\cos\sigma'\,dp + \sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi')\,dq) \\ \qquad + A_2'(\sqrt{L_1}\sin\sigma'\,dp + \sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi')\,dq), \\ dB_1 = B_1'(\sqrt{L_1}\cos\sigma'\,dp + \sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi')\,dq) \\ \qquad + B_2'(\sqrt{L_1}\sin\sigma'\,dp + \sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi')\,dq), \\ dC_1 = C_1'(\sqrt{L_1}\cos\sigma'\,dp + \sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi')\,dq) \\ \qquad + C_2'(\sqrt{L_1}\sin\sigma'\,dp + \sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi')\,dq). \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (4) und (5) folgt aus diesem System zunächst:

$$(14)\quad \begin{cases} -T_1 A_2 - X\sqrt{L}\cos\sigma = \sqrt{L_1}\,(A_1'\cos\sigma' + A_2'\sin\sigma'), \\ -T_1 B_2 - Y\sqrt{L}\cos\sigma = \sqrt{L_1}\,(B_1'\cos\sigma' + B_2'\sin\sigma'), \\ -T_1 C_2 - Z\sqrt{L}\cos\sigma = \sqrt{L_1}\,(C_1'\cos\sigma' + C_2'\sin\sigma'), \end{cases}$$

sodann:

$$(15)\quad \begin{cases} -T_2 A_2 - X\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) \\ = \sqrt{N_1}\,(A_1'\cos(\sigma'-\varphi') + A_2'\sin(\sigma'-\varphi')\,dq), \\ -T_2 B_2 - Y\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) \\ = \sqrt{N_1}\,(B_1'\cos(\sigma'-\varphi') + B_2'\sin(\sigma'-\varphi')\,dq), \\ -T_2 C_2 - Z\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) \\ = \sqrt{N_1}\,(C_1'\cos(\sigma'-\varphi') + C_2'\sin(\sigma'-\varphi')\,dq). \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (14) zuerst mit ϱ_2', dann mit ϱ_1' und addirt sie jedesmal zu den entsprechenden Gleichungen (11), behandelt man ferner in derselben Weise die Gleichungen (15) und (12), so entstehen vier Systeme, welche sämmtliche Mittel enthalten, die zur Untersuchung der Krümmungsverhältnisse unserer Flächen erfordert werden. Die auf die X-Axe bezogenen Gleichungen dieser Systeme sind:

$$(16)\quad A_2\left\{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{L}\sin\sigma-\varrho_2' T_1\right\} + X\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} - \varrho_2'\sqrt{L}\cos\sigma\right\} = (\varrho_2'-\varrho_1')\,A_1'\sqrt{L_1}\cos\sigma',$$

$$(17)\quad A_2\left\{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{L}\sin\sigma-\varrho_1' T_1\right\} + X\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} - \varrho_1'\sqrt{L}\cos\sigma\right\} = (\varrho_1'-\varrho_2')\,A_2'\sqrt{L_1}\sin\sigma',$$

$$(18)\quad A_2\left\{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) - \varrho_2' T_2\right\} + X\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} - \varrho_2'\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right\} = (\varrho_2'-\varrho_1')\,A_1'\sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi'),$$

$$(19)\quad A_2\left\{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) - \varrho_1' T_2\right\} + X\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} - \varrho_1'\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right\} = (\varrho_1'-\varrho_2')\,A_2'\sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi'),$$

aus denen die auf die Y- resp. Z-Axe bezogenen dadurch hervorgehen, dass man statt A_2, X, A' setzt B_2, Y, B' resp. C_2, Z, C'.

§ 2.

Formeln für die zweite Krümmungsmittelpunktsfläche.

Nennen wir die Coordinaten der zu ϱ_2 gehörenden Krümmungsmittelpunktsfläche x'', y'', z'', so besteht:

$$x'' = x + \varrho_2 X, \quad y'' = y + \varrho_2 Y, \quad z'' = z + \varrho_2 Z,$$

woraus sich, wie vorhin ergiebt:

$$(1)\quad \begin{cases} dx'' = (\varrho_2-\varrho_1)\,A_1(\sqrt{L}\cos\sigma\,dp + \sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\,dq) + X\,d\varrho_2, \\ dy'' = (\varrho_2-\varrho_1)\,B_1(\sqrt{L}\cos\sigma\,dp + \sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\,dq) + Y\,d\varrho_2, \\ dz'' = (\varrho_2-\varrho_1)\,C_1(\sqrt{L}\cos\sigma\,dp + \sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\,dq) + Z\,d\varrho_2. \end{cases}$$

Hiernach sind A_2, B_2, C_2 die Richtungscosinus der Normalen unserer Fläche.

Die auf die Fläche (x'', y'', z'') bezogenen Grössen E, F, G, Θ, Θ', Θ'', L, M, N sollen der Reihe nach mit E_2, F_2, G_2, Θ_2, Θ_2', Θ_2'', L_2, M_2, N_2 bezeichnet werden. Dann wird zunächst:

$$(2)\quad \begin{cases} E_2 = (\varrho_2-\varrho_1)^2 L\cos^2\sigma + \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial p}\right)^2, \\ F_2 = (\varrho_2-\varrho_1)^2 \sqrt{L}\sqrt{N}\cos\sigma\cos(\sigma-\varphi) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial p}\frac{\partial \varrho_2}{\partial q}, \\ G_2 = (\varrho_2-\varrho_1)^2 N\cos^2(\sigma-\varphi) + \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial q}\right)^2, \\ E_2G_2 - F_2^2 = (\varrho_2-\varrho_1)^2\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) - \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma\right)^2. \end{cases}$$

Unsere Fläche artet daher in denjenigen ihrer Theile in eine Curve aus, für welche die Gleichung:

$$(3)\quad \frac{\partial \varrho_2}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) = \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma$$

besteht.

Ferner ergiebt sich:

$$(4)\quad \frac{\partial A_2}{\partial p} = T_1A_1 - X\sqrt{L}\sin\sigma,$$

und:

$$(5)\quad \frac{\partial A_2}{\partial q} = T_2A_1 - X\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi),$$

sodass wir erhalten:

$$(6)\quad \begin{cases} L_2 = T_1^2 + L\sin^2\sigma, \\ M_2 = T_1T_2 + \sqrt{L}\sqrt{N}\sin\sigma\sin(\sigma-\varphi), \\ N_2 = T_2^2 + N\sin^2(\sigma-\varphi), \\ L_2N_2 - M_2^2 = (T_2\sqrt{L}\sin\sigma - T_1\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi))^2 \\ \qquad = \left(\frac{\partial\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)}{\partial p} - \frac{\partial\sqrt{L}\cos\sigma}{\partial q}\right)^2. \end{cases}$$

Unsere Fläche ist daher in denjenigen ihrer Theile abwickelbar, für welche die Gleichung:

$$(7)\quad \frac{\partial\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)}{\partial p} = \frac{\partial\sqrt{L}\cos\sigma}{\partial q}$$

besteht.

Endlich wird noch:

$$(8)\quad \begin{cases} \Theta_2 &= (\varrho_1-\varrho_2)T_1\sqrt{L}\cos\sigma+\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\sqrt{L}\sin\sigma,\\ \Theta_2' &= (\varrho_1-\varrho_2)T_2\sqrt{L}\cos\sigma+\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\sqrt{L}\sin(\sigma-\varphi),\\ &= (\varrho_1-\varrho_2)T_1\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)+\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma,\\ \Theta_2'' &= (\varrho_1-\varrho_2)T_2\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)+\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi). \end{cases}$$

Die Gleichsetzung der beiden Werthe von Θ_2' ergiebt die zweite Beziehung in ll. 9), S. 18.

Der betrachtete Theil unserer Fläche gehört einer Kugel an, wenn

$$(9)\qquad E_2 : F_2 : G_2 = \Theta_2 : \Theta_2' : \Theta_2''.$$

Unter der Voraussetzung, dass weder (3) noch (7) noch (9) besteht, erhalten wir jetzt, wie im § 1, eine zweite Darstellung der Differentiale dx'', dy'', dz'', dA_2, dB_2, dC_2 mit Hilfe der auf die Fläche (x'', y'', z'') bezogenen Grössen A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, ϱ_1, ϱ_2, σ und φ, welche der Reihe nach mit A_1'', B_1'', C_1'', A_1'', B_2'', C_2'', ϱ_1'', ϱ_2'', σ'' und φ'' bezeichnet werden mögen. Danach ergeben sich, wie im § 1, vier Systeme, in denen die auf die X-Axe bezogenen Gleichungen folgende Gestalt haben:

$$(10)\quad A_1\{\sqrt{L}\cos\sigma(\varrho_2-\varrho_1)+\varrho_2''T_1\}+X\left\{\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}-\varrho_2''\sqrt{L}\sin\sigma\right\}$$
$$=(\varrho_2''-\varrho_1'')A_1''\sqrt{L_2}\cos\sigma'',$$

$$(11)\quad A_1\{\sqrt{L}\cos\sigma(\varrho_2-\varrho_1)+\varrho_1''T_1\}+X\left\{\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}-\varrho_1''\sqrt{L}\sin\sigma\right\}$$
$$=(\varrho_1''-\varrho_2'')A_2''\sqrt{L_2}\sin\sigma'',$$

$$(12)\quad A_1\{(\varrho_2-\varrho_1)\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)+\varrho_2''T_2\}$$
$$+X\left\{\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}-\varrho_2''\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\right\}=(\varrho_2''-\varrho_1'')A_1''\sqrt{N_2}\cos(\sigma''-\varphi''),$$

$$(13)\quad A_1\{(\varrho_2-\varrho_1)\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)+\varrho_1''T_2\}$$
$$+X\left\{\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}-\varrho_1''\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\right\}=(\varrho_1''-\varrho_2'')A_2''\sqrt{N_2}\sin(\sigma''-\varphi'').$$

§ 3.

Gleichung der Hauptkrümmungsradien und Krümmungslinien.

Multiplicirt man im § 1 die durch die Gleichung (16) sowie (18) vertretenen Beziehungen der Reihe nach mit A_2', B_2', C_2' hingegen die durch die Gleichungen (17) und (19) vertretenen Beziehungen der Reihe nach mit A_1', B_1', C_1' und addirt jedesmal, so erhält man:

$$(1)\quad \begin{cases} \{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{L}\sin\sigma-\varrho_2' T_1\}\,\Sigma A_2 A_2' \\ \qquad +\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}-\varrho_2'\sqrt{L}\cos\sigma\right\}\Sigma X A_2' = 0, \\ \{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)-\varrho_2' T_2\}\,\Sigma A_2 A_2' \\ \qquad +\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}-\varrho_2'\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right\}\Sigma X A_2' = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{L}\sin\sigma-\varrho_1' T_1\}\,\Sigma A_2 A_1' \\ \qquad +\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}-\varrho_1'\sqrt{L}\cos\sigma\right\}\Sigma X A_1' = 0, \\ \{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)-\varrho_1' T_2\}\,\Sigma A_2 A_1' \\ \qquad +\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}-\varrho_1'\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right\}\Sigma X A_1' = 0. \end{cases}$$

Man sieht aber, dass weder $\Sigma A_2 A_2'$ und $\Sigma X A_2'$, noch $\Sigma A_2 A_1'$ und $\Sigma X A_1'$ gleichzeitig verschwinden können. Wäre z. B. $\Sigma A_2 A_2'$ gleich Null, so hätte man:

$$A_2' = X, \quad B_2' = Y, \quad C_2' = Z,$$

sodass $\Sigma X A_2'$ gleich 1 würde.

Es muss daher sowohl die Determinante der Gleichungen (1) wie diejenige der Gleichungen (2) verschwinden, d. h. aber ϱ_1' und ϱ_2' sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(3)\quad \{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{L}\sin\sigma-\varrho' T_1\}\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}-\varrho'\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right\}$$
$$-\{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)-\varrho' T_2\}\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}-\varrho'\sqrt{L}\cos\sigma\right\}=0,$$

oder:

$$(4)\quad \{T_2\sqrt{L}\cos\sigma-T_1\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\}\,\varrho'^2$$
$$-\left\{T_2\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}-T_1\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}-(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{L}\sqrt{N}\sin\varphi\right\}\varrho'$$
$$+(\varrho_1-\varrho_2)\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)-\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma\right\}=0.$$

In derselben Weise erhält man als Gleichung der Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche (x'', y'', z'') die folgende:

$$(5)\quad \{T_2\sqrt{L}\sin\sigma-T_1\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\}\,\varrho''^2$$
$$-\left\{T_2\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}-T_1\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}+(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{L}\sqrt{N}\sin\varphi\right\}\varrho''$$
$$+(\varrho_2-\varrho_1)\left\{\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma-\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right\}=0.$$

Die beiden Ausdrücke für Θ_1' in (8) § 1 und Θ_2' in (8) § 2 liefern die Beziehungen:

$$(6)\quad \begin{cases} T_2\sqrt{L}\cos\sigma - T_1\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) \\ = \frac{1}{\varrho_1-\varrho_2}\left\{\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\right\}, \\ T_2\sqrt{L}\sin\sigma - T_1\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) \\ = \frac{1}{\varrho_1-\varrho_2}\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma - \frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right\}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir daher das Krümmungsmass der Fläche (x', y', z') mit k_1, das der Fläche (x'', y'', z'') mit k_2, so erhalten wir:

$$k_1 = \frac{\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)}{(\varrho_1-\varrho_2)^2\left\{\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{L}\sin(\sigma-\varphi) - \frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma\right\}},$$

$$k_2 = \frac{\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma - \frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)}{(\varrho_1-\varrho_2)^2\left\{\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) - \frac{\partial\varrho_2}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma\right\}}.$$

Die beiden letzten Ausdrücke gestatten einen Schluss in Betreff derjenigen Flächen, bei welchen ein Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen ist. Hat man:

$$\varrho_2 = f(\varrho_1),$$

so wird:

$$k_1 = \frac{-f'(\varrho_1)}{(\varrho_1-\varrho_2)^2},\quad k_2 = \frac{-1}{(\varrho_1-\varrho_2)^2 f'(\varrho_1)},\quad k_1 k_2 = \frac{1}{(\varrho_1-\varrho_2)^4}.^{*})$$

Bei den in Rede stehenden Flächen sind daher die Krümmungsmittelpunktsflächen gleichzeitig elliptisch oder hyperbolisch gekrümmt. Speciell ergiebt sich für Minimalflächen:

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{4\varrho_1^2} = \frac{-1}{4}k,$$

wenn k das Krümmungsmass der Fläche (x, y, z) bedeutet. Bei Flächen constanten Krümmungsmasses $k = c$ erhält man:

$$k_1 = \frac{1}{(\varrho_1-\varrho_2)^2\varrho_1^2 c},\quad k_2 = \frac{\varrho_1^2 c}{(\varrho_1-\varrho_2)^2},$$

sodass bei positivem Krümmungsmass die beiden Flächen (x', y', z'), (x'', y'', z'') elliptisch, bei negativem hyperbolisch gekrümmt sind.

Nach U. § 7 ist die Gleichung der zu ϱ_1' gehörenden Krümmungslinien auf der Fläche (x', y', z'):

---

*) Diese Gleichung ist von Herrn Halphen gefunden. Bull. de la Soc. Math. III.

$$\sqrt{L_1}\sin\sigma'\,dp + \sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi')\,dq = 0,$$

und die Gleichung der zu ϱ_2' gehörenden:

$$\sqrt{L_1}\cos\sigma'\,dp + \sqrt{N_1}\cos(\sigma'-\varphi')\,dq = 0.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (17) und (19) § 1 der Reihe nach mit X, Y, Z und addirt jedesmal, so entsteht:

$$\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} - \varrho_1'\sqrt{L}\cos\sigma = (\varrho_1'-\varrho_2')\sqrt{L_1}\sin\sigma'\,\Sigma X A_2',$$

$$\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} - \varrho_1'\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) = (\varrho_1'-\varrho_2')\sqrt{N_1}\sin(\sigma'-\varphi')\,\Sigma X A_2'.$$

Wäre nun $\Sigma X A_2' = 0$, so müssten die linken Seiten dieser Beziehungen und damit die Determinante:

$$\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) - \frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma$$

verschwinden, sodass nach (6) die zweite Krümmungsmittelpunktsfläche entgegen unseren Voraussetzungen abwickelbar wäre. Somit ist:

$$(7)\quad \left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} - \varrho_1'\sqrt{L}\cos\sigma\right)dp + \left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} - \varrho_1'\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right)dq = 0$$

als Gleichung der zu ϱ_1' gehörenden Krümmungslinien zu betrachten.

Auf dieselbe Weise erhält man, wenn statt mit X, Y, Z mit A_2, B_2, C_2 multiplicirt wird, als Gleichung unserer Krümmungslinien:

$$\{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{L}\sin\sigma - \varrho_1'T_1\}\,dp + \{(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) - \varrho_1'T_2\}\,dq = 0,$$

welche Beziehung indessen eine Folge von (7) ist, da (3) die Wurzel ϱ_1' besitzt.

Aus den Systemen (16) und (18) erhält man in ähnlicher Weise als Gleichung der zu ϱ_2' gehörenden Krümmungslinien:

$$(8)\quad \left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} - \varrho_2'\sqrt{L}\cos\sigma\right)dp + \left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} - \varrho_2'\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\right)dq = 0.$$

Das Product der linken Seiten von (7) und (8) ist symmetrisch in ϱ_1' und ϱ_2'. Es enthält als Factor den der Voraussetzung nach von Null verschiedenen Ausdruck:

$$\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma - \frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi).$$

Der andere Factor des in Rede stehenden Products liefert gleich Null gesetzt die gesuchte Gleichung der Krümmungslinien in der Form:

$$(9)\quad \left\{T_1\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} - L\sin\sigma\cos\sigma\,(\varrho_1-\varrho_2)\right\}dp^2$$
$$+\left\{T_2\frac{\partial\varrho_1}{\partial p} + T_1\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} - (\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{L}\sqrt{N}\sin(2\sigma-\varphi)\right\}dp\,dq$$
$$+\left\{T_2\frac{\partial\varrho_1}{\partial q} - (\varrho_1-\varrho_2)N\sin(\sigma-\varphi)\cos(\sigma-\varphi)\right\}dq^2 = 0.$$

Für die Fläche (x'', y'', z'') ergiebt sich als Gleichung der zu ϱ_1'' gehörenden Krümmungslinien:

$$(10)\quad \left\{\frac{\partial \varrho_2}{\partial p} - \varrho_1'' \sqrt{L} \sin\sigma\right\} dp + \left\{\frac{\partial \varrho_2}{\partial q} - \varrho_1'' \sqrt{N} \sin(\sigma-\varphi)\right\} dq = 0,$$

als Gleichung der zu ϱ_2'' gehörenden:

$$(11)\quad \left\{\frac{\partial \varrho_2}{\partial p} - \varrho_2'' \sqrt{L} \sin\sigma\right\} dp + \left\{\frac{\partial \varrho_2}{\partial p} - \varrho_2'' \sqrt{N} \sin(\sigma-\varphi)\right\} dq = 0,$$

und als Gleichung beider Krümmungslinien:

$$(12)\quad \left\{T_1 \frac{\partial \varrho_2}{\partial p} + (\varrho_1-\varrho_2) L \sin\sigma\cos\sigma\right\} dp^2$$
$$+ \left\{T_1 \frac{\partial \varrho_2}{\partial q} + T_2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial p} + (\varrho_2-\varrho_1)\sqrt{L}\sqrt{N}\sin(2\sigma-\varphi)\right\} dp\,dq$$
$$+ \left\{(\varrho_2-\varrho_1) N \sin(\sigma-\varphi)\cos(\sigma-\varphi) + T_2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}\right\} dq^2 = 0.$$

§ 4.

Ueber Krümmungs- und Asymptotenlinien unserer Flächen.

Wenn die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ auf der ersten Krümmungsmittelpunktsfläche Krümmungslinien sind, so besteht:

$$(1)\quad \begin{cases} T_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} - L \sin\sigma\cos\sigma\,(\varrho_1-\varrho_2) = 0, \\ T_2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial q} - N \sin(\sigma-\varphi)\cos(\sigma-\varphi)\,(\varrho_1-\varrho_2) = 0. \end{cases}$$

Hier überzeugt man sich zunächst leicht, dass unter den gemachten Annahmen die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ auf der Fläche (x, y, z) nicht Krümmungslinien sein können.

Ferner kann keine der Grössen $\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}$ und $\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}$ verschwinden. Wäre z. B. $\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}$ Null das erste der Fall, so müsste, da E_1 nicht Null sein soll, $\cos\sigma$ und damit k_2 verschwinden.

Wir können daher jetzt die Grössen T_1 und T_2 aus (1) bestimmen und ihre Werthe in die Gleichungen (6) § 3 einsetzen. Auf diese Weise entsteht:

$$k_1 = -\frac{\sqrt{L}\sqrt{N}\cos\sigma\cos(\sigma-\varphi)}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}},$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\frac{\partial \varrho_1}{\partial q} = -(\varrho_1-\varrho_2)^2 \sqrt{L}\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\sin\sigma,$$

sodass auch:

$$k_1 = -\operatorname{cotg}\sigma\operatorname{cotg}(\sigma-\varphi)\frac{1}{(\varrho_1-\varrho_2)^2}.$$

Bei den Flächen, für welche $\varrho_2 = f(\varrho_1)$, erhält man die Beziehung:

$$f'(\varrho_1) = \operatorname{cotg}\sigma \operatorname{cotg}(\sigma - \varphi),$$

sodass hier der Quotient $\frac{d\varrho_2}{d\varrho_1}$ eine einfache geometrische Bedeutung besitzt.

Bei Minimalflächen hat man jetzt: $\cos\varphi = 0$. Weil aber jedem rechtwinkligen Curvensystem auf der Einheitskugel ein ebensolches auf der Minimalfläche entspricht, (U. S. 38), so ist auch das Curvensystem $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ auf der Minimalfläche orthogonal.

Sind zweitens die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ auf der Fläche (x'', y'', z'') Krümmungslinien, so besteht:

$$L \sin\sigma \cos\sigma - T_1 \frac{\partial\varrho_2}{\partial p} = 0,$$

$$N \sin(\sigma-\varphi)\cos(\sigma-\varphi) - \frac{\partial\varrho_2}{\partial q} T_2 = 0,$$

und es ergiebt sich wie vorhin:

$$k_2 = \frac{\sqrt{L}\sqrt{N}\sin\sigma\sin(\sigma-\varphi)}{\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}},$$

$$\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\frac{\partial\varrho_2}{\partial q} = -(\varrho_1-\varrho_2)^2\sqrt{L}\sqrt{N}\cos\sigma\cos(\sigma-\varphi),$$

so dass auch:

$$k_2 = -\operatorname{tg}\sigma \operatorname{tg}(\sigma-\varphi)\frac{1}{(\varrho_1-\varrho_2)^2}.$$

Wenn: $\varrho_2 = f(\varrho_1)$, so erhalten wir wieder:

$$f'(\varrho_1) = \operatorname{cotg}\sigma \operatorname{cotg}(\sigma-\varphi),$$

und bei Minimalflächen: $\cos\varphi = 0$.

Es entspricht daher bei Minimalflächen den Krümmungslinien auf einer Krümmungsmittelpunktsfläche stets ein orthogonales Curvensystem auf der Fläche selbst.

Sind die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ auf der Fläche (x', y', z') Asymptotenlinien, so müssen die Ausdrücke Θ_1 und Θ_1'' verschwinden, sodass wir erhalten:

$$(2)\qquad \begin{cases} T_1(\varrho_1-\varrho_2)\sin\sigma + \frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\cos\sigma = 0, \\ T_2(\varrho_1-\varrho_2)\sin(\sigma-\varphi) + \frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\cos(\sigma-\varphi) = 0. \end{cases}$$

Jetzt liefern die Gleichungen (6) § 3 die Beziehungen:

$$(3)\qquad k_1 = \operatorname{cotg}\sigma \operatorname{cotg}(\sigma-\varphi)\frac{1}{(\varrho_1-\varrho_2)^2}, \quad \text{und:} \quad \sin(2\sigma-\varphi) = 0.$$

Sind ferner die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ auf der zweiten Krümmungsmittelpunktsfläche Asymptotenlinien, so hat man:

$$(4)\qquad \begin{cases} T_1(\varrho_1-\varrho_2)\cos\sigma+\frac{\partial\varrho_2}{\partial p}\sin\sigma=0, \\ T_2(\varrho_1-\varrho_2)\cos(\sigma-\varphi)+\frac{\partial\varrho_2}{\partial q}\sin(\sigma-\varphi)=0, \end{cases}$$

und die Gleichungen (6) § 3 ergeben jetzt:

$$(5)\qquad k_2=\operatorname{tg}\sigma\operatorname{tg}(\sigma-\varphi)\frac{1}{(\varrho_1-\varrho_2)^2},\quad \sin(2\sigma-\varphi)=0.$$

Wenn nun: $\varrho_2=f(\varrho_1)$, so wird:

$$f'(\varrho_1)=-\operatorname{cotg}\sigma\operatorname{cotg}(\sigma-\varphi)=\operatorname{cotg}^2\sigma=\operatorname{cotg}^2(\sigma-\varphi).$$

Bestehen also die Gleichungen (3), so sind auch die Gleichungen (5) erfüllt. Es entsprechen jetzt ein und demselben Curvensystem auf der Fläche (x, y, z) auf beiden Krümmungsmittelpunktsflächen Asymptotenlinien.*) Man überzeugt sich leicht, dass dieser Umstand nur bei Flächen eintreten kann, bei welchen ein Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des andern ist.

Es möge noch bemerkt werden, dass die Flächen von constantem negativen Krümmungsmass sich durch die Eigenschaft auszeichnen, dass ihren Asymptotenlinien selbst auf beiden Krümmungsmittelpunktsflächen wieder Asymptotenlinien entsprechen. Ist nämlich:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=c,$$

so wird:

$$f'(\varrho_1)=\frac{-1}{\varrho_1^2 c}=\frac{\cos^2\sigma}{\sin^2\sigma}$$

oder:

$$\varrho_2\sin^2\sigma+\varrho_1\cos^2\sigma=0.$$

Da ausserdem:

$$\sin(2\sigma-\varphi)=0,$$

so sind jetzt nach ll. S. 33 die Curven $p=$ const., $q=$ const. auf der Fläche $(x\,y\,z)$ Asymptotenlinien. Nach einer brieflichen Mittheilung an Herrn Klein ist Herr Bianchi seit längerer Zeit im Besitze dieses Ergebnisses.

Bonn, im Januar 1887.

*) Diesen Satz fand zuerst Herr Ribaucour. C. R. 1872. T. LXXIV.

Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete*).

Von

David Hilbert in Königsberg.

In der gegenwärtigen Mittheilung wird ein eigenthümliches Verfahren zur Darstellung von Invarianten und Covarianten eines binären Formensystems allgemein begründet und dann für die invariantentheoretische Untersuchung gewisser binärer Formen von speciellem Charakter verwerthet.

Der Uebersichtlichkeit halber legen wir zunächst nur eine binäre Form der n^{ten} Ordnung und zwar in der nicht homogenen Schreibart:

$$f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{1}$$

zu Grunde; es mögen dann für die einseitigen Differentialquotienten derselben nach der nicht homogenen Variablen x die später stets wiederkehrenden Bezeichnungen gelten:

$$\begin{aligned} f_0 &= f, \\ f_1 &= \frac{(n-1)!}{n!} \frac{df}{dx}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Nach diesen charakteristischen Festsetzungen untersuchen wir, unter welchen Bedingungen eine Function jener einseitigen Derivirten $f_0, f_1, \ldots f_n$ eine Invariante oder Covariante der Grundform darstellt. Die zur Verwendung gelangende linear gebrochene Transformation der nicht homogenen Variablen sei:

$$x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta},$$

---

*) Die vorliegende Arbeit ist zum Theil eine verkürzte Wiedergabe derjenigen Gesichtspunkte, welche der Verfasser in seiner Inauguraldissertation: Ueber die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen. Königsberg i. Pr. 1885, entwickelt hat. Doch waren insonderheit die Ergebnisse des zweiten Theiles der citirten Dissertation bemerkenswerther Vervollständigungen und erweiternder Zusätze fähig.

worin der einfacheren Rechnung halber die Constanten α und δ nur unendlich wenig von der Einheit, β und γ nur unendlich wenig von Null abweichen mögen. Die für die transformirte Form f' gebildeten einseitigen Differentialquotienten nehmen dann allgemein die Gestalt an*):

$$f_i' = (\alpha\delta)^i (\gamma x' + \delta)^{n-2i} (f_i + i\gamma f_{i-1})$$

und es bedarf nur einiger einfacher Ueberlegungen, um zu dem folgenden Theorem zu gelangen:

Jede homogene und isobare Function F der einseitigen Differentialquotienten $f_0, f_1, \ldots f_n$ vom Grade g und dem Gewichte p ist eine Invariante oder Covariante der Form f von der Ordnung $m = ng - 2p$, sobald sie der Differentialgleichung:

$$f_0 \frac{\partial F}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial F}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial F}{\partial f_3} + \cdots = 0$$

genügt.

Um eine derart vorgelegte Covariante F in gewöhnlicher Weise als Function der Coefficienten der Form und der Variablen auszudrücken, setzen wir:

$$F = A_0 x^m + \binom{m}{1} A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m.$$

Die k-malige Differentiation dieser Identität nach x liefert unter Berücksichtigung der Relation:

$$\frac{df_i}{dx} = (n-i) f_{i+1}$$

und mit Benutzung des abkürzenden Operationssymbols:

$$\Delta = nf_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1) f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + (n-2) f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} + \cdots$$

das Ergebniss:

$$\Delta^k F = \frac{m!}{(m-k)!} A_0 x^{m-k} + \cdots + \frac{m!}{(m-k)!} A_{m-k},$$

oder für $x = 0$ und nach Vertauschung der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ bezügliche mit $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$:

$$A_k = \pm \frac{(m-k)!}{m!} [\Delta^k F]_{f_i = a_i}.$$

Im speciellen Falle $k = 0$ erhalten wir den ersten Coefficienten d. h. die Quelle der Covariante F als Function der Coefficienten von f. Umgekehrt folgt daher der Satz:

Für eine vorgelegte Invariante resp. Covariante der Grundform ergiebt sich, abgesehen vom Vorzeichen, die Darstellung als Function der einseitigen Derivirten, wenn in der Invariante resp. Covarianten-

*) Die genaue Formel findet sich in der citirten Dissertation, pag. 2.

*quelle die Formencoefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ durch die entsprechenden Differentialquotienten $f_0, f_1, \ldots f_n$ ersetzt werden**).

Gleichzeitig finden wir die bekannte Ableitung der Coefficienten einer Covariante aus ihrer Quelle wieder. Auch die Berechtigung der lediglich mit Quellen rechnenden Methode von Roberts, sowie die gewöhnlichen Cayleyschen Differentialgleichungen der Invarianten und Covarianten als Function der Coefficienten und Variablen**) sind unmittelbare Folgen unserer Ueberlegungen.

Die bisher verwendeten Schlüsse führen für den Fall eines gegebenen Systems von mehreren Grundformen $f, \varphi, \ldots$ zu folgender leicht erweisbaren Verallgemeinerung:

Jede isobare Function F der einseitigen Derivirten $f_0, f_1, \ldots f_n$, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_\nu, \ldots$, vom Gewichte p, welche überdies in den Derivirten jeder einzelnen Form homogen beziehungsweise von den Graden $g, \gamma, \ldots$ sein möge, ist eine simultane Invariante oder Covariante des Formensystems $f, \varphi, \ldots$ von der Ordnung $m = ng + \nu\gamma + \cdots - 2p$, sobald sie der Differentialgleichung:

$$f_0\frac{\partial F}{\partial f_1} + 2f_1\frac{\partial F}{\partial f_2} + 3f_2\frac{\partial F}{\partial f_3} + \cdots + \varphi_0\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} + 2\varphi_1\frac{\partial F}{\partial \varphi_2} + 3\varphi_2\frac{\partial F}{\partial \varphi_3} + \cdots = 0$$

*genügt. Die Beziehung zur Invariante oder Covariantenquelle in gewöhnlicher Darstellung wird durch die gleichzeitige Vertauschung der Differentialquotienten $f_0, f_1, \ldots f_n$, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_\nu, \ldots$ mit den entsprechenden Formencoefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ vermittelt****).

Die gewonnene Darstellungsweise der invarianten Gebilde bedingt keine wesentliche Unterscheidung zwischen Invarianten und Covarianten und da sie überdies von der Ordnung der Grundformen unabhängig erscheint, dürfte sie dazu geeignet sein, in naturgemässer Weise auch die gebrochenen und irrationalen algebraischen Gebilde der invarianten-

*) Die Möglichkeit dieser Darstellungsweise der invarianten Gebilde scheint bisher wenig beachtet oder verwerthet zu sein, vergl. jedoch Faà di Bruno, Theorie der binären Formen, deutsch bearbeitet von Th. Walter § 14, 11. — Neuerdings veröffentlicht Brioschi in diesen Annalen Bd. 29 einen Satz, welcher aus dem obigen, bereits in der citirten Dissertation aufgestellten Theorem unmittelbar folgt, wenn man darin an Stelle der willkürlichen Variablen x den Werth irgend einer Wurzel der Gleichung $f = 0$ einführt. Wie Brioschi an Beispielen zeigt, findet dieser Satz eine nützliche Verwendung zur algebraischen Transformation jener Gleichung $f = 0$. — Uebrigens gilt ein analoges Theorem auch für ternäre, quaternäre etc. Grundformen, deren Invarianten und Covarianten als Function der Differentialquotienten nach zwei, drei, etc. Variablen darstellbar sind.

**) Vergl. Salmon, Algebra der linearen Transformationen. Art. 143 — 147.

***) In diesem Theorem ist zugleich als specieller Fall das Lemma enthalten, welches kürzlich S. Gundelfinger in der Abhandlung „Zur Theorie der binären Formen" Crelles Journal Bd. 100, pag. 413 mittheilt.

theoretischen Behandlung zugänglich zu machen. Berücksichtigen wir ferner, dass nach Anwendung des obigen Verfahrens jede Invariante und Covariante des Formensystems uns als ein Differentialausdruck vorliegt, so führt eine Relation zwischen jenen Gebilden zu einer Differentialgleichung, deren Studium für gewisse Fragen der Formentheorie von Vortheil sein kann*). Endlich sei noch bemerkt, dass die Anwendung unserer Darstellungsweise in vielen Fällen die wirkliche Auswerthung von Invarianten und Covarianten für specielle vorgelegte Grundformen wesentlich erleichtert und vereinfacht.

Nach den vorangegangenen allgemeinen Darlegungen kehren wir wieder zu einer Grundform zurück und beschäftigen uns eingehender mit den gegenseitigen Beziehungen und sich ergänzenden Eigenschaften der beiden bereits im Bisherigen aufgetretenen Differentiationssymbole:

$$D = f_0 \frac{\partial}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial}{\partial f_3} + \cdots,$$

$$\Delta = nf_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1) f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + (n-2) f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} + \cdots$$

Denken wir uns dieselben angewendet auf eine beliebige homogene und isobare Function F der Differentialquotienten $f_0, f_1, \ldots f_n$ vom Grade g und dem Gewichte p, so gilt zunächst betreffs der Vertauschung ihrer Reihenfolge die fundamentale Formel:

$$(3) \qquad [D\Delta - \Delta D] F = mF, \qquad m = ng - 2p.$$

Der Beweis derselben gelingt am einfachsten, wenn wir von ihrer Richtigkeit für die specielle Annahme $F = f_i$ ausgehen und dann zeigen, dass die Formel für die Summe sowie für das Product zweier Functionen F und F' immer dann gilt, sobald ihre Gültigkeit für jeden der beiden Summanden, beziehungsweise Factoren F und F' feststeht.

Durch wiederholte Anwendung des Symbols D auf Formel (3) bei gleichzeitiger Benutzung derselben für die Functionen $DF, D^2F, \ldots$ ergiebt sich die allgemeinere Relation:

$$D^k\Delta - \Delta D^k = k(m+k-1) D^{k-1}$$

und in analoger Weise:

$$D\Delta^l - \Delta^l D = l(m-l+1)\Delta^{l-1}.$$

Beide Formeln erscheinen als Specialfälle der folgenden Relationen von allgemeinstem Charakter, deren Richtigkeit durch den Schluss von k, l auf $k+1, l+1$ bestätigt wird:

*) Auf dem erwähnten Umstande beruht die Beweismethode in der citirten Abhandlung von S. Gundelfinger. — Vergl. ferner die Note des Verfassers: „Ueber die nothwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständige Potenz." Mathematische Annalen Bd. 27, pag. 158.

$$
\begin{aligned}
D^k\Delta^l &= \Delta^l D^k + \binom{m+k-l}{1} lk\Delta^{l-1} D^{k-1} \\
&\quad + \binom{m+k-l}{2} l(l-1)k(k-1)\Delta^{l-2} D^{k-2} + \cdots, \\
\Delta^l D^k &= D^k\Delta^l + \binom{l-k-m}{1} lkD^{k-1}\Delta^{l-1} \\
&\quad + \binom{l-k-m}{2} l(l-1)k(k-1) D^{k-2}\Delta^{l-2} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Legen wir endlich mehrere Formen $f, \varphi, \ldots$ zu Grunde und betrachten simultane Functionen der Derivirten $f_0, f_1, \ldots f_n, \varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_r$, so werden wir nunmehr unter D und Δ die Summe aller auf $f, \varphi, \ldots$ einzeln bezogenen Differentiationssymbole zu verstehen haben, also:

$$D = D_f + D_\varphi + \cdots,$$
$$\Delta = \Delta_f + \Delta_\varphi + \cdots$$

und es ist leicht erkennbar, dass bei diesen Festsetzungen sämmtliche obige Formeln auch für simultane Gebilde gültig bleiben, sobald wir nur der Zahl m überall die modificirte Bedeutung:

$$m = ng + v\gamma + \cdots - 2p$$

ertheilen.

Für die folgenden, allgemeinen Betrachtungen setzen wir ferner des kürzeren Ausdruckes halber fest, dass eine homogene und isobare Function F der Derivirten $f_0, f_1, \ldots f_n, \varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_r, \ldots$ *vom Range r* heissen möge, wenn in der Reihe:

$$DF, D^2F, \ldots$$

$D^{r+1}F$ die erste Bildung ist, welche identisch verschwindet. Wie sich mittelst der Formeln (4) zeigt, ist dann in der Reihe:

$$\Delta F, \Delta^2 F, \ldots$$

$\Delta^{m+r+1}F$ die erste identisch verschwindende Bildung, d. h. *die Function F vom Range r besitzt die Ordnung m + r in Bezug auf die Variable x.* Mit Benutzung der Formeln (4) erhalten wir aus einer vorgelegten Function F r^{ten} Ranges der Reihe nach folgendes System von Functionen nullten Ranges d. h. von Covarianten:

$$
\begin{aligned}
F^{(r)} &= D^r F, \\
F^{(r-1)} &= D^{r-1} F - \frac{(m+r)!}{(m+2r)!\, r!} D^{r-1}\Delta^r F^{(r)}, \\
&\cdots\cdots\cdots

$$F^{(r)} = D^r F,$$
$$F^{(r-1)} = \left[D^{r-1} - \frac{1}{m-2r}\Delta D^r\right] F,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(0)} = \left[1 - \frac{1}{m+2}\Delta D + \frac{1}{2(m+2)(m+3)}\Delta^2 D^2 - + \cdots\right] F.$$

Die Einführung der abkürzenden Bezeichnung:

$$[F] = \left[1 - \frac{1}{1(m+2)}\Delta D + \frac{1}{1\cdot 2(m+2)(m+3)}\Delta^2 D^2 - + \cdots\right] F$$

gestattet, das obige System von Covarianten in der einfachen Gestalt zu schreiben:

$$(5)\qquad \begin{aligned} F^{(0)} &= [F], \\ F^{(1)} &= [DF], \\ &\cdots\cdots \\ F^{(r)} &= [D^r F], \end{aligned}$$

während die letzte Gleichung des vorangegangenen Gleichungssystems die Identität:

$$F = c^{(0)} F^{(0)} + c^{(1)}\Delta^1 F^{(1)} + \cdots + c^{(r)}\Delta^r F^{(r)},$$
$$c^{(k)} = \frac{(m+k)!}{(m+2k)!\,k!}.$$

liefert, d. h.: *Jede Function F r^{ten} Ranges ist auf eine eindeutig bestimmte Weise als Summe von $(r+1)$ Ausdrücken darstellbar, welche durch blosse Vorsetzung des Symbols Δ aus Covarianten entspringen. Die Covarianten $F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots F^{(r)}$, sind gleichsam als die Erzeugenden der Function F zu betrachten.*

Was übrigens die neu eingeführte Operation betrifft, so ergiebt beispielsweise die Rechnung:

$$[f_0 \varphi_p] = \frac{n!\,(n+\nu+1)!}{(n-p)!\,(n+\nu+p+1)!}\left\{f_0\varphi_p - \binom{p}{1} f_1\varphi_{p-1} + - \cdots + (-1)^p f_p \varphi_0\right\}.$$

Das in Rede stehende Covariantensymbol [ ] erscheint hiernach im Lichte einer Verallgemeinerung des bekannten Ueberschiebungsprocesses.

Die bisherigen allgemeinen Entwickelungen können unter Anderem zu einem strengen Beweise eines bekannten Satzes über die Anzahl invarianter Bildungen dienen. Da nämlich nach den Formeln (5) einer jeden Function F von bestimmten Graden $g, \gamma, \ldots$ und dem Gewichte p ein System von Covarianten $F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots F^{(r)}$, mit gleichen oder kleineren Gewichten eindeutig zugeordnet ist und umgekekrt jedes solche Covariantensystem zu einer bestimmten Function F führt, so müssen nothwendig die Anzahl jener Functionen F und die Anzahl der Covarianten von den Graden $g, \gamma, \ldots$ und von einem p nicht

überschreitenden Gewichte untereinander übereinstimmen. Bezeichnen wir diese Anzahl mit Z_p, so ist offenbar die Anzahl der linear unabhängigen Covarianten von den betreffenden Graden $g, \gamma, \ldots$ und dem Gewichte p gleich der Differenz der Zahlen Z_p und Z_{p-1}, womit der in Aussicht gestellte Beweis für den Fundamentalsatz*) des Cayley-Sylvester'schen Abzählungscalcüls in voller Strenge erbracht ist.

Eine weitere Anwendung gestatten unsere Entwicklungen, wenn es sich um die Construction einer Function G handelt, welche nach Vorsetzung des Symbols D, beziehungsweise Δ ein vorgeschriebenes Resultat F ergeben soll. Lösen wir nämlich die vorgelegte Function F nach Formel in ihre Erzeugenden $F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots F^{(r)}$ auf, so ergiebt sich, dass eine Function G der verlangten Art im ersteren Falle für ein positives m immer, für $m \leqq 0$ dagegen nur unter der Bedingung:

$$[D^{-m}F] = 0$$

existirt, während anderseits im zweiten Falle durchweg die Bedingung:

$$[F] = 0$$

erforderlich wird. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so erhält die gesuchte Function G den Werth:

$$G = \frac{1}{1\cdot m} c^{(0)} \Delta F^{(0)} + \frac{1}{2(m+1)} c^{(1)} \Delta^2 F^{(1)} + \cdots + \frac{1}{(r+1)(m+r)} c^{(r)} \Delta^{r+1} F^{(r)},$$

beziehungsweise:

$$G = c^{(1)} F^{(1)} + c^{(2)} \Delta^1 F^{(2)} + \cdots + c^{(r)} \Delta^{r-1} F^{(r)},$$

wo rechter Hand natürlich noch beliebige Functionen H mit der Eigenschaft:

$$DH = 0, \quad \text{beziehungsweise:} \quad \Delta H = 0$$

hinzugefügt werden dürfen.

Das obige allgemeine Theorem und die daran anschliessenden Betrachtungen werden sich insbesondere von Nutzen erweisen, sobald es sich um die Ermittelung invarianter Eigenschaften und Criterien für solche besondere binäre Formen handelt, deren Natur durch gegebene algebraische Differentialgleichungen gekennzeichnet ist. Formen oder Formensysteme mit speciellen oder beschränkt willkürlichen Coefficienten haben bisher nur ausnahmsweise vom Standpunkte invariantentheoretischer Anschauungen aus Erörterung gefunden. Nehmen wir die Untersuchungen aus, in welchen F. Klein**) auf Grund einer

*) Vergl. Sylvester, Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées. Crelles Journal, Bd. 85, pag. 89.

**) Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Mathematische Annalen Bd. 9. — Vergl. andererseits: Gordan, Ueber Formen mit verschwindenden Covarianten. Mathematische Annalen Bd. 12.

functionentheoretisch-geometrischen Betrachtungsweise für die in sich selbst linear transformirbaren Formen die nothwendigen und hinreichenden invarianten Criterien ableitet, so war man im übrigen zur Auffindung invarianter Relationen auf die umständliche directe Ausrechnung aller in Frage kommenden Invarianten und Covarianten angewiesen*). Im Folgenden soll nun an dem Beispiele der hypergeometrischen Reihe gezeigt werden, in welcher Weise durch unsere früheren Entwickelungen eine allgemeine und directe Herleitung invarianter Criterien aus der vorgelegten algebraischen Differentialgleichung möglich wird.

Die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist offenbar dann und nur dann eine ganze rationale Function der Variablen x, wenn wir einen der beiden im Zähler jedes Gliedes auftretenden Parameter gleich einer negativen ganzen Zahl, etwa $\alpha = -n$ annehmen. Unter dieser Voraussetzung erhält durch Vorzeichenänderung und reciproke Transformation der Variablen jene hypergeometrische Reihe die Gestalt der folgenden binären Form n^{ter} Ordnung in nicht homogener Schreibart:

$$(6) \qquad f = x^n + \binom{n}{1}\frac{\beta}{\gamma}x^{n-1} + \cdots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

und die Vergleichung mit der allgemeinen Schreibweise (1) zeigt, dass die specielle Natur der in Rede stehenden Form durch die einfache Formel:

$$a_i = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+i-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+i-1)}$$

charakterisirt ist.

Vollziehen wir nun in der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe:

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0$$

den Uebergang zu der Grundform f, so ergiebt sich bei gleichzeitiger Einführung der cubischen und der linearen homogen geschriebenen Form:

$$\varphi = \alpha_0 x_1^3 + 3\alpha_1 x_1^2 x_2 + 3\alpha_2 x_1 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2,$$

$$\psi = \beta_0 x_1 + \beta_1 x_2 = \frac{3\gamma+2(n-1)}{3(n-1)}x_1 + \frac{3\beta+n-1}{3(n-1)}x_2$$

unserer früheren Bezeichnungsweise (2) entsprechend:

$$\varphi_0 f_2 - 2\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_0 - \psi_0 f_1 + \psi_1 f_0 = 0,$$

d. h.

$$(7) \qquad (\varphi, f)_2 + (\psi, f)_1 = 0.$$

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass aus einer Covarianten-

*) Vergl. beispielsweise die Behandlung der Modular- und Multiplicatorgleichung 6^{ten} Grades. Clebsch, Binäre Formen § 114 und 115.

relation der letzteren Art stets eine Differentialgleichung von der obigen Gestalt folgt. Es lässt sich demnach der Satz aussprechen:

Eine binäre Form f von der n^{ten} Ordnung ist immer dann und nur dann in eine endliche hypergeometrische Reihe linear transformirbar, wenn eine cubische Form φ und eine lineare Form ψ existiren, welche mit f durch die Formel (7) *verbunden sind.*

Zugleich sei hier kurz bemerkt, dass, einem allgemeinen Theoreme zufolge, die eben ausgesprochene Eigenschaft der Form f nothwendigerweise das Vorhandensein einer $(n-6)$-fach unendlichen Mannigfaltigkeit von Formen χ der $(n-1)^{ten}$ Ordnung bedingt, von denen jede einzelne durch die invarianten Beziehungen:

$$(\chi, f)_{n-2} = 0, \quad (\chi, f)_{n-1} = 0 \tag{8}$$

mit der Grundform f verkettet ist*). Auch umgekehrt zieht das Vorhandensein einer solchen $(n-6)$-fach unendlichen Formenmannigfaltigkeit jene charakteristische Eigenschaft der hypergeometrischen Reihe nach sich.

Die Kenntniss der Formen φ und ψ setzt uns gleichzeitig in den Stand, die lineare Transformation der fraglichen Form in die Gestalt der hypergeometrischen Reihe (6) zu bewerkstelligen. Führen wir nämlich die cubische Form φ in die specielle Gestalt:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \tag{9}$$

über, so sind die Coefficienten der simultan transformirten Linearform ψ von den Parametern der hypergeometrischen Reihe in der oben bezeichneten Weise abhängig und es ergeben sich für letztere demnach die Werthe:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{3}(n-1)(3\beta_1 - 1), \\ \gamma &= \frac{1}{3}(n-1)(3\beta_0 - 2). \end{aligned} \tag{10}$$

Da die Transformation der cubischen Form φ in die fragliche Gestalt auf 6 verschiedene Arten geschehen kann, so giebt es ebensoviele verschiedene hypergeometrische Reihen, welche im Sinne der Invariantentheorie mit der vorgelegten Grundform äquivalent erscheinen**).

Unsere weitere Aufgabe wird darin bestehen, das gefundene nothwendige und hinreichende Criterium (7) seines simultanen Charakters zu entkleiden. Zu dem Zwecke lösen wir dasselbe durch Nullsetzen

---

*) Vergl. am Schlusse dieser Mittheilung das Beispiel der Kugelfunction 6^{ter} Ordnung.

**) Mit Benutzung dieser bekannten linearen Transformation ist die genaue Auswerthung der Discriminante für die im Endlichen abbrechende hypergeometrische Reihe möglich.

sämmtlicher Coefficienten der linken Seite in die n einzelnen Bedingungen auf:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0\alpha_2- \quad 2\alpha_1\alpha_1+ \quad \alpha_2\alpha_0 \quad + \quad \beta_0\alpha_1- \quad \beta_1\alpha_0=\\
&(n-2)\alpha_0\alpha_3-(2n-5)\alpha_1\alpha_2+(n-4)\alpha_2\alpha_1+\alpha_3\alpha_0+(n-1)\beta_0\alpha_2-(n-1)\beta_1\alpha_1=\\
&(n-3)\alpha_0\alpha_4-(2n-8)\alpha_1\alpha_3+(n-7)\alpha_2\alpha_2+2\alpha_3\alpha_1+(n-1)\beta_0\alpha_3-(n-1)\beta_1\alpha_2=\\
(11)\quad &(n-4)\alpha_0\alpha_5-(2n-11)\alpha_1\alpha_4+(n-10)\alpha_2\alpha_3+3\alpha_3\alpha_2+(n-1)\beta_0\alpha_4-(n-1)\beta_1\alpha_3=\\
&(n-5)\alpha_0\alpha_6-(2n-14)\alpha_1\alpha_5+(n-13)\alpha_2\alpha_4+4\alpha_3\alpha_3+(n-1)\beta_0\alpha_5-(n-1)\beta_1\alpha_4=\\
&(n-6)\alpha_0\alpha_7-(2n-17)\alpha_1\alpha_6+(n-16)\alpha_2\alpha_5+5\alpha_3\alpha_4+(n-1)\beta_0\alpha_6-(n-1)\beta_1\alpha_5=\\
&\qquad\qquad\qquad

der allein noch auftretenden Variablen x_1, x_2. Um sie durch übersichtlichere covariante Bildungen auszudrücken, schreiben wir vor allem ihre Quelle in der einfachen, von unwesentlichen Zahlenfactoren befreiten Determinantengestalt:

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} (n-1)\,a_2, & a_1, & a_0, & 0, & 0, & 0 \\ (n-2)\,a_3, & a_2, & a_1, & a_2, & a_1, & a_0 \\ (n-3)\,a_4, & a_3, & a_2, & 2a_3, & 2a_2, & 2a_1 \\ (n-4)\,a_5, & a_4, & a_3, & 3a_4, & 3a_3, & 3a_2 \\ (n-5)\,a_6, & a_5, & a_4, & 4a_5, & 4a_4, & 4a_3 \\ (n-6)\,a_7, & a_6, & a_5, & 5a_6, & 5a_5, & 5a_4 \end{vmatrix}.$$

Für $n-6$ erhält dieselbe als Invariante der Form 6^{ter} Ordnung den Werth:

$$(13) \qquad c_1 A^3 + c_2 AB + c_3 C,$$

wo A, B, C nach der Salmonschen Bezeichnungsweise*) die drei bekannten allein in Frage kommenden Invarianten der Form 6^{ter} Ordnung bedeuten. Die Constanten c_1, c_2, c_3 bestimmen sich durch Anwendung der beiden Specialisirungen:

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0,$$
$$a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0,$$

wie folgt:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = -5.$$

Um auf den allgemeinen Fall überzugehen, schreiben wir die Elemente der ersten Verticalreihe der Determinante (12) in der Zertheilung:

$$5a_2 + (n-6)\,a_2,\ 4a_3 + (n-6)\,a_3,\ 3a_4 + (n-6)\,a_4, \ldots (n-6)\,a_7,$$

so dass dementsprechend auch die Determinante selbst als Summe zweier Determinanten erscheint, deren erste mit der eben berechneten Quelle (13) übereinstimmt, während die zweite den Zahlenfactor $n-6$ enthält. Das angedeutete Verfahren liefert somit schliesslich die Relation:

$$\Gamma = 4AB - 5C + (n-6)\,D,$$

worin die Covarianten A, B, C, D allgemein für die Form n^{ter} Ordnung die Bedeutung haben:

$$A = [a_0 a_6 - 6a_1 a_5 + \cdots]\, x_1^{2(n-6)} + \cdots,$$
$$B = [a_0 a_2 a_4 a_6 - a_0 a_2 a_5^2 - \cdots]\, x_1^{4(n-6)} + \cdots,$$
$$C = [a_0^2 a_3^2 a_6^2 - 6a_0^2 a_3 a_4 a_5 a_6 + 4a_0^2 a_3 a_5^3 + \cdots]\, x_1^{6(n-6)} + \cdots,$$
$$D = [-2a_0^2 a_2 a_4 a_5 a_7 + 4a_0^2 a_2 a_4 a_6^2 - 2a_0^2 a_2 a_5^2 a_6 + \cdots]\, x_1^{6(n-6)} + \cdots$$

Durch folgerechte Zusammenfassung aller bisherigen Ergebnisse erhalten wir den definitiven Satz:

*) Vergl. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, Art. 251, 252, 253.

Eine binäre Form der n^{ten} Ordnung ist immer dann und nur dann in eine endliche hypergeometrische Reihe linear transformirbar, wenn die Covariantenrelation:

$$4AB - 5C + (n-6)D = 0 \tag{14}$$

besteht. Die letztere ist mithin der präcise und vollständige Ausdruck für die invariantentheoretische Eigenart der endlichen hypergeometrischen Reihe.

Zur Bewerkstelligung der in Rede stehenden linearen Transformation, sowie zur Berechnung der Parameter β und γ der resultirenden hypergeometrischen Reihe bedarf es nach den früheren Ausführungen der Kenntniss der beiden Formen φ und ψ. Wir fügen desshalb zu den n Gleichungen (11) noch die weiteren Identitäten hinzu:

$$a_0 y_1^3 + 3a_1 y_1^2 y_2 + 3a_2 y_1 y_2^2 + a_3 y_2^3 = \varphi(y),$$

beziehungsweise:

$$\beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 = \psi(y)$$

und erkennen aus den so erhaltenen Gleichungssystemen, dass die Determinantenbildungen:

$$F = \begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0, & a_1, & -a_0, & x_2^{(1)n-1}, \dots x_2^{(n-5)n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \dots \cdot \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n, & -a_{n-1}, & x_1^{(1)n-1}, \dots x_1^{(n-5)n-1} \\ y_1^3, & 3y_1^2 y_2, & 3y_1 y_2^2, & y_2^3, & 0, & 0, & 0 \quad \dots 0 \end{vmatrix},$$

beziehungsweise:

$$P = \begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0, & a_1, & -a_0, & x_2^{(1)n-1}, \dots x_2^{(n-5)n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \dots \cdot \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n, & -a_{n-1}, & x_1^{(1)n-1}, \dots x_1^{(n-5)n-1} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & y_1, & y_2, & 0 \quad \dots 0 \end{vmatrix},$$

für beliebige Werthe der neu eingeführten $(n-5)$ Variablenreihen mit den Formen $\varphi(y)$, beziehungsweise $\psi(y)$ nothwendig proportional ausfallen. Um betreffs jener mehrfachen Variablenreihen eine analoge Reduction wie vorhin eintreten zu lassen, construiren wir durch Grenzübergang die beiden folgenden Covarianten:

$$\Phi(x, y) = \left[\frac{F}{\Pi(x_1^{(i)} x_2^{(k)} - x_1^{(k)} x_2^{(i)})} \right]_{x^{(1)} = \dots = x^{(n-5)} = x}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0, & a_1, & -a_0, & x_2^5, \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \dots \cdot \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n, & -a_{n-1}, & 0, \dots x_1^5 \\ y_1^3, & 3y_1^2 y_2, & 3y_1 y_2^2, & y_2^3, & 0, & 0, & 0, \dots 0 \end{vmatrix}$$

und:

$$\Psi(x,y) = \left[\frac{P}{\Pi(x_1^{(i)}x_2^{(k)} - x_1^{(k)}x_2^{(i)})}\right]_{x^{(1)}=\cdots=x^{(n-5)}=x}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0, & a_1, & -a_0, & x_2^5, \ldots 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \quad \ldots . \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n, & -a_{n-1}, & 0, \ \ldots x_1^5 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & y_1, & y_2, & 0, \ \ldots 0 \end{vmatrix}$$

Dieselben enthalten nur noch die Variablenreihen x_1, x_2; y_1, y_2; sie sind vom Grade 5 in den Coefficienten der Grundform und von der Ordnung 5 $(n-5)$ bezüglich der ersteren Variablenreihe. Im Hinblick auf die früheren Darlegungen sprechen wir den zusammenfassenden Satz aus:

Ist für eine binäre Form der n^{ten} Ordnung die Covariantenrelation (14) *erfüllt, so verhelfen die Ansätze:*

$$\Phi(x,y) = \Omega(x)\,\varphi(y),$$
$$\Psi(x,y) = \Omega(x)\,\psi(y)$$

zur Construction der cubischen Form φ und der linearen Form ψ. Jede der 6 linearen Substitutionen, welche die cubische Form $\varphi(x)$ in die specielle Gestalt (9) *überführt, leistet zugleich die Transformation der vorgelegten Form in eine endliche hypergeometrische Reihe mit den beiden Parameterwerthen* (10).

Was nun die Darstellung unserer beiden Covarianten durch übersichtliche Bildungen betrifft, so ist dieselbe in einfacher und allgemeiner Weise nur dann möglich, wenn wir durch Identificirung der beiden Variablenreihen x_1, x_2 und y_1, y_2 zu den invarianten Bildungen $\Phi(x,x)$ und $\Psi(x,x)$ übergehen. Bringen wir nämlich die Quellen der letzteren:

$$-9(n-1)\begin{vmatrix} a_1, & a_0, & 0, & 0, & 0 \\ a_2, & a_1, & a_2, & a_1, & a_0 \\ a_3, & a_2, & 2a_3, & 2a_2, & 2a_1 \\ a_4, & a_3, & 3a_4, & 3a_3, & 3a_2 \\ a_5, & a_4, & 4a_5, & 4a_4, & 4a_3 \end{vmatrix}$$

und:

$$+3\begin{vmatrix} (n-1)\,a_2, & (2n-2)\,a_1, & a_0, & 0, & 0 \\ (n-2)\,a_3, & (2n-5)\,a_2, & a_1, & a_1, & a_0 \\ (n-3)\,a_4, & (2n-8)\,a_3, & a_2, & 2a_2, & 2a_1 \\ (n-4)\,a_5, & (2n-11)\,a_4, & a_3, & 3a_3, & 3a_2 \\ (n-5)\,a_6, & (2n-14)\,a_5, & a_4, & 4a_4, & 4a_3 \end{vmatrix}$$

mit den bekannten vollständigen Formensystemen der Grundform 5^{ten}

und 6ter Ordnung zur Vergleichung, so ergiebt sich nach erfolgter Bestimmung der Zahlencoefficienten die gesuchte Darstellung:

$$\Phi(x,x) = -18(n-1)K,$$

$$\Psi(x,x) = 6(n-1)(n-4)L + 18(n-4)(n-5)Bf - 6(n-1)(n-5)il,$$

wo allgemein die weiteren Bezeichnungen gelten:

$$K = [a_0^2a_2a_4a_5 - 3a_0^2a_3^2a_5 + 2a_0^2a_3a_4^2 - \cdots]\, x_1^{5n-22} + \cdots,$$

$$L^*) = [a_0^2a_2a_5^2 - 2a_0^2a_3a_4a_5 + a_0^2a_4^3 - \cdots]\, x_1^{5n-24} + \cdots,$$

$$i = [a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2]\, x_1^{2(n-4)} + \cdots,$$

$$l = [a_0a_2a_6 - 3a_0a_3a_5 - a_1^2a_6 + \cdots]\, x_1^{3n-16} + \cdots.$$

Es sei überdies bemerkt, dass die Kenntniss der eben dargestellten Covarianten in Folge der bestehenden Proportion:

$$\varphi : \psi = \Phi(x,x) : \Psi(x,x)$$

zur Construction der gesuchten Formen φ und ψ wesentlich ausreicht.

Die im Vorstehenden allgemein entwickelten Resultate können für die hypergeometrische Reihe der 5ten und 6ten Ordnung durch wirkliche Aufstellung und Berechnung der in Frage kommenden Invarianten und Covarianten directe Bestätigung finden**).

Nachdem nun die beiden fundamentalen Fragen nach den Bedingungen der Möglichkeit und den Mitteln zur Ausführung der Transformation einer binären Form in eine endliche hypergeometrische Reihe zur allgemeinen Erledigung gebracht sind, liegt es nahe, noch einer gewissen ausgezeichneten Ausartung der allgemeinen hypergeometrischen Reihe zu gedenken, welche in Folge unseres gegenwärtigen invariantentheoretischen Standpunktes eine besonders einfache Deutung erhält.

Wählen wir nämlich die bisher allgemeinen Formen φ und ψ derart, dass der Wurzelpunkt der letzteren Form harmonisch zu den drei Wurzelpunkten der ersteren gelegen ist, so wird durch diese invariante Bedingung die simultane Ueberführung jener beiden Formen in die Gestalten:

$$x_1^2x_2 - x_2^3, \text{ beziehungsweise: } cx_1$$

ermöglicht. Unter Anwendung unserer oben behandelten Darstellungsmethode mittelst einseitiger Derivirter gewinnen wir aus der allgemeinen Covariantenrelation (7) der hypergeometrischen Reihe die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

---

*) Vergl. die Cayleysche Tabelle für die Invarianten und Covarianten der Grundform 5ter Ordnung. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, Art. 232. Nr. 10 und 11.

**) Vergl. die anfangs citirte Dissertation des Verfassers, pag. 17 und 28, wo diese Rechnung für die allgemeine Kugelfunction der 5ten und der 6ten Ordnung im Wesentlichen durchgeführt ist.

$$(x^2-1)\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{1}{3}(n-1)(3c+4)x\frac{df}{dx} + \frac{1}{3}n(n-1)(3c+1)f = 0,$$

in welcher wir nach der Substitution:

$$c = -\frac{4n+3p-4}{3(n-1)}$$

die gewöhnliche Differentialgleichung für die allgemeine Kugelfunction P_p^n wiedererkennen. Da offenbar auch umgekehrt die Differentialgleichung der Kugelfunction mit Nothwendigkeit zu jenen invarianten Beziehungen führt, *so ist die Existenz zweier harmonisch liegender Formen φ und ψ mit der simultanen Beziehung* (7) *in invariantentheoretischem Sinne das nothwendige und hinreichende Kriterium für die Kugelfunction P_p^n.*

Im Uebrigen gelten naturgemäss für die Kugelfunctionen dieselben Ueberlegungen, wie für die allgemeine hypergeometrische Reihe. So ersieht man beispielsweise für die Kugelfunction 6ter Ordnung die Existenz einer Form 5ter Ordnung mit den covarianten Beziehungen (8), da in der That die Relationen:

$$(P_p^6,\ P_{p'}^5)_5 = 0,\quad (P_p^6,\ P_{p'}^5)_4 = 0$$

für:

$$p + p' + 12 = 0$$

identisch erfüllt sind.*)

Königsberg i. Pr., den 23. Februar 1887.

*) Betreffs weiterer den Kugelfunctionen allein zukommenden invarianten Eigenthümlichkeiten vergl. die citirte Dissertation, pag. 15, 16, 18, 26.

Zur Theorie der reducibeln ganzen Functionen von n Variabeln.

Von

Franz Meyer in Tübingen.

Die Theorie der Reducibilität ganzer Functionen ist meines Wissens bisher*) mehr nur beiläufig, und um eine strenge Grundlage für die höhere Algebra, insbesondere deren gruppentheoretische Parthien, zu gewinnen, behandelt worden. Es dürfte daher angemessen erscheinen, namentlich auch im Hinblick auf die mannigfache Verwendung in der Geometrie der rationalen Gebilde, jener Theorie ein systematischeres Studium zu Theil werden zu lassen, welches vor Allem eine, in allen Fällen mögliche Durchführung der erforderlichen Operationen a priori gewährleistet.

Im Folgenden liegt der Versuch vor, den zunächst sich darbietenden Fall der ganzen Functionen von n Veränderlichen — von denen wenigstens eine als völlig unabhängig von den andern vorausgesetzt wird — mit einem rational bekannten Linearfactor einer möglichst vollständigen Bearbeitung zu unterziehen, da diese zweifellos den höheren Fällen zum Fundament zu dienen haben, wie dies in § VII des ersten Abschnitts näher erörtert ist.

*) Vergl. die Lehrbücher der Algebra z. B. von Serret. Am meisten hat sich noch Hr. Kronecker mit der Textfrage beschäftigt, einmal in der Festschrift: „Die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen“ vom Jahre 1882, (vgl. dazu die Ausführungen von Hrn. Runge im Journal für Mathematik. Band 99), sowie seit langer Zeit in seinen Vorlesungen, in denen er auch, wie ich einer Unterredung mit ihm entnehme, verschiedentlich transcendente Gesichtspunkte (Entwicklung nach dem Taylor'schen Satze u. s. f.) in den Gegenstand hineingetragen hat. Der Hauptcharakter dieser Untersuchungen ist indessen ein arithmetischer, alle Begriffsfassungen sind für Anwendungen auf die höhere Zahlentheorie, so zu sagen, praedestinirt. Im Gegensatze hierzu bebaut das Folgende das vorwiegend algebraische d. h. formentheoretische Feld der Reducibilität, was im zweiten Abschnitt besonders deutlich hervortritt.

Die Abhandlung zerfällt in einen theoretischen und einen praktischen Abschnitt.

Im ersteren weicht die Grundlage der Betrachtungen von der üblichen dadurch ab, dass die vorliegend gedachte Function nicht sowohl nach Potenzen, sondern überhaupt (in irgend einer Art) nach linear unabhängigen ganzen Functionen einer der unabhängigen Variabeln entwickelt wird, ein Ansatz, der (übrigens den bekannten als ganz speciellen Fall in sich begreifend) geeignet scheint, sämmtlichen, eventuell eintretenden Ausartungen auf naturgemässe Weise gerecht zu werden.

Das in § I verschiedentlich formulirte Problem wird in § II Schritt für Schritt auf ein immer einfacheres reducirt, bis man dazu gelangt, ausschliesslich ganze Functionen zweier unabhängiger Variabeln λ, μ mit dem Theiler $\lambda - \mu$*) zu analysiren, was in § III mittelst der Theorie der „Fundamentalsysteme" erschöpfend — bis auf ein vorläufig noch festzuhaltendes Postulat — gelingt.

Der § IV lehrt, wie man von diesen Fundamentalsystemen, oder vielmehr von einer aus ihnen, mit Hülfe willkürlicher Parameter linear combinirten „ausgezeichneten Zerlegung" zu den ursprünglich vorgelegten dadurch zurückkehrt, dass an Stelle der erwähnten Parameter (bis zu einem gewissen Grade) willkürliche rationale resp. ganze Functionen anderer Parameter substituirt werden.

Das Bemerkenswertheste an den dabei zur Verwendung gelangenden Operationen ist die rein rationale Natur derselben (wie schon daraus hervorgeht, dass man zur Erledigung der Aufgabe nur gewisser Lösungssysteme linearer Gleichungen bedürfte), soweit, dass selbst das Auftreten der nicht zu vermeidenden Irrationalitäten, so zu sagen, in rationaler Form vor sich geht, das heisst, dass die letzteren erst nachträglich, nach definitivem Abschluss der rationalen Processe, eingefügt werden (§ V).

---

*) Für derartige Functionen hat Hr. Brill in der Arbeit „Ueber rationale Curven und Regelflächen" (Berichte der Münchener Academie vom Jahre 1885) ein einfaches Verfahren angegeben, von dem die erste Anregung zu den hier mitgetheilten Untersuchungen herrührt. Die dort die Aufgabe lösenden linearen Gleichungen sind vor der Hand noch als ein Hülfsvehikel anzusehen, dessen man erst bei weiterem Fortschreiten der Theorie entrathen kann, wie es der zweite Abschnitt für eine ausgedehnte Classe der bezüglichen Functionen leistet. Herrn Brill spreche ich an dieser Stelle für mannigfache Förderung meinen Dank aus. An diese Arbeit schliesst sich eine von mir, ebenda publicirte an, die die Zerlegungen der „dreigliedrigen" Gleichungen fünften Grades im Einzelnen erörtert; die Resultate lassen jetzt mit Hülfe der Formeln (41), (83), (92) des Textes eine einfachere Darstellung und Ableitung zu. Dort ist auch verwandter Arbeitsrichtungen der H. H. Petersen und Wiener Erwähnung gethan. Endlich verweise ich, was den Inhalt des ersten Abschnitts angeht, auf die kurze Notiz in dem Bericht der Berliner Naturforscherversammlung von 1886 (pg. 334), sowie bezüglich eines (auch geometrisch verfolgten) Beispieles zum zweiten Abschnitt auf die im 29ten Annalenbande vorangegangene Abhandlung von mir.

Die Zerfällungen der Functionen zweier unabhängiger Variabeln dienen (in § VI) zur Erläuterung.

In § VII wird, beim Fortschreiten zu Zerlegungen beliebigen Charakters, der Gültigkeitsbereich der zuvor benützten Methoden genau fixirt, und auf die Stellen hingewiesen, an denen wesentlich neue Principien — besonders bezüglich der Adjunction der nunmehr ganz anders sich geltend machenden Irrationalitäten — einzusetzen haben. Die Präcisirung allgemeiner, erschöpfender Methoden scheint hier vor der Hand aussichtslos.

Schon der im Beginn erwählte Ausgangspunkt, die Anordnung nach linear unabhängigen ganzen Functionen $f_i(\lambda)$ einer Variabeln, weist sehr bald darauf hin, wie der eigentliche Kern des Problems der Invarianten-, genauer der Combinantentheorie eines Systems solcher Functionen $f_i(\lambda)$ angehört, und zwar treten dabei die bisher, seit dem Vorgange von Hrn. Gordan überwiegend berücksichtigten rein binären Combinanten durchaus zurück hinter solchen, die mehrere Reihen von $d+1$ cogredienten Variabeln (wenn $d+1$ die Anzahl der $f_i(\lambda)$ bezeichnet) aufweisen*).

Die wirkliche Aufstellung der für den niedrigsten, überhaupt in Betracht zu ziehenden Fall $d = 2$ existirenden Fundamentalsysteme, wie sie der zweite Abschnitt successive für die Grade $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, m$ der $f_i(\lambda)$ bietet, lässt erkennen, wie die mit lauter binären Ueberschiebungsprocessen hantirenden Rechnungsprocesse gleichwohl ohne Zuhülfenahme der eben angegebenen Variabelnreihen geradezu illusorisch werden würden.

Während für diese, aus drei linear unabhängigen $f_i(\lambda)$ sich constituirenden „Gruppen" bei beliebig hohem Grade m ein ganz allgemeines, im Einzelnen (bei Berücksichtigung sämmtlicher Ausartungen) völlig durchführbares und übersichtliches Bildungsgesetz der Fundamentalzerlegungen nachgewiesen werden kann — ohne übrigens irgend eines symbolischen Calcüls zu bedürfen — ist mir das Entsprechende für vier und mehr solcher $f_i(\lambda)$ noch nicht entfernt gelungen.

Den Schluss bildet ein kurzer Verweis auf den geometrischen Inhalt der im zweiten Abschnitt enthaltenen Formeln, als Illustration der in den §§ I bis VI vorgeführten Ueberlegungen des ersten Abschnitts.

---

*) Was derartige höhere Combinanten, ihr volles System u. A. angeht, verweise ich auf die Fussnote (pg. 455) der voraufgegangenen Abhandlung.

Erster Abschnitt.

Die Theorie der Fundamentalsysteme.

§ I.

Formulirung des Problems.

Wir beschäftigen uns mit der Zerfällung einer ganzen Function von n Variabeln, $F(\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})$ in zwei ganze Factoren F_1 und F_2, und zwar mit dem besonderen Falle, wo einer der beiden Factoren in Bezug auf irgend eine*) der n Variabeln — diese sei durch den Buchstaben λ hervorgehoben — vom *ersten* Grade sein soll. Wir suchen demnach alle Identitäten von der Form:

$$(1) \qquad F(\overset{m}{\lambda};\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) \equiv F_1(\overset{1}{\lambda};\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) \cdot F_2(\overset{m-1}{\lambda};\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}),$$

wo die Zahlen m, 1, $m-1$ den Grad der Functionen F, F_1, F_2 in λ angeben, und übrigens nicht ausgeschlossen ist, dass F_2 von Neuem in Factoren zerlegbar wird.

Es fragt sich bei dieser Fassung der Aufgabe nur, was wir als gegeben annehmen wollen, um sie zu einer wirklichen und bestimmten zu machen.

Wir werden es so einrichten, dass die Lösung der gestellten Aufgabe zugleich die der andern nach sich zieht:

„Die Criterien dafür anzugeben, wenn eine *vorgelegte* ganze Function von n Variabeln einer Identität (1) genügt, d. h. als Function irgend einer der Variabeln betrachtet, eine *rational bekannte* Wurzel (oder einen Linearfactor dieser Art) besitzt."

Man denke sich die Function F (1) nach Potenzen von λ geordnet:

$$(2) \qquad F(\lambda;\ \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}) = \lambda^m M_0 + \lambda^{m-1} M_1 + \cdots + M_m.$$

Um alle Fälle zu umfassen, müssen wir annehmen, dass zwischen den Coefficienten M irgend welche lineare Identitäten statthaben können. Sei die Anzahl dieser (von einander linear unabhängigen) Identitäten gleich $m-d$, dann sind die M darstellbar als ganze, lineare, homogene Functionen von $d+1$ (sicher linear unabhängigen) Grössen u:

$$(3) \quad u_0(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}),\ u_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \ldots, u_d(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}),$$

*) Dabei ist nur die einzige Voraussetzung gemacht, dass diese Variable λ von den übrigen unabhängig sei. Daher bleiben Functionen, wie $F(\lambda_1, \lambda_2;\ \mu_1, \mu_2)$, wo sowohl zwischen den λ, als den μ je eine algebraische Relation besteht, im Folgenden ausgeschlossen.

die man sich in $F(2)$ statt der M eingeführt denke. Damit gewinnt F die Gestalt:

$$F = u_0 f_0(\overset{m}{\lambda}) + u_1 f_1(\overset{m}{\lambda}) + \cdots + u_d f_d(\overset{m}{\lambda}). \tag{4}$$

Hier sind die $f_i(\lambda)$ gleichfalls linear unabhängig; denn, bestände eine lineare Relation zwischen ihnen, so zöge diese wiederum eine solche für die u_i nach sich.

Die Formel (4) lehrt die Entwickelung der gegebenen Function $F(\lambda; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})$ nach linear unabhängigen Functionen der bevorzugten Variabeln λ.

Man bemerkt indessen leicht, dass es, um zu einer solchen Entwickelung zu gelangen, durchaus nicht immer*) erforderlich ist, sämmtliche $m - d$, oben supponirten linearen Identitäten zwischen den M_i heranzuziehen.

Wir geben daher jedenfalls unserem Problem die allgemeinste Fassung, wenn wir es so stellen:

„*Sind* $f_0(\overset{m}{\lambda}), f_1(\overset{m}{\lambda}), \ldots, f_d(\overset{m}{\lambda})$, *wo* $d \leqq m$, *linear unabhängige, „eigentliche“***), *im Uebrigen beliebig vorgelegte ganze Functionen*

*) Es erscheint hierbei nothwendig, die zwischen den M_i geltenden linearen Identitäten in zwei wesentlich verschiedene Gattungen zu trennen, die ich — in Anlehnung an eine von Hrn. Klein in die Gleichungstheorie eingeführte Bezeichnungsweise — provisorisch die der „natürlichen“ und „accessorischen“ Identitäten nennen möchte. Die natürlichen seien solche, die mit der *Besonderheit* der Coefficienten in den $M_i(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ nichts zu thun haben, und ausschliesslich daher rühren, dass einzelne der Grade, bis zu welchen die $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ansteigen, unter eine gewisse Grenze sinken. So z. B. herrscht zwischen drei Formen $M_i(\overset{1}{\mu})$ immer eine lineare Identität.

In diesen Fällen ist es, wie der Verlauf des Textes lehrt, durchaus nicht immer zweckmässig, nach einer Minimalanzahl von linear unabhängigen $f_i(\lambda)$ zu entwickeln, sondern es ist eine gewisse Willkühr in der Anzahl derselben geboten, widrigenfalls mancherlei Ausnahmefälle unberücksichtigt bleiben müssten.

Die accessorischen Identitäten dagegen, die erst bei *Specialisirungen* der in den M_i figurirenden Coefficienten in's Leben gerufen werden, erheischen, wie allein schon die Anwendung der Mannigfaltigkeitsformel (7′) lehrt, unbedingt eine solche Darstellung (4), in der die Zahl der $f_i(\lambda)$ möglichst herabgedrückt ist.

Der sogenannte „allgemeine“ Fall, in dem die M_i ganz unabhängig sind, ist in der Formel (41) für $m = d$ mitenthalten, vgl. dazu die bei (48) hinzugefügte Anmerkung.

**) So seien die $f_i(\overset{m}{\lambda})$ genannt, wenn sie weder einen Theiler in λ gemein haben, noch, für $m = m_1 m_2$, von der Form $f_i\{\overset{m_1}{g}(\lambda)\}$ sind, wo $g(\lambda)$ selbst eine ganze Function des Grades m_2 bedeutet. In ähnlichem Sinne mögen auch Zerlegungen von der Form (5) „eigentliche“ heissen, wenn ausserdem noch die $\varphi_i(\mu)$ „eigentliche“ sind; sonst „uneigentliche“.

Sind die $f_i(\lambda)$ nicht alle vom nemlichen Grade, so mache man sie mittelst einer Hülfsvariabeln homogen.

m^{ten} Grades einer Variabeln λ, so sollen die Grössen $u_0, u_1, \ldots, u_d$ als ganze Functionen von $n-1$ veränderlichen Parametern $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ (wo $n-1 \leqq d$) — zwischen denen auch irgend welche algebraischen Verknüpfungen gestattet sein mögen — dermassen bestimmt werden, dass identisch gilt:

I. $$\overset{m}{F}(\lambda) = u_0 \overset{m}{f_0}(\lambda) + u_1 \overset{m}{f_1}(\lambda) + \cdots + u_d \overset{m}{f_d}(\lambda) \equiv \overset{1}{F_1}(\lambda)\, \overset{m-1}{F_2}(\lambda).$$ "

§ II.

Zurückführung des Problems auf ein einfacheres.

Wir gehen vorerst aus von $n - 1 = d$ von einander völlig *unabhängigen* Parametern $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$; alle sonstigen Möglichkeiten werden wir später durch geeignete Specialisirungen ableiten.

Ferner werden wir an Stelle der Zerlegungen I zuvörderst wiederum solche von *einfacherem* Charakter studiren. Wir setzen nemlich fest, dass der — rational bekannt gedachte — Verschwindungswerth von $F_1(\lambda)$, er heisse $\lambda = \mu$, *selbst* einer der Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ sei, etwa der mit μ_1 bezeichnete. Die übrigen sollen dann in ihrer neuen Bedeutung, mit Accenten versehen werden. Ebenso bedienen wir uns modificirter Bezeichnungen v_i, G_2 für die Functionen u_i, F_2, sodass die gemeinten Zerlegungen die folgenden werden:

I'. $$\sum_{i=0}^{i=d} v_i(\mu;\, \mu_2', \mu_3', \ldots, \mu_d')\, \overset{m}{f_i}(\lambda) \equiv (\lambda - \mu)\, \overset{m-1}{G_2}(\lambda;\, \mu;\, \mu_2', \mu_3', \ldots, \mu_d').$$

Unter diesen Zerlegungen zeichnen sich durch ihre Einfachheit diejenigen aus, bei denen die $\mu_2', \mu_3', \ldots, \mu_d'$ getrennt und nur vom ersten Grade auftreten, oder mit anderen Worten: für welche die linke Seite von I', wie auch der Factor G_2 als „*lineare Form*" dieser (nicht homogenen) Parameter erscheint. In diesem Falle wollen wir die Zerlegung eine „*ausgezeichnete*" benennen. Sie bilden den Schlüssel zur Lösung der in § 1 fixirten Aufgabe: denn, haben wir erst irgend eine solche ausgezeichnete Zerlegung ermittelt, so werden wir nachweisen können, *dass rückwärts aus ihr jede beliebige Zerlegung vom Typus I dadurch abgeleitet wird, dass anstatt der letzteingeführten Parameter $\mu, \mu_2', \mu_3', \ldots, \mu_d'$ willkürliche rationale Functionen der ursprünglichen Parameter $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_d$ substituirt werden.*

Denken wir uns für den Augenblick eine ausgezeichnete Zerfällung von der eben definirten Art bereits aufgestellt. Dann zerfällt sie ihrerseits wieder, da sie für die linear (und getrennt) vorkommenden Parameter $\mu_2', \mu_3', \ldots, \mu_d'$ identisch erfüllt sein muss (und letztere nach der ausdrücklich getroffenen Verabredung unabhängig von einander

sind), sofort in d Zerlegungen von noch speciellerem Charakter, in denen je nur *der eine* Parameter μ figurirt, die also sämmtlich von der Form sind ($i = 1, 2, \ldots, d$):

$$(5)\quad \varphi_0(\mu)\overset{\nu_i}{f_0}(\lambda)\overset{m}{} + \varphi_1(\mu)\overset{\nu_i}{f_1}(\lambda)\overset{m}{} + \cdots + \varphi_d(\mu)\overset{\nu_i}{f_d}(\lambda)\overset{m}{} \equiv (\lambda-\mu)\cdot\Phi(\lambda,\ \mu)^{m-1,\,\nu_i-1},$$

wo unter den $\varphi_k(\mu)$ ($k = 0, 1, \ldots, d$) und $\Phi(\lambda, \mu)$ unbekannte ganze Functionen von μ resp. λ, μ zu verstehen sind, die in diesen Variabeln bis zu den angegebenen Graden ansteigen. Umgekehrt wird man dann durch lineare Combinirung (mittelst der Parameter $\mu_2', \mu_3', \ldots, \mu_d'$) von d passend ausgewählten Identitäten (5) zu einer ausgezeichneten Zerlegung gelangen.

Unsere Aufmerksamkeit hat sich danach, ehe wir die Zerlegungen I′ und I selbst in Angriff nehmen, auf das Hülfsstudium der durch (5) dargestellten „ausgezeichneten Zerlegungen mit nur einem Parameter" zu concentriren. Wir werden dabei Gelegenheit nehmen, an diesem Specialfalle eine vollständige Durchführung in dem Sinne zu geben, dass wir den Forderungen des § I zur Genüge gerecht werden.

§ III.

Die ganzen Functionen zweier Variabeln mit einem rational bekannten Bilinearfactor.

Da eine in zwei Variabeln λ, μ bilineare Form durch lineare Transformation, sei es von λ, oder von μ, in die canonische Gestalt „$\lambda - \mu$" übergeführt werden kann, so sind die im Titel bezeichneten Functionen durch eine Identität vom Typus (5) charakterisirt, nämlich:

$$(5)'\quad \varphi_0(\mu)\overset{\nu}{f_0}(\lambda)\overset{m}{} + \varphi_1(\mu)\overset{\nu}{f_1}(\lambda)\overset{m}{} + \cdots + \varphi_d(\mu)\overset{\nu}{f_d}(\lambda)\overset{m}{} \equiv (\lambda-\mu)\,\Phi(\lambda,\ \mu)^{m-1,\,\nu-1},$$

wo ν jetzt einen beliebig vorgegebenen Grad bedeute. Um die unbekannten φ_i (und damit auch den Factor Φ) zu ermitteln, setze man in (5′) nach H. Brill $\lambda = \mu$. Damit wird die linke Seite von (5′) eine ganze Function vom Grade $\nu + m$ in λ allein, deren identisches Verschwinden dem Bestehen der Identität völlig äquivalent ist.

Daraus fliessen zur Bestimmung der in den φ_i vorkommenden $(d + 1)$ $(\nu + 1)$ homogenen Coefficienten $m + \nu + 1$ lineare Gleichungen. Von jenen Coefficienten bleiben daher im allgemeinen Falle noch $(d + 1)(\nu + 1) - (m + \nu + 1) = d(\nu + 1) - m$ willkürlich: die übrigen sind dann eindeutig und rational durch die ersteren und die Coefficienten der f_i bestimmt. Wir drücken dies so aus:

„Die (nicht homogenen) Coefficienten der ganzen Functionen $\varphi_i(\mu)$ in (5′) bilden im Allgemeinen eine lineare Schaar von der Mannigfaltigkeit:

(7) $$M_\nu^{(d)} = d(\nu+1) - m - 1$$

und die $\varphi_i(\mu)$ selbst sind je aus $M_\nu^{(d)} + 1$ rational bekannten (nur linear unabhängig auszuwählenden) Functionen dieser Art linear componirbar mittelst willkürlicher Constanten α, also:

(8) $$\overset{\nu}{\varphi_i}(\mu) = \varphi_i^{(0)}(\mu)\,\alpha^{(0)} + \varphi_i^{(1)}(\mu)\,\alpha^{(1)} + \cdots + \varphi_i^{M_\nu^{(d)}}(\mu)\,\alpha^{(M_\nu^{(d)})}.$$

Bestehen aber zwischen den, die Aufgabe lösenden, $(d+1)(\nu+1)$ linearen Gleichungen eine Anzahl q von linearen Identitäten (was nur bei Erfüllung gewisser Invariantenrelationen zwischen den Coefficienten der $f_i(\lambda)$ stattfinden könnte), so würde die Anzahl (7) zu ersetzen sein durch die andere:

[7] $$[M_\nu^{(d)}] = d(\nu+1) - m - 1 + q = M_\nu^{(d)} + q\text{“}.$$

Die genauere Untersuchung wird ergeben, dass jedenfalls für $\nu \geqq m - d + 1$ die Anzahl q immer verschwindet.

Der erste weitere Schritt wird nunmehr der sein, den oben geschilderten Process der Auflösung linearer Gleichungen eine *nur endliche* Anzahl von Malen vorzunehmen, und aus den so gefundenen Lösungen die allgemeinste, einem beliebigen ν entsprechende Lösung direct zusammenzusetzen. Zu dem Zwecke schicken wir folgende Definition*) voraus:

„Irgend eine Anzahl r von Identitäten (5) (mit successive variirenden Graden ν_i) möge *rational unabhängig* heissen, wenn zwischen ihren linken (oder auch rechten) Seiten keine lineare Identität herrscht, deren Coefficienten ganze Functionen der Variabeln μ wären. In demselben Sinne sollen auch die r Functionensysteme $\overset{\nu_k}{\varphi_i}(\mu)$ $(k = 1, 2, \cdots r)$ rational unabhängig genannt werden“.

Auf Grund dieser Definition möge eine Voraussetzung**) über die Coefficienten der $f_i(\lambda)$ gemacht werden (die alle, mir bis jetzt

*) Es ist diese Definition einer in der Zahlentheorie üblichen nachgebildet.

**) Lässt man diese Voraussetzung fallen (was sicher nur in ganz extremen Fällen eintreten wird), so bleiben auch dann noch die Entwicklungen des Textes, insoweit sie sich auf die Aufstellung der Formel (12)′ und die aus der letzteren zu schöpfende Mannigfaltigkeit der Zerlegungen (5′) beziehen, vollkommen gültig; ein Unterschied tritt nur insofern ein, als die Darstellung der $\overset{\nu}{\varphi_i}(\lambda)$ in (12′) aufhört, eine „reine“ zu sein. Ist nemlich die Summe der ν in (10) grösser als m, etwa gleich σ, so liefert (12′) die gewünschten $\varphi_i(\lambda)$ (und damit auch die linke Seite der Identität (5′)) stets verbunden mit einem (durch Division nicht mehr wegzuschaffenden) Factor $\overset{\sigma}{\tau}(\lambda)$ vom Grade σ in λ (resp. μ). Ebenso ist die Formel (7) nicht mehr anwendbar.

Für $d = 2$ zeigt der zweite Abschnitt, wie die Forderung (9) immer erfüllt werden kann (vgl. die Schlussanmerkung der Arbeit).

bekannt gewordenen, im Uebrigen noch so speciellen, eigentlichen Functionensysteme $f_i(\lambda)$ umfasst):

„Es sei immer möglich, für gegebene $f_i(\lambda)$ ein System von d rational unabhängigen Identitäten (5) derart aufzustellen, dass die Summe der d Grade ν_i (der Functionen φ_i in μ) ein Minimum d. i. gerade gleich m (dem Grad der f_i in λ) wird:

$$\sum_{i=1}^{i=d} \nu_i = m.\text{“} \tag{9}$$

Denkt man sich solche d Identitäten wirklich aufgestellt ($k=1,2,\cdots,d$):

$$\varphi_0^{(k)}(\mu)^{\nu_k} f_0(\lambda)^{m} + \varphi_1^{(k)}(\mu)^{\nu_k} f_1(\lambda)^{m} + \cdots + \varphi_d^{(k)}(\mu)^{\nu_k} f_d(\lambda)^{m} \equiv (\lambda-\mu)\,\Phi^{(k)}(\lambda,\mu)^{m-1,\,\nu_k-1}, \tag{10}$$

oder die ihnen gleichwerthigen:

$$\varphi_0^{(k)}(\lambda)^{\nu_k} f_0(\lambda)^{m} + \varphi_1^{(k)}(\lambda)^{\nu_k} f_1(\lambda)^{m} + \cdots + \varphi_d^{(k)}(\lambda)^{\nu_k} f_d(\lambda)^{m} \equiv 0, \tag{11}$$

so sind die $f_i(\lambda)$ proportional den Determinanten der $\varphi_i^k(\lambda)$ i. e. mit Rücksicht auf (9), ganzen Functionen m^{ten} Grades in λ.

Für den Fall, dass die Bedingung (9) *nicht* erfüllt ist, gelten die beiden Hülfssätze, die wohl keines Beweises bedürfen:

(A) „Auch für $\sum \nu > m$ verhalten sich die $f_i(\lambda)$, wie die Determinanten der $\varphi_i^k(\lambda)$, welche dann aber einen gemeinsamen Factor vom Grade $\sum \nu - m$ in λ besitzen.“

(B) „Für $\sum \nu < m$ verschwinden die Determinanten der $\varphi_i^k(\lambda)$ identisch.“

Der Satz (A) berechtigt uns, Zerlegungen vom Muster (5′) *„erzeugende“* vom Grade ν (sc. im Parameter μ) zu nennen: im Besonderen heisse ein System (10) mit der Eigenschaft (9) ein System*) von (erzeugenden) *„Fundamentalzerlegungen.“*

Mit Hülfe der d Identitäten (11) kann man sofort das vollständige System der für ein beliebig vorgegebenes ν existirenden erzeugenden Zerlegungen (5′) bilden.

Es stelle (5′) irgend eine dieser Zerlegungen dar, in der wieder linker Hand μ gleich λ gemacht sei. Eliminirt man aus dieser Gleichung und den unter (11) angeführten die $f_i(\lambda)$, so verschwindet die aus den $\varphi_i(\lambda)$ und $\varphi_i^{(k)}(\lambda)$ gebildete Determinante (in λ identisch). Es bilden somit die $\varphi_i^k(\lambda)$, zusammen mit den $\varphi_i(\lambda)$ ein rational abhängiges System, sodass man hat:

---

*) Oder auch kürzer ein *„Fundamentalsystem“*. Später (im zweiten Abschnitt) wird dieser Ausdruck auch auf die *linken Seiten* der bez. Zerlegungen angewandt.

$$(12)\ \overset{m}{\tau}(\lambda)\overset{\nu}{\varphi_i}(\lambda)\equiv\overset{\nu_1}{\varphi_i^{(1)}}(\lambda)\overset{m+\nu-\nu_1}{\alpha^{(1)}}(\lambda)+\overset{\nu_2}{\varphi_i^{(2)}}(\lambda)\overset{m+\nu-\nu_2}{\alpha^{(2)}}(\lambda)+\cdots+\overset{\nu_d}{\varphi_i^{(d)}}(\lambda)\overset{m+\nu-\nu_d}{\alpha^{(d)}}(\lambda)$$

wo sich die, als Coefficienten fungirenden, ganzen Functionen $\tau(\lambda)$, $\alpha^{(k)}(\lambda)$ in bekannter Weise berechnen.

Diese Berechnung lehrt aber zugleich, dass diejenigen $\alpha^{(k)}(\lambda)$, deren Gradzahl $m+\nu-\nu_k \geqq 0$ ist, zufolge des Hülfssatzes (A) den gemeinsamen Factor $\tau(\lambda)$ aufweisen, während die übrigen, für die die entsprechende Anzahl $m+\nu-\nu_k$ negativ ausfällt, vermöge (B) identisch verschwinden. Durch Division mit $\tau(\lambda)$ geht daher (12) über in die folgende Darstellung (bei der das Zeichen τ — jetzt als constanter Proportionalitätsfactor aufzufassen — und ebenso die $\alpha^{(k)}(\lambda)$ der Einfachheit wegen beibehalten sein mögen):

$$(12')^*)\ \tau\overset{\nu}{\varphi_i}(\lambda)\equiv\overset{\nu_1}{\varphi_i^{(1)}}(\lambda)\overset{\nu-\nu_1}{\alpha^{(1)}}(\lambda)+\overset{\nu_2}{\varphi_i^{(2)}}(\lambda)\overset{\nu-\nu_2}{\alpha^{(2)}}(\lambda)+\cdots+\overset{\nu_d}{\varphi_i^{(d)}}(\lambda)\overset{\nu-\nu_d}{\alpha^{(d)}}(\lambda),$$

wo für irgend ein negatives $\nu-\nu_k$ dem Zeichen $\overset{\nu-\nu_k}{\alpha^{(k)}}(\lambda)$ der Werth Null beizulegen ist.

Umgekehrt liegt auf der Hand, dass die Substitution beliebiger ganzer Functionen $\overset{\nu-\nu_k}{\alpha^{(k)}}(\lambda)$ in die rechten Seiten von (12′) diese letzteren zu Functionen $\overset{\nu}{\varphi_i}(\lambda)$ einer erzeugenden Zerlegung (5′) vom Grade ν macht.

Demnach liefert die Formel (12′) *sämmtliche* erzeugende Zerlegungen vom Grade ν.

Aus ihr fliesst endlich auch die *genaue* Bestimmung der Mannigfaltigkeit unserer Zerlegungen, ohne dass man der Kenntniss der früher auf anderem Wege gewonnenen Formel (7) resp. [7] bedürfte. Es gilt nämlich der Satz:**)

Die Mannigfaltigkeit der erzeugenden Zerlegungen von beliebig vorgegebenem Grade ν ist in *allen* (wenn auch noch so speciell gearteten Fällen) die um Eins verminderte Gesammtanzahl der in den ganzen Functionen $\alpha^{(k)}(\lambda)$ figurirenden homogenen Coefficienten.“

Hier findet nun ein bemerkenswerther Unterschied statt zwischen den Fällen, in denen der gegebene Grad ν die grösste der Gradzahlen ν_k — sie mag mit ν' bezeichnet sein — überschreitet oder eventuell

---

*) Ein zweiter Beweis für die Formel (12′), der fast ganz ohne Rechnung operirt, findet sich, bei besonderer Anpassung an den Fall von vier $f_i(\lambda)$ vierten Grades (d. i. geometrisch, der Erzeugung der rationalen Raumcurven vierter Ordnung) in der diesem Gegenstand gewidmeten, vorausgeschickten Arbeit des Verf.

**) Der Beweis desselben geht unmittelbar aus der Bemerkung hervor, dass, sobald auch nur eine lineare Relation zwischen den Coefficienten der $\alpha^{(k)}(\lambda)$ stattfände, die Zerlegungen (10) ein rational-abhängiges System bilden würden, was gegen die Voraussetzung verstösst.

ihr gleichkommt, und den andern, wo ν unter den Werth von ν' herabsinkt.

Bei der ersteren Annahme nämlich tritt der merkwürdige Umstand ein, dass die in Rede stehende Mannigfaltigkeit *allein von den Anzahlen* ν, m, d *abhängig ist*, sodass die besondere Natur der $f_i(\lambda)$, oder, was hier das Gleiche bedeutet, die Art der Partition von m in die d Zahlen $\nu_k\,(>1)$, ohne jeden Einfluss bleibt.

In der That führen, wenn keine der Zahlen $\nu - \nu_k$ negativ wird, die ganzen Functionen $\overset{\nu-\nu_k}{\alpha^{(k)}}(\lambda)$ im Ganzen wegen (9) gerade:

$$(13)\qquad \sum_{k=1}^{k=d}(\nu-\nu_k+1) = d(\nu+1)-\sum\nu_k = d(\nu+1)-m$$

homogene Coefficienten mit sich, und die gesuchte Mannigfaltigkeit ist also die, (wie sein muss), mit (7) übereinstimmende:

$$(7)\qquad M_\nu^d = d(\nu+1)-m-1\,(\nu\geqq\nu_k').$$

Sobald dagegen $\nu < \nu_k'$, wird die Formel (7) in der Regel nicht mehr die wahre Mannigfaltigkeit der bez. Zerlegungen angeben. Diese ist vielmehr, wenn $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_a$ unter den Zahlen ν_k diejenigen sind, welche den gegebenen Grad ν nicht überschreiten, und wenn diese Zahlen resp. $n_1, n_2, \ldots n_a$-mal unter den ν_k vorkommen, die folgende Anzahl:

$$(7')\qquad M_\nu^d = \sum_{r=1}^{r=a} n_r(\nu-\nu_r+1)-1\;(\nu<\nu_k').$$

Demnach können wir als Gesammtergebniss verzeichnen, was folgt:

„Um sämmtliche ausgezeichnete Zerlegungen (5') mit einem Parameter μ und vom ν^{ten} Grade in demselben zu erlangen, stelle man d rational unabhängige Fundamentalzerlegungen (10) (mit der Eigenschaft (9)) auf, multiplicire sie mit willkürlichen ganzen Functionen $\overset{\nu-\nu_k}{\alpha^{(k)}}(\mu)$ (wo für $\nu-\nu_k<0$ $\overset{\nu-\nu_k}{\alpha^{(k)}}(\mu)$ gleich Null zu nehmen) und addire, dann kommt:

$$(14)\qquad \sum_{k=1}^{k=d}\overset{\nu-\nu_k}{\alpha^{(k)}}(\mu)\left\{\overset{\nu_k}{\varphi_0^{(k)}}(\mu)\overset{m}{f_0}(\lambda)+\overset{\nu_k}{\varphi_1^{(k)}}(\mu)\overset{m}{f_1}(\lambda)+\cdots+\overset{\nu_k}{\varphi_d^{(k)}}(\mu)\overset{m}{f_d}(\lambda)\right\}$$
$$\equiv(\lambda-\mu)\sum_{k=1}^{k=d}\overset{\nu-\nu_k}{\alpha^{(k)}}(\mu)\,\overset{m-1,\nu_k-1}{\Phi^{(k)}}(\lambda,\mu).$$

Auf diese Weise setzen sich die gesuchten Zerlegungen linear und homogen zusammen aus $M_\nu^{(d)}+1$ linear unabhängigen, rational be-

kannten, wobei die Anzahl $M_\nu^{(d)}$ aus den Formeln (7) resp. (7′) zu entnehmen ist.

Damit ist zugleich die weitere, in § 1 aufgeworfene Frage nach den Zerlegbarkeitscriterien für eine vorgegebene ganze Function in unserem Specialfalle erledigt. Man hat:

„Sollen in der ganzen Function $\sum \varphi_i(\overset{\nu}{\mu})\, f_i(\overset{m}{\lambda})$ (wo die $f_i(\overset{m}{\lambda})$ in linear unabhängiger Weise gegeben sind) die $\varphi_i(\overset{\nu}{\mu})$ so bestimmt sein, dass der Function ein in λ und μ bilinearer, rational bekannter Factor zukommt, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass die $\varphi_i(\mu)$ in der Form (12′) darstellbar sein müssen."

§ IV.

Die Herleitung der Zerlegungen I mit unabhängigen Parametern aus den ausgezeichneten Zerlegungen.

Wir weisen jetzt den Hauptsatz nach, dass der Uebergang von den ausgezeichneten Zerlegungen zu den in I vorgelegten durch rationale Substitutionen der Parameter vermittelt wird.

Der Aufbau der ausgezeichneten Zerlegungen (mit nur linear und isolirt auftretenden Parametern) vollzieht sich, wie bereits in § II entwickelt wurde, ohne Weiteres mit Hülfe eines Systems (10) von Fundamentalzerlegungen; man hat die letzteren nur mit willkürlichen Parametern $\mu_k'(k=1, 2, \ldots d)$ zu multipliciren, und dann zu addiren.

Setzen wir zur Abkürzung für die linke Seite einer Fundamentalzerlegung (10) das Zeichen $\Psi^{(k)}(\overset{m,\ \nu_k}{\lambda,\ \mu})$, sodass also:

$$(15)\quad \Psi^{(k)}(\overset{m,\ \nu_k}{\lambda,\ \mu}) \equiv \sum_{i=0}^{i=d} f_i(\overset{m}{\lambda})\, \varphi_i^{(k)}(\overset{\nu_k}{\mu}) \equiv (\lambda-\mu)\, \Phi^{(k)}(\overset{m-1,\ \nu_k-1}{\lambda,\ \mu}) \qquad (k=1,2,\ldots d),$$

so ist eine ausgezeichnete Zerlegung fixirt durch die Formel:

$$\text{II.}\qquad \sum_{k=1}^{k=d} \Psi^{(k)}(\overset{m,\ \nu_k}{\lambda,\ \mu})\, \mu_k' \equiv (\lambda-\mu) \sum_{k=1}^{k=d} \Phi^{(k)}(\overset{m-1,\ \nu_k-1}{\lambda,\ \mu})\, \mu_k'.$$

Ordnet man hier die linke Seite andererseits nach den $f_i(\lambda)$, so lautet sie:

$$(16)\qquad \sum_{i=0}^{i=d} U_i(\mu;\, \mu_1',\, \mu_2',\, \ldots\, \mu_d')\, f_i(\overset{m}{\lambda})$$

wenn die U_i für die folgenden Ausdrücke stehen:

$$(17)\qquad U_i(\mu;\, \mu_1',\, \mu_2',\, \ldots\, \mu_d') \equiv \sum_{k=1}^{k=d} \varphi_i^{(k)}(\overset{\nu_k}{\mu})\, \mu_k'.$$

Um nur mit ganzen Functionen zu rechnen, haben wir bereits die Identität II (und damit auch die U_i (17)) in Bezug auf die Parameter μ_k' (vermöge Einführung von μ_1') homogen gemacht: dasselbe möge nun auch noch hinsichtlich μ geschehen mittels einer zweiten Variabeln μ'.

Dann fliesst offenbar aus der ausgezeichneten Zerlegung II immer eine solche vom Typus I, sobald man die beiden Reihen von Parametern (μ, μ') $(\mu_1', \mu_2', \ldots \mu_d')$ ersetzt durch ganz beliebig gewählte ganze Functionen jener ursprünglichen Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$.

Demnach handelt es sich nur noch um den Beweis des umgekehrten Satzes, dass jede, irgendwie als existirend gedachte Identität I (vorderhand noch mit lauter *unabhängigen* Parametern $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$ behaftet) mittelst eines Processes von dem eben angegebenen Charakter aus II abgeleitet werden kann.

Zu dem Zwecke stellen wir die Frage besser so:

„Wie kann man es erreichen, dass eine gegebene Zerlegung I mit der Zerlegung II völlig übereinstimmt, sodass beide thatsächlich einer und derselben Identität äquivalent sind?" Oder schärfer:

„Welche Beziehungen haben zwischen den beiderseitigen Parametern stattzufinden, damit vermöge ihrer die ausgezeichnete Zerlegung II in die allgemeine I (und umgekehrt) übergeht?"

Dies wird dann und nur dann eintreten, wenn die linken (und folglich auch die rechten) Seiten von I und II bis auf einen Factor identisch gleich werden, wenn also die folgenden Proportionalitäten identisch erfüllt sind:

$$(18)\quad \varrho\, U_i(\mu, \mu'; \mu_1', \mu_2', \ldots \mu_d') \equiv u_i(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d) \quad (i=0,1,\ldots d).$$

Diese Transformationsrelationen zwischen den alten und neuen Parametern seien von jetzt ab festgesetzt.

Dann reducirt sich die uns obliegende Aufgabe darauf, aus (18) die $\mu, \mu'; \mu_1', \mu_2', \ldots \mu_d'$ in Function der $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$ zu berechnen.

Da der ausdrücklich getroffenen Verabredung zufolge nicht allein $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$, sondern auch die Verhältnisse der $\mu, \mu'; \mu_1', \mu_2', \ldots \mu_d'$ je völlig unabhängig von einander sind, so müssen die letzteren auf Grund der Relationen (18) ganz bestimmte algebraische Functionen der ersteren (und umgekehrt) sein.

Die Berechnung der homogenen μ, μ' erledigt sich mit Leichtigkeit.

Denn sollen die Formeln (18) erfüllt sein, so muss jedenfalls der Factor $\lambda - \mu$ auf der rechten Seite von II übergehen in den entsprechenden, rechter Hand von I figurirenden Linearfactor $\overset{1}{F}_1(\lambda)$. Man denke sich $F_1(\lambda)$ nach λ geordnet:

$$(19)\quad \overset{1}{F}_1(\lambda; \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d) = \lambda F_1^{(2)}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d) - F_1^{(1)}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d)$$

so resultirt für die homogenen μ, μ':

(20) $\tau\mu = F_1^{(1)}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d), \quad \tau\mu' = F_1^{(2)}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d).$

Dieses Werthepaar trage man in die Formeln (18) ein, dann reduciren sie sich auf d unabhängige Gleichungen, in denen nur noch die $\mu_1', \mu_2', \ldots \mu_d'$ als lineare, homogene Unbekannte vorkommen, die daher ohne Weiteres als ganze Functionen der $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$ bestimmbar sind:

(21) $$\sigma\mu_k' = \underbrace{L_k(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d) \; (k = 1, 2, \ldots d).}_{\text{q. e. d.}}$$

Damit ist das Gewünschte geleistet: es bleiben noch die Modificationen zu untersuchen, die das Resultat erfahren wird, wenn man von der bisher festgehaltenen Unabhängigkeit der Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$ absieht.

§ V.

Algebraische Beziehungen zwischen den Parametern. Formulirung des Hauptresultates.

Nunmehr kann nachträglich die Beschränkung, sowohl die $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$, wie die (nicht homogenen) $\mu; \mu_2', \mu_3', \ldots \mu_d'$ je ganz unabhängig von einander denken zu müssen, aufgehoben werden. Denn es seien jetzt die $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$ an irgend welche algebraische Relationen gebunden. Eine von diesen sei z. B.:

(22) $$\varphi(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d) = 0.$$

Dann führt die Elimination der Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$ (und ϱ) aus (22) und den Transformationsgleichungen (18) zu einer, (22) correspondirenden algebraischen Relation zwischen den neuen Parametern μ; $\mu_2', \mu_3', \ldots \mu_d'$:

(23) $$\varphi'(\mu; \mu_2', \mu_3', \ldots \mu_d') = 0 \cdot$$

und umgekehrt. Lassen sich die $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$ im Besonderen durch eine geringere Anzahl von Parametern $\nu_1, \nu_2, \ldots$ rational ausdrücken, so hängen, wie die Formeln (20), (21) direct lehren, auch die neuen Parameter von den ν rational ab.

Dabei können die ν ihrerseits wieder algebraisch verknüpft sein u. s. f.

Unser Hauptresultat ist demnach dieses:

„Das Criterium dafür, dass eine vorgelegte ganze Function von n Variabeln $F(\overset{m}{\lambda}, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1})$ (wo die μ noch beliebigen algebraischen Verbindungen unterliegen dürfen) einen rational bekannten Linearfactor in λ enthält, gewinnt man, indem man zunächst (was noch auf mannigfaltige Art möglich ist) die Function F nach linear unabhängigen ganzen Functionen $f_i(\overset{m}{\lambda})$ (von λ) entwickelt:

$$(4)\quad F(\overset{m}{\lambda}, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d) = \sum_{i=1}^{i=d} u_i(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1}) f_i(\overset{m}{\lambda}) \quad (n-1 \leqq d).$$

Dann müssen sich die Functionen u_i aus je d erzeugenden Functionen $\varphi_i^{(k)}(\mu)$ $\begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots d \\ k = 1, 2, \ldots d \end{pmatrix}$ eines Fundamentalsystems (10) linear und homogen componiren lassen, in der Weise, dass

$$(17')\qquad u_i(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1}) = \sum_{k=1}^{k=d} \varphi_i^{(k)}(\mu) \mu_k' \quad (\mu_1' = 1)$$

wo die μ, μ' von den $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1}$ (unter Wahrung der zwischen den letzteren geltenden algebraischen Relationen) und den Coefficienten der $f_i(\lambda)$ (d. i. den gegebenen Constanten) rational abhängen.

Dabei wird der Verschwindungswerth $\lambda = \mu$ des in Rede stehenden Linearfactors durch die Grösse μ selbst angegeben."

Es mag nützlich sein, die vorangegangenen Entwicklungen den Definitionen und Methoden anzupassen, deren sich Hr. Kronecker in seiner bekannten Festschrift bedient.

Wir begnügen uns hier mit der dementsprechenden Formulirung des Endresultates:

„Soll eine beliebig vorgelegte ganze, ganzzahlige Function $F(\lambda)$ einer Variabeln λ, deren Coefficienten irgend einem Gattungsbereich $(\mathfrak{R}; \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ angehören, in zwei Factoren (sc. mit Coefficienten aus dem nämlichen Gattungsbereich), deren einer in λ vom ersten Grade ist, zerlegbar sein, so denke man sich die Coefficienten von $F(\lambda)$ aus $d+1$ linear unabhängigen Grössen u_i linear und homogen zusammengesetzt, dann ist nothwendig und hinreichend, dass diese u_i ein gewisses Divisorensystem d^{ter} Stufe (von erzeugenden Functionen $\varphi_i^{(k)}$ (10)) besitzen, in dem Sinne, dass sowohl das Argument der Divisoren, als ihre Factoren in dem vorausgesetzten Gattungsbereich enthalten sind."

§ VI.

Die Zerlegungen mit einem Parameter.

Zur Illustration des eben explicirten Ergebnisses wollen wir den zunächst sich aufdrängenden Fall reducibler Functionen I mit nur einem Parameter μ einem eingehenderen Studium unterwerfen. Es bieten diese Zerfällungen, vom Grade π in μ:

$$(24)\quad F(\overset{m}{\lambda}, \overset{\pi}{\mu_1}) = \sum_{i=0}^{i=d} u_i(\overset{\pi}{\mu_1}) f_i(\overset{m}{\lambda}) \equiv F_1(\overset{1}{\lambda}, \overset{\pi_1}{\mu_1}) F_2(\overset{m-1,\ \pi_2}{\lambda,\ \mu_1}) \quad (\pi_1 + \pi_2 = \pi)$$

zugleich die Veranlassung, die frühere Erörterung des § III — die sich auf den einfachsten Unterfall $\pi_1 = 1$ bezog — in naturgemässer Richtung auszudehnen. Insbesondere wird die Mannigfaltigkeitsformel (7), insofern sie sich, gewisse Ausnahmefälle abgerechnet, als allgemeingültig erwies, auch für die Zerlegungen (24) ihr auffallendes Seitenstück erhalten. Nur auf die vollständige Erledigung der auch hier, und zwar noch mannigfaltiger, hervortretenden Ausnahmefälle werden wir verzichten müssen. Es wird dann nur gelingen, die gesuchte Mannigfaltigkeitszahl in zwei Grenzen einzuschliessen.

Wie wir wissen, erschliessen sich uns sämmtliche Zerlegungen (24) aus der ausgezeichneten Zerlegung II, sobald man für die beiden homogenen Parameterreihen μ, μ'; μ_1', μ_2', ... μ_d' solche, im Uebrigen willkürlichen, ganzen Functionen von μ_1 substituirt, die bewirken, dass die Grade von F_1, F_2, u_i in μ_1 den vorgegebenen Zahlen π_1, π_2, $\pi = \pi_1 + \pi_2$ resp. gleich werden. Dies ist nur der Fall, wenn der Grad (bez. μ_1) der Functionen μ, μ' gleich π_1, der von den μ_k' ($k=1,2,...d$) gleich $\pi - \pi_1 \nu_k$ gewählt wird.

Mithin ergiebt sich eine *obere* Grenze für die Mannigfaltigkeit der Zerlegungen (24) d. i. für die Anzahl der in (24) möglichen, von einander unabhängigen, willkürlichen Constanten, wenn man von der Gesammtzahl der in den μ, μ'; μ_1', μ_2', ... μ_d' (als ganzen Functionen von μ_1) auftretenden homogenen Coefficienten noch die Zahl Vier in Abzug bringt, die auf Rechnung einer linearen Transformation von μ_1 kommt, vermöge deren sich stets vier der erwähnten Coefficienten numerisch festlegen lassen. Sei analog dem Früheren, $M^{(d)}_{\pi_1, \pi_2}$ das Zahlzeichen der gesuchten Mannigfaltigkeit, so kommt:

$$M^{(d)}_{\pi_1, \pi_2} \leqq 2\pi_1 + 1 + \sum_{k=1}^{k=d} (\pi - \pi_1 \nu_k + 1) - 4. \tag{25}$$

Wir setzen dabei wieder ausdrücklich fest, dass die Zahlen π_1, π_2 im Uebrigen beliebig, jedoch so gewählt seien, dass keiner der Werthe $\pi - \pi_1 \nu_k$ negativ wird:

$$\pi - \pi_1 \nu_k \geqq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots d) \tag{26}$$

und ausserdem die Bedingung (9)

$$\sum \nu_k = m \tag{9}$$

befriedigt sei. Mit Rücksicht darauf lässt sich die rechte Seite der Ungleichung (25) auch in folgende Formen bringen:

$$2\pi_1 + 1 + \pi d - \pi_1 m + d - 4 = (d+1)(\pi+1) - \{1.\pi_2 + (m-1)\pi_1\} - 4. \tag{27}$$

Wir ermitteln jetzt auf einem anderen Wege für die nämliche Zahl $M^{(d)}_{\pi_1,\pi_2}$ eine *untere* Grenze.

Es ist bisher von dem scheinbar directesten Verfahren, zu allen Identitäten I zu gelangen, nämlich von der Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten, noch kein Gebrauch gemacht worden.

In der That würde dies zu lauter, in den (unbekannten) Coefficienten der Factoren $F_1(\overset{1}{\lambda})$, $F_2(\overset{m-1}{\lambda})$ bilinearen Gleichungen geführt haben, die wirklich aufzulösen die heutige Algebra noch nicht im Stande sein dürfte.

Handelt es sich dagegen, wie jetzt, nur um die Aufsuchung einer unteren Grenze für die Mannigfaltigkeit der Functionen $u_i(\overset{\pi}{\mu}_1)$ in (24), so wird die gemeinte Coefficientenvergleichung einen schätzbaren Dienst leisten.

Die Totalanzahl der in den (unbekannt zu denkenden) ganzen Functionen $u_i(\overset{\pi}{\mu}_1)$, $F_1(\overset{1,\ \pi_1}{\lambda,\ \mu}_1)$, $F_2(\overset{m-1,\ \pi_2}{\lambda,\ \mu}_1)$ vorkommenden homogenen Coefficienten — gleichfalls aus demselben Grunde, wie oben, um Vier vermindert — beträgt:

$$(28) \qquad (d+1)(\pi+1)+2(\pi_1+1)+m(\pi_2+1)-1-4.$$

Zwischen diesen Unbekannten bestehen, da die Gleichung (24) als in λ und μ identisch erfüllt anzusehen ist:

$$(29) \qquad (m+1)(\pi+1)$$

Relationen. Demnach hat man für die Mannigfaltigkeit der Lösungssysteme unserer Aufgabe:

$$(30) \quad M^{(d)}_{\pi_1,\pi_2} \geq \{(d+1)(\pi+1)+2(\pi_1+1)+m(\pi_2+1)-1-4\} - (m+1)(\pi+1),$$

wo sich die rechte Seite umformen lässt in den Werth

$$(31) \qquad (d+1)(\pi+1)-\{1.\pi_2+(m-1)\pi_1\}-4.$$

Der Vergleich der Formeln (27) und (31) lehrt das Zusammenfallen der Anzahlen für die beiden Grenzen der Mannifaltigkeit $M^{(d)}_{\pi_1,\pi_2}$ mit dieser selber, d. h. es ist:

$$(32) \quad M^{(d)}_{\pi_1,\pi_2} = \{(d+1)(\pi+1)-4\}-\{1\cdot\pi_2+(m-1)\pi_1\}$$

und daher, solange an den Forderungen (9) und (26) festgehalten wird, ausschliesslich von den gegebenen Zahlen m, d, π_1, π_2 abhängig, wie auch die Functionen $f_i(\lambda)$ in (24) sonst ausarten mögen.

Man kann den beiden Gliedern, aus denen sich das Aggregat (32) aufbaut, eine fruchtbare Auslegung geben. Denn bezeichnet man mit

C die Mannigfaltigkeit eines willkürlichen Systems von $d+1$ ganzen Functionen π^{ten} Grades einer Variabeln $u_i(\overset{\pi}{\mu_1})$, sowie mit R den Grad der bezüglich λ (oder auch μ) genommenen Resultante der beiden Functionen $F_1(\overset{1,\ \pi_1}{\lambda,\ \mu_1})$ und $F_2(\overset{m-1,\ \pi_2}{\lambda,\ \mu_1})$ in der übrig bleibenden Variabeln, so hat man:

$$(33)\qquad C = (d+1)(\pi+1) - 4, \qquad R = 1.\pi_2 + (m-1)\pi_1$$

und die Anzahl $M^{(d)}_{\pi_1,\pi_2}$ bestimmt sich somit durch die elegante Formel*):

$$(34)\qquad M^{(d)}_{\pi_1,\pi_2} = C - R.$$

Damit haben wir den Satz bewiesen:

„Bilden die $\varphi_i^{(k)}(\overset{\nu_k}{\mu})\begin{pmatrix} i=0,1,\dots d \\ k=1,2,\dots d\end{pmatrix}$ die zu den $f_i(\lambda)$ gehörenden erzeugenden Functionen eines Fundamentalsystems (10), so werden sämmtliche Zerlegungen (24) mit einem Parameter μ (der in den Factoren F_1, F_2 bis zu den Graden π_1, π_2 ansteige) durch die Formel geliefert:

$$(35)\quad F(\overset{m,\ \pi}{\lambda,\mu_1}) = \sum_{i=0}^{i=d} u_i(\overset{\pi}{\mu_1}) f_i(\overset{m}{\lambda}) = \sum_{i=0}^{i=d}\sum_{k=1}^{k=d} \varphi_i^{(k)}\left\{\mu(\mu_1), \mu'(\mu_1')\right\}^{\nu_k\ \pi_1,\ \nu_k,\ \pi_1} f_i(\lambda)\,\mu_k'^{\,m\ \ \pi-\pi_1\nu_k}(\mu_1)$$

$$\equiv \left\{\lambda\mu'(\overset{\pi_1}{\mu_1}) - \mu(\overset{\pi_1}{\mu_1})\right\} \sum_{k=1}^{k=d} \Phi^{(k)}\left\{\begin{matrix}m-1;\ \nu_k-1\ \pi_1\ \ \nu_k-1,\ \pi_1 \\ \lambda;\quad \mu(\mu_1),\ \mu'(\mu_1)\end{matrix}\right\} \mu_k'^{\,\pi-\pi_1\nu_k}(\mu_1)$$

$$\equiv F_1(\overset{1,\ \pi_1}{\lambda,\ \mu_1})\, F_2(\overset{m-1,\ \pi_2}{\lambda,\ \mu_1}),$$

die aus der ausgezeichneten Zerlegung II dadurch hervorgeht, dass an Stelle der homogenen Variabelnreihen (μ, μ') $(\mu_1', \mu_2', \dots \mu_d')$ willkürliche ganze Functionen von dem einen Parameter μ_1 (zu den verzeichneten Graden) substituirt werden.

Hierbei sind zwei wesentlich verschiedene Hauptfälle auseinanderzuhalten.

Sobald nämlich die gegebenen Grade π_1, π_2 so hoch gewählt waren, dass keine der Zahlen $\pi - \pi_1\nu_k$ negativ wird, wird die Mannigfaltigkeit der Zerfällungen (35) in der That durch die Anzahl $M^{(d)}_{\pi_1,\pi_2}$ (34) der in den Functionen $\mu(\mu_1)$, $\mu'(\mu_1)$, $\mu_k'(\mu_1)$ vorkommenden willkürlichen Constanten angegeben, und bleibt für beliebig specielle — wenn nur mit (9) harmonirende — $f_i(\lambda)$ gültig.

Ist dagegen, für ν' als grösste der Zahlen ν_k,

$$(36)\qquad \pi - \pi_1\nu' < 0$$

*) Ueber die Bedeutung dieser Formel, ihre Erweiterung, und endlich ihre Anwendung auf die Geometrie vergl. die oben citirte Note des Verf. in den Münchener Berichten von 1885.

d. h. sind einige der $\pi - \pi_1 \nu_k$ negativ, so stellt zwar (35) — nach zuvoriger Unterdrückung der bezüglichen Coefficienten $\mu_k^{(\pi-\pi_1\nu_k<0)}(\mu_1)$ — immer noch die Gesammtheit der in diesen Fällen möglichen Zerlegungen (24) dar, ihre wirkliche Mannigfaltigkeit aber befindet sich zwischen den beiden Grenzen (25) und (30), wo bei der ersteren wiederum in der Summe $\sum_{k=1}^{k=d}(\pi - \pi_1 \nu_k + 1)$ nur die positiven von den k Gliedern zu rechnen sind."

Von dem Nachweise der zweiten Hälfte dieses Ergebnisses können wir absehen, da er dem in § III — für negative Zahlen $\nu - \nu_k$ — geführten durchaus ähnlich ist.

§ VII.

Allgemeine Theorie der Zerlegungen.

Unser Studium richtete sich bis hierher ausschliesslich auf Zerlegungen vom Charakter I: es entsteht jetzt die Frage, ob auf sie die angestellten Erwägungen und Rechnungen beschränkt sind, oder ob diese nicht vielmehr — mit geeigneten Modificationen — eine Uebertragung auf die höheren Fälle:

$$\text{III} \quad F^{(m)}(\lambda;\ \mu_1, \mu_2, \ldots) = \sum_{i=0}^{i=d} u_i(\mu_1, \mu_2, \ldots) f_i^{(m)}(\lambda) \equiv F_1^{(\pi_1)}(\lambda) F_2^{(\pi_2)}(\lambda) \ldots F_\varrho^{(\pi_\varrho)}(\lambda)$$
$$(\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_\varrho = m)$$

gestatten, und an welchen Punkten neue Methoden einzusetzen haben.

Die Antwort auf die hiermit aufgeworfene Frage wird sich leichter geben lassen, wenn wir uns auf den, an I unmittelbar anschliessenden Fall eines quadratischen*) Factors:

$$\text{I} \quad F^{(m)}(\lambda) = \sum u_i f_i^{(m)}(\lambda) \equiv F_1^{(2)}(\lambda) F_2^{(m-2)}(\lambda)$$

als Typus stützen. Dabei werden wir diejenigen Formeln, deren Analogie mit den in den §§ I bis V aufgebauten augenscheinlich ist, unter dem nämlichen Zahlzeichen, nur mit einem Accent links oben versehen, citiren. Unter den $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$ $(d \geqq 2)$ seien zuvörderst wieder unabhängige Parameter verstanden. Statt der Identitäten I

*) Vom Standpunkt der allgemeinen algebraischen Theorie ist freilich ein solcher höherer Fall direct auf den vorher behandelten zurückführbar. Denn irgend eine symmetrische Function der Wurzeln von $F_1^{(2)}(\lambda) = 0$ hängt von einer Gleichung mit einer rational bekannten Wurzel ab. Eine wirkliche Durchführung dieses Ansatzes im Sinne des Textes scheint indessen schwierig zu sein.

untersuchen wir vorab solche „ausgezeichneten", bei denen zwei der Parameter μ, etwa μ_1, μ_2 (mit Hülfe eines dritten μ_0, der Homogeneität halber eingeführten) mit den Coefficienten des Factors $F_1^{(\lambda)}$ übereinstimmen, und überdies die noch übrigen $\mu_3', \mu_4', \ldots \mu_d'$ (gleichfalls vermöge eines weiteren, μ_2', homogen gemacht) nur vom ersten Grade und isolirt auftreten, also:

II.
$$\sum_{i=0}^{i=d}\sum_{k=2}^{k=d} \varphi_i^{(k)}(\overbrace{\mu_0,\mu_1,\mu_2}^{\nu_k}) f_i^{(\lambda)}\mu_k'$$
$$\equiv(\lambda^2\mu_0-\lambda\mu_1+\mu_2)\,\Phi^{m-2}(\lambda;\ \overbrace{\mu_0,\mu_1,\mu_2}^{\nu_k-1};\ \overbrace{\mu_2',\mu_3',\ldots\mu_d'}^{1})$$

wo ν_k die Dimension der $\varphi_i^{(k)}$ in den μ_0, μ_1, μ_2 bedeutet. Diese Zerlegung II ist $d-2$ „erzeugenden" äquivalent, nämlich $(k=2,3,\ldots d)$:

(10) $\varphi_0^{(k)}(\overbrace{\mu_0,\mu_1,\mu_2}^{\nu_k})f_0^{(\lambda)}+\varphi_1^{(k)}(\overbrace{\mu_0,\mu_1,\mu_2}^{\nu_k})f_1^{(\lambda)}+\cdots+\varphi_d^{(k)}(\overbrace{\mu_0,\mu_1,\mu_2}^{\nu_k})f_d^{(\lambda)}$
$$\equiv(\lambda^2\mu_0-\lambda\mu_1+\mu_2)\,\Phi^{(k)m-2,}(\lambda;\ \overbrace{\mu_0,\mu_1,\mu_2}^{\nu_k-1}).$$

Solcher Zerlegungen stelle man, mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten (wie in § VI) $d-1$ „rational unabhängige" auf (i. e. die keiner linearen Identität, mit ganzen Functionen der μ_0, μ_1, μ_2 als Coefficienten unterliegen) von den resp. Dimensionen $\nu_k (k=2,3,\ldots d)$, wobei die Summe aller ν_k so niedrig als möglich gewählt werde.

Diese, so gefunden gedachten $d-1$ Identitäten hat man nur mit willkürlichen Grössen $\mu_2', \mu_3', \ldots \mu_d'$ zu multipliciren und zu addiren, um rückwärts die ausgezeichnete Zerlegung II zu erreichen. Es laute die linke Seite der letzteren, abgekürzt:

(17)
$$\sum_{i=0}^{i=d} U_i(\mu_0,\mu_1,\mu_2;\ \mu_2',\mu_3',\ldots\mu_d')f_i^{(\lambda)}$$

dann geht diese über in die linke Seite der ursprünglichen Zerlegung I nach Festsetzung der Transformationsformeln:

(18) $\varrho\, U_i(\mu_0,\mu_1,\mu_3;\ \mu_2',\mu_3',\ldots\mu_d') = u_i(\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_d).$

Diese führen einmal, wenn $F_1^{(\lambda)}$, nach λ entwickelt, die Gestalt hat:

(19) $$F_1^{(\lambda)} = \lambda^2 F_1^{(0)} - \lambda F_1^{(1)} + F_1^{(2)}$$

zur Bestimmung der homogenen μ_0, μ_1, μ_2:

(20) $$\tau\mu_s = F_1^{(s)} \quad (s=0,\ 1,\ 2)$$

sodann, mit Benutzung hiervon, auch zu den Ausdrücken der μ_k':

$$'(21) \qquad \sigma\mu_k' = L_k(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d) \quad (k=2,3,\ldots d)$$

in ganzen Functionen der alten Parameter.

Diese letzteren möge man sich nachträglich an irgendwelche algebraische Relationen gebunden denken, dieselben ziehen entsprechende Relationen unter den neuen Parametern nach sich und umgekehrt.

Und somit wird endlich auch das Hauptresultat in dem damals (§ V) niedergelegten sein getreues Vorbild haben.

Eine sorgfältigere Ueberlegung wird indessen bald erkennen lassen, welche Schwierigkeiten der wirklichen Ausführung der angedeuteten Operationen, schon bei allgemeinen $f_i(\lambda)$, entgegenstehen, und wann selbst der blosse Ansatz dieser Operationen von vornherein versagt.

Was zunächst die erzeugenden Zerlegungen $'(10)$ angeht, so lehren Beispiele, dass schon im allgemeinen Falle die aus der Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten von $'(10)$ emanirenden $(m+1)\frac{(\nu_k+1)(\nu_k+2)}{2}$ linearen Gleichungen keineswegs mehr linear unabhängig sind.

Aber gesetzt auch, man hätte — vielleicht auf indirectem Wege — Lösungssysteme $\varphi_i^{(k)}(\overbrace{\mu_0, \mu_1, \mu_2}^{\nu_k})$ von den niedrigsten Graden ν_k gefunden, und mit ihrer Hülfe ein System von $d-1$ rational unabhängigen Identitäten $'(10)$ aufgestellt, und daraus wieder beliebige $\varphi_i(\overbrace{\mu_0, \mu_1, \mu_2}^{\nu})$ nach Analogie von $(12)'$ componirt:

$$'(12)' \qquad \tau\varphi_i(\overbrace{\mu_0, \mu_1, \mu_2}^{\nu}) = \sum_{k=2}^{k=d} \varphi_i^{(k)}(\overbrace{\mu_0, \mu_1, \mu_2}^{\nu_k})\ \alpha_i(\overbrace{\mu_0, \mu_1, \mu_2}^{\nu-\nu_k}),$$

so liefert allerdings die Substitution willkürlicher ganzer Functionen α_i (von den bezeichneten Dimensionen) immer brauchbare „erzeugende" Functionen φ_i der Dimension ν, aber einmal ist die Anzahl der von den α_i mitgeführten willkürlichen Constanten, wie die Rechnung zeigt, ganz besondere Fälle ausgenommen, immer grösser als die thatsächliche Mannigfaltigkeit der erzeugenden Zerlegungen vom Grade ν, und dann ergiebt die obige Einsetzung der α_i stets nur eine gewisse Classe der existirenden $\varphi_i(\overbrace{\mu_0, \mu_1, \mu_2}^{\nu})$: die fehlenden entstehen erst mit Hülfe gewisser Functionen $\alpha_i(\overbrace{\mu_0, \mu_1, \mu_2}^{\nu-\nu_k+\varrho})$, und sind an einen, nicht zu vermeidenden Factor $\tau(\overbrace{\mu_0, \mu_1, \mu_2}^{\varrho})$ gebunden.

Diese Schwierigkeiten wachsen beim Uebergange zu den Zerlegungen $'I$ beträchtlich.

Trotzdem sind die soeben namhaft gemachten Hindernisse der Art, dass sie bei Anwendung schärferer Methoden überwunden werden könnten, und es wäre damit nicht ausgeschlossen, zu Ergebnissen zu gelangen, die mit denen der §§ I—VI die wesentlichsten Züge gemein haben.

Aber es kommt, sobald wir über die ursprünglichen Identitäten einen Schritt hinausgehen, Etwas principiell Neues dazu; es wird die Adjunction von Irrationalitäten erforderlich.

Dies wird bei den oben als Beispiel gewählten Zerlegungen I sofort deutlich, wenn wir etwa, der Einfachheit wegen, $d = 2$ annehmen, sodass die Coefficienten der Potenzen von λ in dem, rechterhand von II stehenden Factor $\Phi^{m-2}(\lambda;\ \overbrace{\mu_0, \mu_1, \mu_2}^{\nu-1})$ nur noch von den homogenen μ_0, μ_1, μ_2 abhängen.

Dann giebt es*), wie bekannt, immer gewisse constante, irrationale Werthsysteme der μ_0, μ_1, μ_2, für die jene Coefficienten *unbestimmt*, nämlich von der Form „$\alpha\mu + \beta$“ werden, wo μ variabel ist. Die dementsprechenden Zerlegungen, sowie alle die weiteren, die hervorgehen, wenn man μ wiederum durch eine rationale Function eines neuen Parameters μ' ersetzt, sind von „irrationalem Charakter.“

Solche irrationale Reducibilität tritt um so häufiger auf, je grösser die Anzahl der Factoren ist, in die eine vorgelegte ganze Function $F^{m}(\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots) = \sum u_i f_i^{m}(\lambda)$ zerfallen soll.

Wird endlich diese Anzahl so gross, dass für

$$F^{m}(\lambda) = F_1^{\pi_1}(\lambda)\, F_2^{\pi_2}(\lambda) \ldots F_q^{\pi_q}(\lambda), \tag{37}$$

wo

$$\pi_1 \leqq \pi_2 \leqq \pi_3 \leqq \cdots \pi_{q-1} \leqq \pi_q \tag{38}$$

die Summe der $q - 1$ ersten Grade in λ die Zahl d der linear unabhängigen $f_i(\lambda)$ übersteigt:

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{q-1} > d, \tag{39}$$

so sind rein rationale Zerlegungen überhaupt unmöglich.

Indem wir ein näheres Eingehen auf die allgemeinen Zerlegungen bei Seite lassen, wollen wir doch eine sehr umfassende Classe von Zerlegungen III nicht unerwähnt lassen, für die wenigstens die zugehörige ausgezeichnete Zerlegung mit Leichtigkeit hergestellt werden

*) Oder allgemeiner ausgedrückt: ein System von ganzen Functionen von mehr als einer Variabeln kann für gewisse Werthsysteme der Variabeln gleichzeitig verschwinden, ohne dass die Functionen einen Factor gemein haben.

kann. Ordnet man die Factoren $F_1, F_2, \ldots F_q$ wie in (37), nach aufsteigenden Graden in λ, so ist die gemeinte Classe charakterisirt durch die Gleichheit:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{q-1} = d. \tag{40}$$

Versteht man nämlich unter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_d$ willkürliche Werthe von λ, unter D ihr Differenzenproduct, und sind s_i $(i=0,1,\ldots d)$ die (homogenen) elementarsymmetrischen Functionen jener d Grössen, so lautet die gesuchte Zerlegung:

$$\frac{1}{D} f_i(\lambda_1, f_i(\lambda_2, \ldots f_i(\lambda_d) \cdot \begin{vmatrix} f_0(\lambda-\lambda_1) & f_0(\lambda-\lambda_2) & \ldots & f_0(\lambda-\lambda_d) \\ f_1(\lambda-\lambda_1) & f_1(\lambda-\lambda_2) & \ldots & f_1(\lambda-\lambda_d) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_d(\lambda-\lambda_1) & f_d(\lambda-\lambda_2) & \ldots & f_d(\lambda-\lambda_d) \end{vmatrix} \Phi(\lambda_1, \ldots \lambda_d, s_1, \ldots s_d). \tag{41}$$

Diese ist in der That die Quelle aller Zerfällungen (37): man theile zu dem Zwecke die d Werthe λ in $q-1$ Gruppen ein von resp. $x_1, x_2, \ldots x_{q-1}$ Elementen, fasse die Elemente jeder Gruppe sowohl im ersten, wie im zweiten Factor der rechten Seite von (41) zu ihren elementarsymmetrischen Functionen zusammen, und ersetze endlich die letzteren durch irgendwelche ganzen Functionen neuer d Parameter (zwischen denen nachträglich wiederum algebraische Verknüpfungen zugelassen werden können) — dann geht (41) über in (37).

Der Beweis hierfür ist fast wörtlich der in § IV geleistete.

Man kann ohne Mühe die Division mit D linkerhand von (41) wirklich ausführen, sowie andererseits den rechts stehenden Factor Φ selbstständig construiren.

Man entwickele die $f_i(\lambda)$ nach λ:

$$f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^m + a_{i1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_{im} \quad (i=0,1,\ldots d), \tag{42}$$

dann ist die linke Seite von (41) identisch mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02} & \ldots & a_{0,d}, & a_{0,d+1}, & a_{0,d+2} & \ldots & a_{0,m-d} & \ldots & a_{0,m-1}, & a_{0,m}, & f_0(\lambda \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12} & \ldots & a_{1,d}, & a_{1,d+1}, & a_{1,d+2} & \ldots & a_{1,m-d} & \ldots & a_{1,m-1}, & a_{1,m}, & f_1(\lambda \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{d0}, & a_{d1}, & a_{d2} & \ldots & a_{d,d}, & a_{d,d+1}, & a_{d,d+2} & \ldots & a_{d,m-d} & \ldots & a_{d,m-1}, & a_{d,m}, & f_d(\lambda \\ s_0, & s_1, & s_2 & \ldots & s_d, & 0, & 0, & 0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0, & s_1 & s_2 & \ldots s_{d-1}, & s_d & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_0, & s_1 & \ldots s_{d-2}, & s_{d-1}, & s_d & 0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & & 0 & 0 & 0\,0 & s_0 & s_1 \ldots & s_{d-1}, & s_d & 0 \end{vmatrix} \tag{43}$$

Auch dem Factor $\Phi(\overset{m-d,\ m-d}{\lambda,\ s_i})$ in (41) lässt sich die Gestalt einer Determinante geben, nämlich:

$$14)\quad \left|\begin{array}{l}
\alpha_{1,0}s_0 + \alpha_{1,1}s_1 + \cdots + \alpha_{1,d}s_d,\quad \alpha_{1,1}s_0 + \alpha_{1,2}s_1 + \cdots + \alpha_{1,d+1}s_d,\\
\qquad\qquad \cdots, \alpha_{1,m-d}s_0 + \alpha_{1,m-d+1}s_1 + \cdots + \alpha_{1,m}s_d\\
\alpha_{2,0}s_0 + \alpha_{2,1}s_1 + \cdots + \alpha_{2,d}s_d,\quad \alpha_{2,1}s_0 + \alpha_{2,2}s_1 + \cdots + \alpha_{2,d+1}s_d,\\
\qquad\qquad \cdots, \alpha_{2,m-d}s_0 + \alpha_{2,m-d+1}s_1 + \cdots + \alpha_{2,m}s_d\\
\cdots\cdots\cdots

Es sollen nun im Folgenden für die „dreigliedrigen Gruppen“ $F = u_0 f_0(\overset{m}{\lambda}) + u_1 f_1(\overset{m}{\lambda}) + u_2 f_2(\overset{m}{\lambda})$, welche den zunächst*) sich darbietenden Typus ganzer Functionen repräsentiren, und zwar für $m = 2, 3, 4, 5, 6$ bis 9 die Fundamentalsysteme (10) wirklich gebildet werden. Und dies — unter Umgehung der Auflösung linearer Gleichungen — direct**) durch invariantentheoretische Processe.

In der That überzeugt man sich sofort, dass die erzeugenden Zerlegungen wieder in solche von genau derselben Form übergehen, wenn man nicht nur die Variable λ einer binären, sondern auch die $f_i(\overset{m}{\lambda})$ $(i=0, 1, 2)$ einer ternären linearen Substitution unterwirft. Die linken Seiten jener Zerlegungen (5)′ sind demnach *Combinanten* der $f_i(\overset{m}{\lambda})$, und müssen sich demnach mittelst alleiniger Anwendung von Ueberschiebungsprocessen — angewandt auf Formen, welche selbst schon Combinanten der f_i sind — herstellen lassen.

Zum Schlusse wird noch ein allgemeines Reductionsverfahren mitgetheilt, das dazu dient, statt der Fundamentalsysteme einer vorliegenden dreigliedrigen Gruppe vom Grade m (in λ) succ. diejenigen einer $m-2$-gliedrigen Gruppe vom Grade $m-2$, einer $m-4$-gliedrigen vom Grade $m-3$, einer $m-6$-gliedrigen vom Grade $m-4$ u. s. f. zu substituiren. Zur Illustration dienen mit Vortheil die Fälle $m=8, 9$.

Die Functionen $f_i(\lambda)$ schreiben wir in der Form (42):

$$(42) \qquad f_i(\overset{m}{\lambda}) = a_{i0}\lambda^m + a_{i1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_{im} \quad (i=0,1,2);$$

dann besteht das Fundamentalsystem (10) aus zwei erzeugenden Zerlegungen von den resp. Graden $\nu_1, \nu_2 (\nu_1+\nu_2=m)$:

$$(47) \quad \begin{cases} \psi^{(\nu_1)} \equiv f_0(\overset{m}{\lambda})\varphi_0^{(1)}(\overset{\nu_1}{\mu}) + f_1(\overset{m}{\lambda})\varphi_1^{(1)}(\overset{\nu_1}{\mu}) + f_2(\overset{m}{\lambda})\varphi_2^{(1)}(\overset{\nu_1}{\mu}) \\ \qquad \equiv (\lambda-\mu)\Phi^{(1)}(\overset{m-1,\ \nu_1-1}{\lambda,\ \mu}), \\ \psi^{(\nu_2)} \equiv f_0(\overset{m}{\lambda})\varphi_0^{(2)}(\overset{\nu_2}{\mu}) + f_1(\overset{m}{\lambda})\varphi_1^{(2)}(\overset{\nu_2}{\mu}) + f_2(\overset{m}{\lambda})\varphi_2^{(2)}(\overset{\nu_2}{\mu}) \\ \qquad \equiv (\lambda-\mu)\,\Phi^{(2)}(\overset{m-1,\ \nu_2-1}{\lambda,\ \mu}). \end{cases}$$

---

*) Denn die noch niedriger stehenden zweigliedrigen Gruppen $u_0 f_0(\overset{m}{\lambda}) + u_1 f_1(\overset{m}{\lambda})$ werden durch die eine Bemerkung erledigt, dass bei ihnen das Fundamentalsystem aus einer einzigen Zerlegung m^{ten} Grades besteht, deren linke Seite ist:

$$\begin{vmatrix} f_0(\lambda), & f_1(\lambda) \\ f_0(\mu), & f_1(\mu) \end{vmatrix}.$$

**) Um diesen Abschnitt nicht über Gebühr zu verlängern, schlagen wir ein möglichst summarisches Verfahren ein, und lassen eine Reihe von Zwischenbeweisen bei Seite. Uebrigens findet man die meisten derselben — insoweit sie

Es wird sich ergeben, dass ein solches System stets d. h. unabhängig von Ausartungen der $f_i(\lambda)$, existirt.

Fall $m = 2$. $\nu_1 = \nu_2 = 1$.

Hier liefert die Formel (41) unmittelbar:*)

$$(48)\quad \frac{1}{\mu - \lambda_1}|f_i(\lambda),\ f_i(\mu),\ f_i(\lambda_1)| = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & f_0(\lambda) \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & f_1(\lambda) \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & f_2(\lambda) \\ s_0 & s_1 & s_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (\lambda - \mu)\,(\lambda - \lambda_1),$$

die wegen der Willkürlichkeit des Parameters λ_1 die zwei Zerlegungen (47) ($\nu_1 = \nu_2 = 1$) umfasst.

Fall $m = 3$. $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$.

Bezeichnet man die, als binäre Form in λ_1 aufgefasste Bildung:

$$(49)\quad \frac{1}{\mu - \lambda_1}|\overset{3}{f_i}(\lambda),\ \overset{3}{f_i}(\mu),\ \overset{3}{f_i}(\lambda)|$$

mit

$$Q_{\lambda_1^2}(\overset{1}{f_i}(\lambda),\ \overset{3}{\mu}) = Q_{\lambda_1^2} = Q_2 \lambda_1^2 + 2 Q_1 \lambda_1 + Q_0$$

so wird jeder der drei Coefficienten Q die linke Seite einer erzeugenden Zerlegung des Grades (in μ) $\nu = \nu_2 = 2$. Führen wir daher eine zweite quadratische Form in λ_1 mit willkürlich gewählten Coefficienten μ' ein:

$$(50)\quad \mu'_{\lambda_1^2} = \mu_0' \lambda_1^2 - \mu_1' \lambda_1 + \mu_2'$$

so gewinnen wir als allgemeinste Form für $\Psi^{(2)}$ diese:

$$(51)\quad \Psi^{(2)} = (Q_{\lambda_1^2},\ \mu'_{\lambda_1^2})^2 = \mu_0' Q_0 + \mu_1' Q_1 + \mu_2' Q_2.$$

Um zu der einen existirenden Bildung $\Psi^{(1)}$ zu gelangen, leiten wir aus (49) eine weitere Identität ab, indem wir die Thatsache ausdrücken,

---

sich auf die binäre Theorie der „conjugirten" Formen beziehen — im ersten und letzten Capitel meiner Apolaritätsschrift von 1883.

Die eine existirende Fundamentalzerlegung mit zwei unabhängigen Parametern (und einem quadratischen Factor) ist durch die Formeln (41), (43), (44) für $d = 2$ repräsentirt.

*) Die dreireihige Determinante der a darf bekanntlich nicht verschwinden, wenn die $\overset{2}{f_i}(\lambda)$ eigentliche sein sollen. Die Formel (48) ist zugleich als Typus derjenigen Fundamentalzerlegungen (41), für welche $m = d$, aufzufassen. Ein Unterfall dieser letzteren tritt ein, wenn, wie bei der üblichen Anordnung, die $f_i(\lambda)$ die Potenzen selbst sind: dann wird die besagte Determinante gleich Eins, und die Zerlegung wird zu einer trivialen.

lässt die Wurzeln von $Q_{\lambda^2} = 0$ — sie mögen λ_1', λ_2' heissen — zusammen mit ε jedenfalls ein Tripel von Werthen geben, die einer Gleichung dritten Grades von der Gestalt:

(52) $$u_1 f_1(\lambda) + u_2 f_2(\lambda) + u_3 f_3(\lambda) = 0$$

genügen. Nun hat ein solches Tripel die eine und nur die eine) Darstellung

(53) $$a_{\lambda_1' \lambda_2' \varepsilon} = 0$$

zu erfüllen, deren linke Seite aus der einen, zu den $f_i(\lambda)$ „conjugirten" Form

(54) $$a_{\lambda_1' \lambda_2' \varepsilon} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda - \varepsilon} & \frac{1}{\lambda_1' - \varepsilon} & \frac{1}{\lambda_2' - \varepsilon} \\ f_1(\lambda), & f_1(\mu), & f_1(\lambda_1') \\ f_2(\lambda), & f_2(\mu), & f_2(\lambda_1') \end{vmatrix}_{\mu = \lambda_2'}$$

durch zwei Polarisation nach den $\lambda_1', \lambda_2', \mu$ hervorgeht. Und zwar *gilt die Gleichung (53) für jeden Werth von* μ d. h. *es ist auch identisch in* μ

(55) $$(Q_{\lambda_1'^2}, \alpha_{\lambda_1' \lambda_2' \varepsilon})^2 \equiv 0,$$

oder, unter ω eine ganz willkürliche Hülfsgrösse verstanden, es besitzt *die Form* $(Q_{\lambda_1'^2}, \alpha_{\lambda_1' \lambda_2' \omega})^2$ den Factor $\mu - \omega$. Mithin erübrigt, sobald man nachträglich für die Grösse ω das Argument λ_1 selber wählt, die Identität:

(56) $$(Q_{\lambda_1'^2}, \alpha_{\lambda_1' \lambda_2' \varepsilon})^2 \equiv (\lambda_1 - \mu) \Psi^{(1)} \{\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{1}{\mu}\}$$

womit die gesuchte Form $\Psi^{(1)}$ gefunden ist. Denn es kommt ihr der Factor $\lambda - \mu$ wirklich zu, da diesen auch die Form (49), *unabhängig vom Werthe des* λ_1, besitzt, und wir haben:

(56') $$\Psi^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1 - \mu} (Q_{\lambda_1'^2}, \alpha_{\lambda_1' \lambda_2' \varepsilon})^2.$$

Die rechnerische Ausführung der in (55) resp. (56) vorgeschriebenen Ueberschiebung erlaubt eine explicite Darstellung von $\Psi^{(1)}$. Bedient man sich für die ersten Differentialquotienten von α_{μ^2} (54) (nach μ und einer homogenen Variabeln genommen) der Zeichen A_0, A_1, und setzt überdies zur Abkürzung:

(57) $$\{\overset{2}{Q_i}(\mu), \overset{2}{A_0}(\mu)\}^2 = \alpha_{0i} \{\overset{1}{f_i}(\lambda)\}, \quad \{\overset{2}{Q_i}(\mu), \overset{2}{A_1}(\mu)\}^2 = \alpha_{1i} \{\overset{1}{f_i}(\lambda)\}$$
$$(i = 0, 1, 2)$$

so wird die Identität (55) äquivalent mit den Relationen:

(58) $$\alpha_{10} = 0, \ \alpha_{02} = 0, \ \alpha_{00} = \alpha_{11}, \ \alpha_{01} = \alpha_{12}$$

und es kommt:

(59) $$\Psi^{(1)} = \mu \alpha_{00} \{\overset{1}{f_i}(\lambda)\} + \alpha_{01} \{\overset{1}{f_i}(\lambda)\}.$$

Aus den hiermit hergeleiteten Fundamentalzerlegungen (47) setzen sich, wie wir erkannt haben, die erzeugenden von irgend einem Grade ν

in der Weise zusammen, dass man die erste mit einer willkürlichen ganzen Function (von μ) des Grades $\nu - 1$, die zweite mit einer ebensolchen vom Grade $\nu - 2$ multiplicirt, und dann addirt.

Für $\nu = 2$ giebt es noch eine selbstständige Darstellung vermöge der Formel (51), wenn man nur den Coefficienten μ' völlige Variabilität zuspricht.*)

Allgemeiner**) Fall $m = 4$. $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 2$.

Die Entwicklung läuft der soeben zur Ermittelung der Form $\Psi^{(1)}$ vorgenommenen durchaus parallel.

Man bedarf wiederum der Bedingungen, die aussagen, wann vier Werthe λ_1', λ_2', λ_3', μ ein Wurzelquadrupel irgend einer Form der Gruppe:

$$u_0 f_0(\overset{4}{\lambda}) + u_1 f_1(\overset{4}{\lambda}) + u_2 f_2(\overset{4}{\lambda}) \tag{60}$$

constituiren. Diese lauten:

$$\alpha_{\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'\mu} = 0, \quad \beta_{\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'\mu} = 0 \tag{61}$$

wenn α_{λ}^4, β_{λ}^4 irgend zwei, zu allen $f_i(\lambda)$ conjugirte Formen bedeuten. Wir gehen aus von der, (49) zur Seite stehenden Grundbildung:

$$\frac{1}{\mu - \lambda_1} |f_i(\overset{4}{\lambda}), f_i(\overset{4}{\mu}), f_i(\overset{4}{\lambda_1})| = Q_{\lambda_1^3}\{\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{3}{\mu}\} = Q_{\lambda_1^3} \tag{62}$$
$$= Q_3\lambda_1^3 + 3Q_2\lambda_1^2 + 3Q_1\lambda_1 + Q_0,$$

so entstehen als Abbild der Formel (56), die beiden Hülfszerlegungen:

$$\begin{cases} (Q_{\lambda_1^3}, \alpha_{\lambda_1^3})^3 \equiv (\lambda_1 - \mu)\Psi^{(1)}\{\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{2}{\mu}\}, \\ (Q_{\lambda_1^3}, \beta_{\lambda_1^3})^3 \equiv (\lambda_1 - \mu)\Psi^{(2)}\{\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{2}{\mu}\} \end{cases} \tag{63}$$

aus denen, vermöge Einführung zweier homogener Parameter μ_1', μ_2' die linke Seite der ausgezeichneten Zerlegung entsteht:

$$\Psi_1^{(1)}\mu_1' + \Psi_2^{(2)}\mu_2' = \frac{1}{\lambda_1 - \mu}(Q_{\lambda_1^3}, \mu_1'\alpha_{\lambda_1^3} + \mu_2'\beta_{\lambda_1^3})^3. \tag{64}$$

Auch die explicite Darstellung von (69) verläuft, wie oben.

---

*) Es ist ohne Mühe der Nachweis führbar, dass die Q_i (wie auch die analogen Bildungen für höhere m) linear unabhängig sind.

**) Für diesen Fall (desgleichen für $m = 3$) hat sich auch Herr Gross in seiner, demnächst erscheinenden Tübinger Dissertation mit den erzeugenden Zerlegungen niedrigsten Grades beschäftigt, und zwar ausgehend von den in § III besprochenen linearen Gleichungen. Ueberhaupt bietet diese (unter Leitung von Herrn Brill entstandenen) Arbeit eine werthvolle Illustration zu der (in der Einleitung erwähnten) ternären Combinantentheorie der Fälle $m = 3, 4$.

In ihr findet sich auch ein systematischer Ausbau eines gelegentlich von mir verwandten Ränderungsprocesses (s. die zu Formel (91) gemachte Bemerkung).

Seien die ersten Differentialquotienten von α_{λ^3}, β_{λ^3} resp. A_0, A_1; B_0, B_1 und

$$(65)\qquad \{Q_i(\overset{3}{\mu}), A_0(\overset{3}{\mu})\}^3 = \alpha_{0i}, \quad \{Q_i(\overset{3}{\mu}), A_1(\overset{3}{\mu})\}^3 = \alpha_{1i},$$
$$\{Q_i(\overset{3}{\mu}), B_0(\overset{3}{\mu})\}^3 = \beta_{0i}, \quad \{Q_i(\overset{3}{\mu}), B_1(\overset{3}{\mu})\}^3 = \beta_{1i}$$

so fliessen aus (61) die Relationen:

$$(66)\qquad \begin{cases} \alpha_{10}=0,\ \alpha_{00}=\alpha_{11},\ \alpha_{01}=\alpha_{12},\ \alpha_{02}=\alpha_{13},\ \alpha_{03}=0, \\ \beta_{10}=0,\ \beta_{00}=\beta_{11},\ \beta_{01}=\beta_{12},\ \beta_{02}=\beta_{13},\ \beta_{03}=0 \end{cases}$$

und damit das Resultat:*)

$$(67)\quad \Psi_1^{(2)}\mu_1' + \Psi_2^{(2)}\mu_2' = \mu_1'(\mu^2\alpha_{11}+\mu\alpha_{12}+\alpha_{13}) + \mu_2'(\mu^2\beta_{11}+\mu\beta_{12}+\beta_{13}).$$

Zu diesen Darstellungen (64), (67) gesellt sich noch eine für die rechte Seite der in Rede stehenden Identität:

$$(68)\qquad \Psi_1^{(2)}\mu_1' + \Psi_2^{(2)}\mu_2' \equiv (\lambda-\mu)(\Phi_1^{(2)}\mu_1' + \Phi_2^{(2)}\mu_2'),$$

nämlich:

$$(69)\qquad \Phi_1^{(2)}\mu_1' + \Phi_2^{(2)}\mu_2' = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \mu\mu_1' \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \mu_1' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \mu\mu_2' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \mu_2' \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

wo die α, β die Coefficienten der Formen α_{λ^3}, β_{λ^3} bedeuten. In der That kann man die Formeln (61), nachdem statt der λ_1', λ_2', λ_3' die Wurzeln von $Q_{\lambda_i^3}=0$ eingesetzt sind, in das Gewand der einen Proportion kleiden:

$$(70)\quad \{Q_{\lambda_i^3}, A_0(\overset{3}{\lambda_1})\}^3 : \{Q_{\lambda_i^3}, B_0(\overset{3}{\lambda_1})\}^3 : \{Q_{\lambda_i^3}, A_1(\overset{3}{\lambda_1})\}^3 : \{Q_{\lambda_i^3}, B_1(\overset{3}{\lambda_1})\}^3$$
$$= \mu\mu_1' : \mu_1' : \mu\mu_2' : \mu_2'.$$

Aus ihr und der Gleichung $Q_{\lambda_i^3}=0$ eliminire man die Grössen Q_i, so resultirt die, gleich Null gesetzte Determinante (67), eine Gleichung, die ihrer Ableitung gemäss, dasselbe aussagt, wie $\frac{\Psi_1^{(2)}\mu_1' + \Psi_2^{(2)}\mu_2'}{\lambda-\mu}=0$. Demnach können sich die beiden Seiten von (69) nur um einen constanten Factor unterscheiden, der gleich Eins gesetzt werden kann, wenn die, zunächst bloss durch die Gleichungen (61) definirten Formen α_{λ^3}, β_{λ^3} mit geeigneten Factoren multiplicirt werden.**)

---

*) Die Formel (67), wie auch (69) haben auch für beliebiges m ihre Seitenbilder.

**) Dies gestaltet sich des Näheren so. Werden mit $p_{ik}=\Delta_{imn}$ die je aus der l^{ten}, m^{ten} und n^{ten} Verticalreihe der α_{ik} zu bildenden Determinanten bezeichnet,

Trotzdem wir im Vorangehenden bereits durchweg mit Combinanten der $f_i(\lambda)$ operirt haben — es stimmt ja deren System, wie bekannt, mit dem der Formen α_{λ^i}, β_{λ^i} völlig überein — so wollen wir doch dem Wunsche Rechnung tragen, die letzterwähnten Formen, die bei der Herleitung von (64) allein in der Gestalt $\mu_1'\alpha_{\lambda^i} + \mu_2'\beta_{\lambda^i}$ in die Rechnung eintraten, als directe Combinanten der $f_i(\lambda)$ erscheinen zu lassen.

Wir setzen $\mu_1' = 1$ und bedienen uns statt des Parameters μ_2' lieber eines, mit der Variabeln λ gleichberechtigten, ν, sodass:

$$\alpha_{\lambda^i} + \mu_2'\beta_{\lambda^i} \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{\lambda^i} & \alpha_{\nu^i} \\ \beta_{\lambda^i} & \beta_{\nu^i} \end{vmatrix}. \tag{71}$$

Bezeichnet W_{λ^i} die Functionaldeterminante von α_{λ^i}, β_{λ^i}:

$$\begin{vmatrix} \overset{3}{A}_0(\lambda), & \overset{3}{A}_1(\lambda) \\ \overset{3}{B}_0(\lambda), & \overset{3}{B}_1(\lambda) \end{vmatrix} = W_{\lambda^i}, \tag{72}$$

so ist zuvörderst die identische Gleichung

$$4\,W_{\lambda^i} - \left\{ \frac{1}{\lambda - \nu} \begin{vmatrix} \alpha_{\lambda^i} & \alpha_{\nu^i} \\ \beta_{\lambda^i} & \beta_{\nu^i} \end{vmatrix} \right\}_{\lambda=\nu} \equiv 0 \tag{73}$$

zu constatiren, die sich auch so schreiben lässt:

$$4(W_{\lambda^i\nu^i})_{\lambda=\nu} - \left\{ \frac{1}{\lambda - \nu} \begin{vmatrix} \alpha_{\lambda^i} & \alpha_{\nu^i} \\ \beta_{\lambda^i} & \beta_{\nu^i} \end{vmatrix} \right\}_{\lambda=0} \equiv 0. \tag{73'}$$

Mithin enthält die linke Seite von (73') unter der Voraussetzung $\lambda \gtrless \nu$, da sie dann zudem in λ, ν symmetrisch ist, den Factor $(\lambda - \mu)^2$. Der verbleibende Factor ist linear und symmetrisch in λ, ν und vom ersten Grade in den Determinanten der Matrix:

---

so sind diese, wie man weiss, den $\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{vmatrix}$ proportional. Wir greifen nun aus der Schaar $(\alpha_{\lambda^i} + k\beta_{\lambda^i})$ folgende zwei heraus, und wählen diese als die im Texte benutzten Formen α_{λ^i}, β_{λ^i}:

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda^i} = p_{r0} - 4\lambda p_{r1} + 6\lambda^2 p_{r2} - 4\lambda^3 p_{r3} + \lambda^4 p_{r4}, \\ \beta_{\lambda^i} = p_{s0} - 4\lambda p_{s1} + 6\lambda^2 p_{s2} - 4\lambda^3 p_{s3} + \lambda^4 p_{s4}, \end{cases}$$

wo r, s irgend zwei der Zahlen 0, 1, ... 4 bedeuten. Dann wird:

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{vmatrix} = p_{rs}\,p_{ik}$$

und der linken Seite von (69) wäre dann noch, wie die Coefficientenvergleichung zeigt, der Factor $\frac{1}{p_{rs}}$ vorzusetzen.

$$(74) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix}.$$

Nun giebt es nur eine Combinante von $\alpha_{\lambda^\varkappa}$, $\beta_{\lambda^\varkappa}$, zweiten Grades in λ, die sich der letzterwähnten Eigenschaft erfreut (in den $\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_k \end{vmatrix}$ linear zu sein), nämlich:

$$(75) \qquad (\alpha_{\omega^\varkappa\lambda},\ \beta_{\omega^\varkappa\lambda})^3 = P_{\lambda^\varkappa}$$

wo links die beiden, in der Hülfsgrösse ω cubischen binären Formen $\alpha_{\omega^\varkappa\lambda}$, $\beta_{\omega^\varkappa\lambda}$ dreimal überschoben sind.

Der gesuchte Factor weicht daher nur um einen Zahlenfactor, der sich als $\frac{8}{5}$ herausstellt, von der Polarenbildung $P_{\lambda\nu}$ ab, und wir haben:

$$(76) \qquad \frac{1}{\lambda-\nu}\begin{vmatrix} \alpha_{\lambda^\varkappa} & \alpha_{\nu^\varkappa} \\ \beta_{\lambda^\varkappa} & \beta_{\nu^\varkappa} \end{vmatrix} \equiv 4\, W_{\lambda^\varkappa\nu^\varkappa} - \frac{8}{5} P_{\lambda\nu}(\lambda-\nu)^2.$$

Hier sind aber die rechts figurirenden Stammformen W_{λ^6}, P_{λ^2} die beiden Gordan'schen*) „Elementarcombinanten" (sechsten resp. zweiten Grades in λ) der $\alpha_{\lambda^\varkappa}$, $\beta_{\lambda^\varkappa}$, oder, was jetzt dasselbe ist, der $f_i(\lambda)$. Dies ist die gewünschte Darstellung.

Endlich kommt auch der Formel (51) ihr Analogon zu: ist $\nu'_{\lambda_1^\varkappa}$ eine binäre cubische Form mit willkürlichen Coefficienten; so wird die linke Seite für die erzeugenden Zerlegungen dritten Grades (in μ) hergestellt durch die Ueberschiebung:

$$(77) \qquad \Psi^{(3)} \equiv (Q_{\lambda_1^\varkappa},\ \nu'_{\lambda_1^\varkappa})^3,$$

ohne dass man dazu der Kenntniss des Fundamentalsystems bedarf.

Der Ausnahmefall $m = 4$: $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 3$.

Die Ableitung der Formel (69) für die Fundamentalzerlegung zweiten Grades ist augenscheinlich an die Bedingung geknüpft, dass das Eintreten des Ausnahmefalles:

$$(78) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix}^{**}) = 0$$

*) Math. Annalen, Band V. „Ueber Combinanten."

**) Die Invariante Δ ist leicht zusammensetzbar aus zwei anderen unmittelbar gegebenen Combinantinvarianten, nämlich der Discriminante $\Pi = \frac{1}{2}(P\,P')^2$ von (75) und der sechsten Ueberschiebung $(W\,W')^6$ von (72); man erhält

$$60\Delta = 40(W\,W')^6 - \Pi.$$

vermieden wird. Dies würde nämlich aussagen, dass es ein Tripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von Werthen gäbe, das den Gleichungen

(61)' $$\alpha_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mu} = 0, \quad \beta_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mu} = 0$$

für jedes μ genügte d. h. dass sich in der Gruppe (60) zwei Formen mit einem gemeinsamen Factor dritten Grades $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ vorfänden. Dann existirt aber eine erzeugende Zerlegung ersten Grades (und umgekehrt) von der Form:

(79) $$\Psi^{(1)} \equiv \{v_0 f_0(\lambda) + v_1 f_1(\lambda) + v_2 f_2(\lambda)\} - \mu\{w_0 f_0(\lambda) + w_1 f_1(\lambda) + w_2 f_2(\lambda)\}$$
$$\equiv (\lambda - \mu)\{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\}$$

wo die v_i, w_i Constante sind, die aus der Bedingung (78) heraus zu ermitteln sind. *Eigentliche* erzeugende Zerlegungen zweiten Grades (in μ) können jetzt nicht mehr bestehen, denn sie müssen in Folge des Hülfssatzes (B) in § III von der Zerlegung (79) rational abhängig, und somit geliefert sein durch:

(80) $$\Psi^{(2)} \equiv \Psi^{(1)}\{(\mu_2' - \alpha) - \varkappa\mu(\mu_2' - \beta)\}$$

wo α, β, $\varkappa$ willkürliche Constanten sind.

Demnach bedürfen wir zum Aufbau des Fundamentalsystems noch einer erzeugenden Zerlegung dritten Grades. Eine solche ist uns durch die Formel (77) gegeben, sobald wir unter den ν' beliebig, aber fest gewählte Grössen verstehen.

Es würde nur noch erübrigen, nachzuweisen, wie man zu der Zerlegung (79) gelangt. Aber dieser Nachweis ist im Obigen bereits implicite enthalten, denn in dem Moment, wo die Invariante (78) verschwindet, spaltet sich die Form (64) in die zwei Factoren (80), wo die Coefficienten des in $\mu_2'\mu$ bilinearen Factors, wie leicht zu berechnen, den ersten Minoren irgend einer Verticalreihe von (78) proportional sind.

Im Hinblick auf das Folgende (i. e. den Fall $m = 7$) bemerken wir, dass die Bedingung (78) auch als das Criterium dafür definirt werden kann, dass die Formen α_{λ^4}, β_{λ^4} als erste Polaren einer Form fünften Grades darstellbar sind. Die wirkliche Bildung der Zerlegung (79) findet man dann auf pag. 70.

Den Einzelbeweis, dass eine weitere Degeneration der $f_i(\lambda)$ — wenn sie nur „eigentliche" ganze Functionen bleiben — auf den Bestand des Fundamentalsystems $\nu_1 = 1, \nu_2 = 3$ ohne Einfluss bleibt, wollen wir der Kürze halber unterdrücken. Der leitende Gedanke desselben ist bei $m = 5$ geschildert.

Allgemeiner Fall $m = 5$. $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$.

Die erzeugenden Zerlegungen dritten Grades erwachsen durch denselben Process, der für $m = 3, 4$ die des ersten resp. zweiten Grades lieferte.

Zum Ausgange dient die Form:

$$(81) \qquad Q_{\lambda_1^5} = \frac{1}{\lambda_1 - \mu} \left| f_i(\overset{5}{\lambda}),\ f_i(\overset{5}{\mu}),\ f_i(\overset{5}{\lambda_1}) \right|.$$

Die zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen bilden gleichfalls eine dreigliedrige Gruppe von der Form:

$$(82) \qquad v_0 \varphi_0(\overset{5}{\lambda}) + v_1 \varphi_1(\overset{5}{\lambda}) + v_2 \varphi_2(\overset{5}{\lambda}) = v_{\lambda^5}.$$

Dann kommt:

$$(83) \qquad \frac{1}{\lambda_1 - \mu} (Q_{\lambda_1^5},\ v_{\lambda_1^5})^4 = \Psi^{(3)}\{f_i(\overset{1}{\lambda}), \overset{3}{\mu};\ \overbrace{v_0, v_1, v_2}^{1}\} = \Psi^{(3)}.$$

Jedes speciell herausgegriffene Werthsystem der Parameter v macht (83) zur linken Seite einer Fundamentalzerlegung $\nu_2 = 3$.

Wir gehen über zu der einen (nach Formel (5) existirenden) Zerlegung $\nu_1 = 2$. Diese muss jedenfalls in der vollständigen Schaar (83) der Zerlegungen dritten Grades mitenthalten sein d. h. es muss möglich sein, die v_k als lineare ganze Functionen eines Hülfsparameters ν so — und zwar auf nur eine Art — zu bestimmen:

$$(84) \qquad v_k = v_k(\overset{1}{\nu}) \quad (k = 0, 1, 2)$$

dass $\Psi^{(3)}$ durch $\mu - \nu$ theilbar wird, und sich damit — nach vollzogener Division — in die gesuchte Form $\Psi^{(2)}$ verwandelt:

$$(85) \qquad \frac{1}{\mu - \nu} \Psi^{(3)}\{f_i(\overset{1}{\lambda}), \overset{3}{\mu}, v_k(\overset{1}{\nu})\} = \Psi^{(2)}\{f_i(\overset{1}{\lambda}), \overset{2}{\mu}\} \cdot \mathsf{P}^*)$$

bis auf einen, von den noch unbekannten Coefficienten der $v_k(\nu)$ abhängigen Factor P.

Zu dem Behuf ordnen wir die Form $\Psi^{(3)}$ (83) nach den willkürlich gedachten v an, ersetzen aber zugleich — was für die Ausführung der Rechnung von durchaus wesentlichem Belang sein wird — die $f_i(\lambda)$ vor der Hand durch beliebige Grössen x_i, und schreiben somit:

$$(86) \qquad \Psi^{(3)}\{\overset{1}{x_i}, \overset{3}{\mu};\ v_k\} \equiv v_0 V_0(\overset{3}{\mu};\ \overset{1}{x_i}) + v_1 V_1(\overset{3}{\mu};\ \overset{1}{x_i}) + v_2 V_2(\overset{3}{\mu};\ x_i).$$

Dann stimmt die eben angesetzte Aufgabe vollkommen überein mit der früher für $m = 3$ gelösten, nemlich der Aufstellung der dies-

*) Die wirkliche Ausführung der Rechnung ergiebt, dass die Division der linken Seite von (85) mit P *nur* unter der Voraussetzung möglich ist, dass die $f_i(\lambda)$ zuvor durch andere Grössen x_i ersetzt werden, v. Formel (92).

bezüglichen Fundamentalzerlegung ersten Grades (nur dass die V_i jetzt noch variable Grössen x_i enthalten). Wir haben demnach die zu den $V_i(\overset{3}{\mu})$ conjugirte Form zu bilden, dies sei:

$$A_{\mu^3} = A(\overset{3}{\mu}; \overset{3}{x_i}) \tag{87}$$

sowie die damals mit $Q_{\lambda_1^2}$, jetzt etwa mit $\Omega_{\mu_1^2}$ bezeichnete:

$$\frac{1}{\nu - \mu_1} \left| V_k(\overset{3}{\mu}),\ V_k(\overset{3}{\nu}),\ V_k(\overset{3}{\mu_1}) \right| \equiv \Omega_{\mu_1^2}\left\{ V_k(\overset{3}{\mu}), \overset{2}{\nu} \right\} \equiv \Omega_{\mu_1^2}(\overset{3}{\mu}, \overset{2}{\nu}; \overset{3}{x_i}) \tag{88}$$

(wo zwei neue Hülfsparameter ν, μ_1 auftreten), dann dürfen wir ohne Weiteres die Formel (56) heranziehen, und erkennen, dass die Bildung:

$$\frac{1}{(\mu_1 - \nu)(\mu - \nu)} (\Omega_{\mu_1^2}, A_{\mu_1^3})^2 = (\overset{2}{\mu}, \overset{6}{x_i}) \tag{89}$$

in zwei Factoren $(\overset{2}{\mu}, \overset{1}{x_i})$ und $(\overset{5}{x_i})$ zerfallen muss, deren erster die gesuchte Form $\Psi^{(2)}$ ist.

Wir wissen nemlich, dass die Functionen $V_k(\overset{3}{\mu}; \overset{1}{x_i})$ in (83) einzeln den Factor $\mu - \lambda$ aufweisen, sobald die x_i durch die $f_i(\lambda)$ ersetzt werden. Dann aber würde die Form (87) mit der dritten Potenz von $(\mu - \lambda)$ proportional werden, und damit, wie eine wirkliche Ausrechnung der rechten Seite von (56) lehrt, die Form $(\overset{2}{\mu}, \overset{6}{x_i})_{x_i = f_i(\lambda)}$ in (89) in λ *identisch* verschwinden. Nun giebt es aber nur eine Combinante der $f_i(\lambda)$, die eine Reihe ternärer Variabler x_i enthält und für $x_i = f_i(\lambda)$ identisch in λ verschwindet, nemlich das Resultat der Elimination von λ und ϱ aus den drei Gleichungen:

$$\varrho x_i = f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^5 + a_{i1}\lambda^4 + \cdots + a_{i5} \quad (i = 0, 1, 2), \tag{90}$$

$$\mathsf{P}(\overset{5}{x_i}), \tag{91}$$

in den x_i vom fünften Grade. Diese Grösse P*) muss somit in der linken Seite von (89) aufgehen, zudem aber der Rest, wie die Herleitung aus (86) erklärt, für $x_i = f_i(\lambda)$ und $\lambda = \mu$ identisch verschwinden i. e. (bis auf eine Constante) mit der gesuchten Form $\Psi^{(2)}$ zusammenfallen:

$$\left\{ \frac{\dfrac{1}{\mu_1 - \nu} \cdot \dfrac{1}{\mu - \nu} (\Omega_{\mu_1^2(x_i)}, A_{\mu_1^3(x_i)})^2}{\mathsf{P}(\overset{5}{x_i})} \right\}_{(x_i = f_i(\lambda))} = \Psi^{(2)}\left\{ \overset{2}{\mu}, \overset{1}{f_i(\lambda)} \right\}. \tag{92}$$

*) Dies Eliminationsresultat $\mathsf{P}(x_i)$ habe ich gelegentlich („Apolarität" § 7) für irgend ein m vermöge eines eigenthümlichen Ränderungsprocesses als (ternäre) Combinantenbildung dargestellt.

Einer Controlle lässt sich dies Ergebniss unterwerfen durch die Abzählung des Grades, bis zu dem die Coefficienten a der $f_i(\lambda)$ resp. die aus ihnen zu bildenden dreireihigen Determinanten — sie seien kurz mit dem Zeichen Δ gekennzeichnet — ansteigen.

Wir haben dabei zu beachten, dass die in analoger Weise dem System der $\varphi_i(\lambda)$ (82) zugehörigen, gleichfalls dreireihigen Determinanten den Δ proportional sind und geradezu diesen gleich gesetzt werden können.

Dies liefert sofort die Zahl 18 als Grad der linken Seite von (89) in den a, und ebenso 10 als denjenigen von P (91).

Mithin verbleibt für die Factoren der $f_i(\lambda)$, rechts von (92), der Grad 8 (in den a). Eben dieser würde sich aber auch bei der *directen* Berechnung von $\Psi^{(2)}$ nach der Methode des § III ergeben haben: man hätte 8 lineare Gleichungen (mit Coefficienten, die in den a vom ersten Grade sind) nach 9 (homogenen) Unbekannten aufzulösen gehabt.

In den Gleichungen (83), (92) ist das Fundamentalsystem ($\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$) niedergelegt.

Auch hier kann, wie bei $m = 4$, die Besonderheit eintreten, dass irgend zwei der Formen $u_0 f_0^{5}(\lambda) + u_1 f_1^{5}(\lambda) + u_2 f_2^{5}(\lambda)$ einen Factor dritten Grades in λ gemein haben: dies hat indessen jetzt nur zur Folge, dass die Form (92) die Gestalt annimmt:

$$\Psi^{(2)}\{\overset{1}{\mu}(\pi)^2, \overset{1}{f_i}(\lambda)\}, \tag{93}$$

d. h. dass der Parameter als rationale, quadratische Function eines anderen, π, linear auftritt. Die weiteren, aus dem Fundamentalsystem zu ziehenden Consequenzen bleiben jedoch von der Modification (93) unberührt.

Der Ausnahmefall*) $m = 5$. $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$.

Dieser Fall ist das natürliche Analogon zu der bei $m = 4$ untersuchten Ausartung $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 3$. Wir können uns daher kurz fassen. An die Stelle des Criteriums (78) tritt hier das des Verschwindens aller fünfreihigen Determinanten, die sich aus den Coefficienten der ersten Differentialquotienten von den, zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten, Formen $\varphi_i(\lambda)$ (82) herstellen lassen. Es sagt aus, dass diese $\varphi_i(\lambda)$ zweite Polaren einer binären Form 7^{ten} Grades sind, und andererseits, dass der Gruppe der $f_i(\lambda)$ zwei Formen mit dem nemlichen biquadratischen Factor in λ angehören.

*) Gerade dieser kommt beim „allgemeinen" Falle $m = 9$ zur Verwendung.

Eine Fundamentalzerlegung vierten Grades wird, bei beliebig, aber fest angenommenen Coefficienten ν' geliefert durch:

$$(94) \qquad (Q_{\lambda_i^0}, \nu'_{\lambda_i^0})^4 = \Psi^{(4)}\{\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{4}{\mu}\}.$$

Anderntheils spaltet sich aus der Form (92) ein in μ linearer Factor ab, und es entsteht:

$$(95) \qquad \Psi^{(3)}\{\overset{2}{\mu}; \overset{1}{f_i}(\lambda)\} = (\mu\alpha + \beta)\,\Psi^{(1)}\{\overset{1}{\mu}; \overset{1}{f_i}(\lambda)\}.$$

Hier repräsentirt gleichzeitig das rechts stehende $\Psi^{(1)}$ die eine Fundamentalzerlegung ersten Grades, dagegen das linker Hand befindliche $\Psi^{(3)}$, unter α, β variable Grössen verstanden, alle (uneigentlichen) erzeugenden Zerlegungen zweiten, und ebenso

$$(96) \qquad \Psi^{(3)}\{\overset{3}{\mu}; f_i(\lambda)\} = (\mu^2\alpha + \mu\beta + \gamma)\,\Psi^{(1)}\{\overset{1}{\mu}; \overset{1}{f_i}(\lambda)\}$$

bei variablen α, β, γ alle solche, gleichfalls uneigentlichen, Zerlegungen dritten Grades.

Dass weitere Ausartungen nicht möglich sind, d. h. dass man stets mit einem der beiden Fundamentalsysteme ($\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$) resp. ($\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$) ausreicht, davon kann man sich durch folgende Erwägung überzeugen.

Entweder existirt eine erzeugende Zerlegung zweiten oder ersten Grades. Würde nun im ersten Falle keine „eigentliche" Zerlegung dritten Grades (i. e. eine solche, die sich nicht durch Abspaltung eines Factors auf eine Zerlegung niedrigeren Grades reducirt) vorhanden sein, mithin nur uneigentliche, so könnten diese aus der angenommenen Zerlegung zweiten Grades nur vermöge Hinzutreten eines in μ linearen Factors hervorgehen, und damit nur eine einfach unendliche Schaar constituiren, während doch die Mannigfaltigkeit dieser Schaar mindestens eine zweifache sein muss. (Nach Formel (7')).

In derselben Weise zeigt man, dass, wenn neben einer Zerlegung ersten Grades solche vom vierten nur als uneigentliche existirten, die Mannigfaltigkeit der letzteren (anstatt mindestens eine vierfache) nur eine dreifache wäre.

Demnach ist die Verwendung von Fundamentalsystemen, für die die Summe der Grade (in μ) die Zahl Fünf übersteigt, nicht von Nöthen.

Allgemeiner Fall $m = 6$. $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 3$.

Wir verfahren, wie bei der Zerlegung zweiten Grades für $m = 5$. Die zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen constituiren jetzt eine viergliedrige Gruppe von der Gestalt:

$$(97) \qquad v_0\varphi_0(\overset{6}{\lambda}) + v_1\varphi_1(\overset{6}{\lambda}) + v_2\varphi_2(\overset{6}{\lambda}) + v_3\varphi_3(\overset{6}{\lambda}) = v_{\lambda^6}.$$

Ist dann wieder:

$$(98) \qquad Q_{\lambda_1^5} = \frac{1}{\lambda - \mu} \mid f_i(\overset{6}{\lambda}),\ f_i(\overset{6}{\mu}),\ f_i(\overset{6}{\lambda_1}) \mid,$$

so haben wir, für willkürliche v, in:

$$(99) \qquad \frac{1}{\lambda_1 - \mu} (Q_{\lambda_1^5}, v_{\lambda_1^5})^5 = \Psi^{(4)} \left\{ \overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{4}{\mu};\ \overbrace{v_0, v_1, v_2, v_3}^{1} \right\} = \Psi^{(4)}$$

die erzeugenden Zerlegungen vierten Grades.

Wir vertauschen nunmehr die $f_i(\lambda)$ mit beliebigen Grössen x_i, un entwickeln $\Psi^{(4)}$ nach den $v_k (k = 0, 1, 2, 3)$:

$$(100) \qquad \Psi^{(4)} \{ \overset{1}{x_i}, \overset{4}{\mu}, \overset{1}{v_k} \}$$

$$\equiv v_0 V_0(\overset{4}{\mu}; \overset{1}{x_i}) + v_1 V_1(\overset{4}{\mu}; \overset{1}{x_i}) + v_2 V_2(\overset{4}{\mu}; \overset{1}{x_i}) + v_3 V_3(\overset{4}{\mu}; \overset{1}{x_i}).$$

Hier sind, um die erzeugenden Zerlegungen dritten Grades an de Tag zu fördern, die v_k als lineare Functionen eines Parameters ν:

$$(101) \qquad v_k = v_k(\overset{1}{\nu})$$

so zu wählen, dass aus $\Psi^{(4)}$ der Factor $\mu - \nu$ heraustritt.

Diese Aufgabe haben wir für irgend vier (linear unabhängige Functionen $V_k(\overset{4}{\mu})$ in der vorhergehenden Arbeit vollständig gelös (vgl. den 29ten Annalenband, besonders pg. 457).

Wir stellen, wie dort, zuvörderst die Grundform auf:

$$(102) \qquad \frac{1}{\nu - \mu_2} \mid V_k(\overset{4}{\mu}),\ V_k(\overset{4}{\mu_1}),\ V_k(\overset{4}{\nu}),\ V_k(\overset{4}{\mu_2}) \mid \equiv \Omega_{\mu_2^3}.$$

Ferner die zu den $V_k(\mu)$ conjugirte Form, sie heisse:

$$(103) \qquad A_{\mu^4}.$$

Dann resultirt vermöge der Operationen:

$$(104) \qquad \frac{1}{(\mu_2 - \nu)(\mu_1 - \nu)(\mu - \nu)} (\Omega_{\mu_2^3}, A_{\mu_2^4})^3 = (\overset{3}{\mu}, \overset{3}{\mu_1}; \overset{8}{x_i})$$

eine ganze Function, vom dritten Grade in μ und μ_1, und vom achte in den (homogenen) x_i, die aus den im correspondirenden Falle $m = 4$ dargelegten Gründen in zwei Factoren zerfällt. Einer derselben, er sei

$$(105) \qquad \mathsf{P}(\overset{6}{x_i})$$

ist das Resultat der Elimination von λ und ϱ aus den Gleichungen:

$$(106) \qquad \varrho x_i = f_i(\overset{6}{\lambda}) \ (i = 0, 1, 2).$$

Dividirt man mit ihm die linke Seite der Formel (104), so sind wir nunmehr zur linken Seite des Systems der erzeugenden Zerlegungen dritten Grades wirklich gelangt, nämlich:

$$(107)\qquad \left\{ \frac{1}{(\mu_2 - \nu)(\mu_1 - \nu)(\mu - \nu)} \frac{(\Omega_{\mu_1^4}, A_{\mu_2^4})^3}{\overset{6}{\mathsf{P}}(x_i)} \right\}_{(x_i = f_i(\lambda))}$$

$$= \Psi^{(3)}\{\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{3}{\mu}, \overset{1\ 3}{\pi}(\mu_1, \overset{1}{f_i}(\lambda))\},$$

wo, wie es sein muss, ein linearer Parameter π eingeht, der selbst wieder von den $f_i(\lambda)$ (im ersten Grade) und von μ_1 (im dritten Grade) rational abhängt.

Ausnahmefälle $m = 6$.

Die für $m = 4$, und $m = 5$ gewonnenen Erfahrungen lassen sich unmittelbar verwerthen.

Gestützt auf § III, erkennt man, dass das Verschwinden einer in den a_{ik} neunreihigen Determinante (die also als Combinantinvariante der $f_i(\lambda)$ in den dreireihigen Determinanten der a_{ik} bis zur dritten Dimension ansteigt) nothwendig und hinreichend ist, damit eine erzeugende Zerlegung zweiten Grades existirt. Diese fliesst aus der rechten Seite von (107), indem sich dann ein in μ und π bilinearer Factor von selbst abspaltet. Mit irgend einer der Formen (99) zusammen macht sie ein Fundamentalsystem ($\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$) aus.

Eine Zerlegung ersten Grades tritt dann und nur dann ein, wenn in der Schaar $u_0 f_0(\lambda) + u_1 f_1(\lambda) + u_2 f_2(\lambda)$ zwei Formen mit gemeinschaftlichem Factor fünfter Ordnung (in λ) vorkommen. Dann sind die $\varphi_i(\lambda)$ in (97) die dritten Polaren einer Form neunten Grades, und es verschwindet die Matrix der Coefficienten, die den ersten Differentialquotienten der $\varphi_i(\lambda)$ angehören (u. umg.). Dann tritt aus der Zerlegung zweiten Grades wiederum ein, in μ linearer Factor heraus (oder auch aus der Zerlegung dritten Grades (107) ein solcher, der in π vom ersten, in μ vom zweiten Grade ist). Mit der so resultirenden Zerlegung ersten Grades ist eine solche vom fünften zu combiniren, die man, ganz wie früher, durch fünfmalige Ueberschiebung der Form $Q_{\lambda_1^4}$ (98) mit irgend einer binären Form fünften Grades in λ_1 herstellt.

Mit diesen drei Fundamentalsystemen ($\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 3$), ($\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$), ($\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 5$) kommt man, so lange die $f_i(\lambda)$ eigentliche Formen bleiben, immer aus, was, wie bei $m = 5$, bewiesen wird.

Die Fälle $m = 7, 8, 9$.

Allgemeines Reductionsverfahren bei beliebigem m.

Wir verzichten auf eine endgültige Abrundung der zu $m = 7$ (8, 9.. gehörigen Formeln, da diese ohnedies bei Fortsetzung des bisher ein geschlagenen Weges allmählich an Durchsichtigkeit einbüssen, un ziehen es vor, diesen Fall so zu erörtern, dass daraus unmittelbar ei Verfahren abgelesen werden kann, für ein beliebig grosses m die Au gabe, die beiden niedrigsten erzeugenden Zerlegungen durch Comb nantenbildungen darzustellen, auf die entsprechenden für successiv abnehmende Grade m (wenn auch eventuell grössere Gliederanzahl d bezüglichen Gruppen*) zurückzuführen.

Wir setzen der Reihe nach an:

$$(108) \qquad Q_{\lambda_1^6} = \frac{1}{\lambda - \mu} \left| f_i(\overset{7}{\lambda}),\ f_i(\overset{7}{\mu}),\ f_i(\overset{7}{\lambda_1}) \right|,$$

ferner die Schaar der zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen:

$$(109) \qquad v_0 \varphi_0(\overset{7}{\lambda}) + v_1 \varphi_1(\overset{7}{\lambda}) + v_2 \varphi_2(\overset{7}{\lambda}) + v_3 \varphi_3(\overset{7}{\lambda}) + v_4 \varphi_4(\overset{7}{\lambda}) = v_\lambda{}^7,$$

sodann die sechste Ueberschiebung:

$$(110) \qquad \frac{1}{\lambda_1 - \mu} (Q_{\lambda_1^6}, v_{\lambda_1^7})^6 = \Psi^{(5)} \{ f_i(\overset{1}{\lambda}),\ \overset{5}{\mu},\ \overset{1}{v_k} \}. \quad (k = 0, 1, \ldots, 4$$

Damit steht uns die vierfach lineare Schaar der erzeugenden Ze legungen fünften Grades (allgemein die $m - 3$-fach lineare der Ze legungen vom Grade $m - 2$) zur Verfügung.

Wir setzen x_i für $f_i(\lambda)$ und ordnen (110) nach den v_k an:

$$(111) \qquad \Psi^{(5)} = \sum_{k=0}^{k=4} v_k V_k(\overset{5}{\mu};\ \overset{1}{x_i}),$$

(wo sich die V_k wiederum als linear unabhängig erweisen) und suche für diese fünfgliedrige Gruppe von Formen fünften Grades die e zeugenden Zerlegungen ersten Grades, eine Aufgabe, deren Behandlu der für die Formengruppen (100) angegebenen durchaus parallel läu

Wir haben die eine, zu den $V_k(\overset{5}{\mu})$ conjugirte Form, sie sei bezeichnet m

$$(112) \qquad A_{\mu^5}$$

über die Grundform:

*) Diese Gruppen sind dann nicht mehr die allgemeinen ihrer Art, sonde repräsentiren einen ausgezeichneten, oben bei $m = 4, 5$ erwähnten *Ausnahmefa* die conjugirte Gruppe ist stets die der (ersten, zweiten u. s. f.) Polaren ein gewissen binären Form, die bei festgehaltenem m dieselbe bleibt. Dies ist d Grund, weshalb, wie die Formeln bei $m = 7, 8, 9$ zeigen, die Invariantenrechnu wirklich ausführbar ist.

$$(113)\quad \frac{1}{\nu-\mu_3}\,|\,V_k^{5}(\mu),\ V_k^{5}(\mu_1),\ V_k^{5}(\mu_2),\ V_k^{5}(\nu),\ V_k^{5}(\mu_3)\,| = \Omega_{\mu_3}^{4}$$

viermal zu überschieben, und das Resultat von den Factoren $\mu_3-\nu$; $\mu_2-\nu$, $\mu_1-\nu$, $\mu-\nu$ zu befreien, so entsteht eine ganze Function der μ, μ_1, μ_2, x_i von dem Aussehen:

$$(114)\quad \frac{1}{(\mu_3-\nu)(\mu_2-\nu)(\mu_1-\nu)(\mu-\nu)}\,(\Omega_{\mu_3}^{4}, A_{\mu_3}^{4})^4 = (\overset{4}{\mu};\ \overset{4}{\mu_1},\ \overset{4}{\mu_2};\ \overset{10}{x_i}),$$

die ausserdem wieder die zu (91), (105) analog gebildete Form

$$(115)\quad \mathsf{P}(\overset{7}{x_i})$$

als Theiler besitzen muss. Von dem Quotienten, der die Gestalt hat:

$$(116)\quad (\overset{4}{\mu};\ \overset{1}{x_i};\ \overset{4}{\mu_1},\ \overset{4}{\mu_2},\ \overset{2}{x_i})$$

lässt sich nachweisen, dass er sich aus drei Formen von dem Typus $(\overset{4}{\mu_i};\overset{1}{x_i})$ linear und homogen zusammensetzt (mit Coefficienten, die als *ganz willkürliche* Parameter anzusehen sind), und übrigens für $x_i = f_i(\lambda)$ durch $\lambda-\mu$ theilbar wird.

Damit ist die zweifach lineare Schaar der erzeugenden Zerlegungen ersten Grades für die Gruppe (111), und mit ihr die correspondirende Schaar der Zerlegungen vierten (allgemein $m-3^{\text{ten}}$) Grades für die ursprüngliche Gruppe $u_0 f_0(\lambda) + u_1 f_1(\lambda) + u_2 f_2(\lambda)$ thatsächlich ermittelt; wir schreiben:

$$(117)\quad \begin{cases} \left\{ \dfrac{1}{(\mu_3-\nu)(\mu_2-\nu)(\mu_1-\nu)(\mu-\nu)}\,\dfrac{(\Omega_{\mu_3}^{4}, A_{\mu_3}^{4})^4}{\mathsf{P}(\overset{7}{x_i})} \right\}_{(x_i=f_i(\lambda))} \\ \qquad = \sum_{r=0}^{r=2} w_r\, W_r(\overset{4}{\mu};\ \overset{1}{f_i}) = \Psi^{(4)}(\overset{4}{\mu};\ \overset{1}{f_i}(\lambda)), \\ w_r = w_r(\overset{4}{\mu_1},\ \overset{4}{\mu_2},\ \overset{2}{x_i}). \end{cases}$$

Nunmehr fehlt uns nur noch die eine erzeugende Zerlegung dritten Grades der vorgelegten Gruppe. Diese muss wiederum äquivalent sein mit einer erzeugenden Zerlegung ersten Grades der Gruppe (117):

$$(117')\quad w_0\, W_0(\overset{4}{\mu};\ \overset{1}{x_i}) + w_1\, W_1(\overset{4}{\mu};\ \overset{1}{x_i}) + w_2\, W_2(\overset{4}{\mu};\ \overset{1}{x_i}).$$

Dies kommt demnach auf den bei $m=4$ untersuchten *Ausnahmefall* zurück: die zu den $W_r(\overset{4}{\mu})$ conjugirten Formen vierten Grades (in μ) können nicht beliebig sein, sondern müssen sich mit den ersten Polaren einer gewissen Form fünfter Ordnung (in μ) decken.

Dies verhält sich in der That so, und zwar ist die letzterwähnte Form, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, *keine andere, als die in* (112) *aufgestellte.* Um dann die Formel (64) (und darauf (80)) anzuwenden, verschaffen wir uns die Form (62):

$$(118) \qquad \frac{1}{\nu - \mu_1} \mid W_r(\overset{4}{\mu}),\ W_r(\overset{4}{\nu}),\ W_r(\overset{4}{\mu_1}) \mid = Q_{\mu_1^3}$$

und vollziehen die dreimalige Ueberschiebung:

$$(119) \qquad \frac{1}{\nu - \mu_1} (Q_{\mu_1^3},\ A_{\mu_1^2 \omega})^3 = (\overset{2}{\nu},\ \overset{1}{\omega},\ \overset{1}{W_r(\mu)}) = (\nu - \mu)\,(\overset{3}{\mu},\ \overset{1}{\nu},\ \overset{1}{\omega},\ \overset{8}{x_i})$$
$$= (\nu - \mu)\,\overset{7}{\mathsf{P}}(x_i)\,(\overset{3}{\mu},\ \overset{1}{x_i};\ \overset{1}{\nu},\ \overset{1}{\omega}),$$

wo ω eine ganz willkürliche Grösse bedeutet, und rechter Hand der Reihe nach die beiden Factoren $\nu - \mu$ und $\overset{7}{\mathsf{P}}(x_i)$ (115) herausgezogen sind. Aber gemäss der Formel (80) muss noch ein letzter, in ν, ω bilinearer Factor von selbst heraustreten, und man bemerkt unschwer, dass dieser im vorliegenden Falle (wo man für die Formen α_{λ^3}, β_{λ^3} (61) die ersten Differentialquotienten der Form A_{μ^3} genommen hat) *in die Differenz* $\nu - \omega$ *übergeht.*

Wählt man daher nachträglich die willkürliche Grösse ω gleich μ_1, so geht Formel (119) in die folgende über, welche die gesuchte Zerlegung dritten Grades definitiv angiebt:

$$(120) \qquad \left\{ \frac{\frac{1}{(\nu - \mu_1)^2 (\nu - \mu)} (Q_{\mu_1^3},\ A_{\mu_1^3})^3}{\overset{7}{\mathsf{P}}(x_i)} \right\}_{(x_i = f_i(\lambda))} = \Psi^{(3)} \{ \overset{3}{\mu};\ \overset{1}{f_i(\lambda)} \},$$

wo die Formen A, Q, P aus (112), (118), (115) zu entnehmen sind.

Wir fügen schliesslich noch die bezüglichen Formeln für die Fälle $m = 8, 9$ hinzu, um die Allgemeingültigkeit des Verfahrens auf diese Art, wie wir meinen, besser in's Licht zu stellen, als durch eine in Worten abzufassende Erläuterung, die im günstigsten Falle doch schwerfällig genug klingen würde. Der Kürze halber bedienen wir uns ganz der bei $m = 7$ angewandten Bezeichnungen (mit unbedeutenden Modificationen), und führen auch die den dortigen Formeln correspondirenden unter je demselben Zahlzeichen, nur mittelst eines resp. zweier Accente markirt, an.

Allgemeiner Fall $m = 8$. $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 4$.

$$(110)' \qquad \frac{1}{\lambda_1 - \mu} (Q_{\lambda_1^7},\ v_{\lambda_1^6})^7 = \Psi^{(6)} \{ \overset{1}{f_i(\lambda)},\ \overset{6}{\mu},\ \overset{1}{v_k} \} \quad (k = 0, 1, \cdots, 5),$$

$$(111)' \qquad \Psi^{(6)}(\overset{6}{\mu},\ \overset{1}{x_i},\ \overset{1}{v_k}) = \sum_{k=0}^{k=5} v_k\, \overset{6}{V_k}(\mu,\ \overset{1}{x_i}),$$

(112)′ A_{μ^6}, conjugirt zu den $V_k^{(6,1)}(\mu, x_i)$,

(113)′ $\frac{1}{\nu-\mu_4}\,|\,V_k^{(6)}(\mu), V_k^{(6)}(\mu_1), V_k^{(6)}(\mu_2), V_k^{(6)}(\mu_3), V_k^{(6)}(\nu), V_k^{(6)}(\mu_4)| = \Omega_{\mu_4^6}$,

(115)′ $\mathsf{P}^{(8)}(x_i)$, Resultat der Elimination von λ aus:

$$x_0 : x_1 : x_2 = f_0^{(8)}(\lambda) : f_1^{(8)}(\lambda) : f_2^{(8)}(\lambda),$$

(114)′ $$\left[\frac{1}{(\mu_4-\nu)(\mu_3-\nu)(\mu_2-\nu)(\mu_1-\nu)(\mu-\nu)}\cdot\frac{1}{\mathsf{P}^{(8)}(x_i)}(\Omega_{\mu_4^6}, A_{\mu_4^6})^5\right]_{(x_i=f_i(\lambda))}$$
$$= \Psi^{(5)}\{\mu; f_i^{(5,1)}(\lambda)\}\ ^*),$$

(117)′ $$\begin{cases}\Psi^{(5)}(\mu; x_i) = \sum_{r=0}^{r=3} w_r W_r^{(5,1)}(\mu, x_i),\\ w_r = w_r^{(5,5,5,3)}(\mu_1, \mu_2, \mu_3; x_i).\end{cases}$$

Die $W_r^{(5,1)}(\mu, x_i)$ sind conjugirt zu den ersten Polaren von A_{μ^6} (112)′.

(118)′ $\frac{1}{\nu-\mu_2}\,|\,W_r^{(5)}(\mu), W_r^{(5)}(\mu_1), W_r^{(5)}(\nu), W_r^{(5)}(\mu_2)| = Q'_{\mu_2^6}\ (r=0,1,2,3)$,

(119)′ $$\left\{\frac{1}{(\nu-\mu_2)^2(\nu-\mu_1)(\nu-\mu)}\cdot\frac{1}{\mathsf{P}^{(8)}(x_i)}(Q'_{\mu_2^6}, A_{\mu_2^6})^4\right\}_{(x_i=f_i(\lambda))}$$
$$= \Psi^{(4)}\left\{\mu, f_i^{(4,1)}(\lambda); \pi\{\mu_1, f_i^{(4,1)}(\lambda)\}\right\},$$

wo mit π ein linearer Parameter bezeichnet ist, der selbst eine rationale Function von den Veränderlichen μ und $f_i(\lambda)$ zu den Graden 4 resp. 1 ist.

Diese Formen $\Psi^{(4)}$ liefern (für irgend zwei Werthe von μ) das Fundamentalsystem $\nu_1 = 4,\ \nu_2 = 4$.

Allgemeiner Fall $m = 9.\ \ \nu_1 = 4,\ \nu_2 = 5.$

(110)″ $\frac{1}{\lambda_1-\mu}(Q_{\lambda_1^5}, v_{\lambda_1^5})^8 = \Psi^{(7)}\{f_i^{(1)}(\lambda), \mu^{(7)}, v_k^{(1)}\}\ (k=0,1,\ldots,6)$,

(111)″ $$\Psi^{(7)}(x_i^{(1)}, \mu^{(7)}, v_k^{(1)}) = \sum_{k=0}^{k=6} v_k V_k^{(7,1)}(\mu; x_i),$$

(112)″ A_{μ^7}, conjugirt zu den $V_k^{(7,1)}(\mu; x_i)$,

*) Die $f_i(\lambda)$ treten zwar *explicite* von höherem, als erstem, nämlich vom vierten Grade in $\Psi^{(5)}$ auf, gehen aber bis zum dritten Grade in die Parameter w ein. Das Analoge gilt für die Formel (114)″.

(113)″ $\frac{1}{\nu-\mu_5} \mid V_k(\mu), V(\mu_1), V_k(\mu_2), V_k(\mu_3), V_k(\mu_4), V_k(\nu), V_k(\mu_5)\mid = \Omega_{\mu_5}$,

(115)″ $\mathsf{P}(x_i)$, Resultat der Elimination von λ aus

$$x_0 : x_1 : x_2 = f_0(\lambda) : f_1(\lambda) : f_2(\lambda),$$

(114)″ $$\left\{\frac{1}{(\mu_5-\nu)(\mu_4-\nu)(\mu_3-\nu)(\mu_2-\nu)(\mu_1-\nu)(\mu-\nu)}\cdot\frac{1}{\mathsf{P}(x_i)}(\Omega_{\mu_5}, A_{\mu_5})^6\right\}_{(x_i=f_i(\lambda))}$$
$$= \Psi^{(6)}\{\mu; f_i(\lambda)\},$$

(117)″ $$\begin{cases}\Psi^{(6)}(\mu; x_i) = \sum_{r=0}^{r=4} w_r W_r(\mu; x_i),\\ w_r = w_r(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; x_i).\end{cases}$$

Die $W_r(\mu; x_i)$ sind conjugirt zu den ersten Polaren von $A_{\mu'}$ (112)″.

(118)″ $$\frac{1}{\nu-\mu_3} \mid W_r(\mu), W_r(\mu_1), W_r(\mu_2), W_r(\nu), W_r(\mu_3)\mid$$
$$= Q''_{\mu_3} \quad (r = 0, 1, \ldots, 4),$$

(119)″ $$\left\{\frac{1}{(\nu-\mu_3)^2(\nu-\mu_2)(\nu-\mu_1)(\nu-\mu)}\cdot\frac{1}{\mathsf{P}(x_i)}(Q''_{\mu_3}, A_{\mu_3})^5\right\}_{(x_i=f_i(\lambda))}$$
$$= \Psi^{(5)}\{\mu, f_i(\lambda); z_s\{\mu_1, \mu_2, f_i(\lambda)\}\} \quad (s = 0, 1, 2).$$

Man entwickele die rechts figurirende dreigliedrige Gruppe fünften Grades nach den willkürlichen Parametern z_s:

(121) $$\Psi^{(5)}(\mu; x_i) = z_0 Z_0(\mu; x_i) + z_1 Z_1(\mu; x_i) + z_2 Z_2(\mu; x_i).$$

Um für diese Gruppe die sicher existirende erzeugende Zerlegung ersten Grades zu eruiren, beachte man, dass das Criterium für eine Ausnahmezerlegung dieser Art in Wirklichkeit erfüllt ist, indem ein näheres Eingehen zeigt, dass die zu den Formen $Z_s(\mu)$ conjugirten mit den zweiten Polaren der Form $A_{\mu'}$ (112)″ übereinstimmen. Sei daher:

(81)‴ $$Q'''_{\mu_1^4} = \frac{1}{\mu_1-\nu} \mid Z_s(\mu), Z_s(\nu), Z_s(\mu_1)\mid \quad (s = 0, 1, 2)$$

die zu (81) analoge Form, so geht die Formel (83) — nach Contraction der bezüglichen Einzelprocesse — über in die letzte der von uns gesuchten:

(122) $$\left\{\frac{1}{(\mu_1-\nu)^3}\frac{1}{(\mu-\nu)}\cdot\frac{1}{\mathsf{P}(x_i)}(Q'''_{\mu_1^4}, A_{\mu_1'})^4\right\}_{(x_i=f_i(\lambda))} = \Psi^{(4)}\{\mu, f_i(\lambda)\}.$$

Hier lässt sich die rechte Seite auch direct aus der Form $A_{\mu'}$ (112″) allein ableiten. Bedeutet nämlich $C(\overset{4}{\mu}, \overset{28}{x_i})$ die Sylvester'sche Canonizante der Form $A_{\mu'}$, so kommt:

$$\Psi^{(4)}\{\overset{4}{\mu}; \overset{1}{f_i(\lambda)}\} = \left\{\frac{1}{P^{\overset{9}{3}}(x_i)} \cdot C(\overset{4}{\mu}; \overset{28}{x_i})\right\}_{(x_i = f_i(\lambda))} . \tag{123}$$

Das Fundamentalsystem $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 5$ besteht aus der letzteren Form $\Psi^{(4)}$ (123) nebst irgend einer der Formen $\Psi^{(5)}$ (119)″.

Die Formeln (111)″, (114)″, (119)″ liefern zugleich sämmtliche erzeugenden Zerlegungen der respectiven Grade 7, 6, 5.

Auch auf die Ausnahmefälle ist die für $m = 5$ dargelegte Behandlung (ganz unabhängig von dem besonderen Werthe von m) ohne Weiteres übertragbar: man gewinnt das Resultat*), *dass die Gesammtheit der Fundamentalsysteme* (ν_1, ν_2), *für welche* $\nu_1 + \nu_2 = m$, *den gestellten Anforderungen gerade genügt, ohne dass man über sie hinauszugehen brauchte.*

Wir haben in der vorliegenden Arbeit die Lösung unseres Problemes seinem Charakter conform rein algebraisch vorgetragen: möge zum Schlusse ein Wort über ihren geometrischen Inhalt gestattet sein.

Beschränken wir uns dabei auf die eben völlig erledigten dreigliedrigen Gruppen, insofern sie die in den §§ I bis VI erörterte Theorie eines rational bekannten Linearfactors illustriren. Dann lehrt eine aufmerksame Vergleichung mit den Anschauungen, die wir in der voraufgegangenen Abhandlung über die Erzeugung der rationalen

*) Der entsprechende Nachweis für vier — und mehrgliedrige Gruppen stösst auf Schwierigkeiten, die ich zur Zeit noch nicht überwunden habe. Davon zwar kann man sich auch jetzt überzeugen, dass nicht beide Seiten einer erzeugenden Zerlegung, die für irgend ein System von (allgemeinen oder speciellen) Coefficienten der $f_i(\lambda)$ existirt, *bei noch weiter gehender Specialisirung* der letzteren, (gleichzeitig) *identisch* verschwinden. Aber die das Postulat (9) in § III begleitende Anmerkung übt nunmehr erst ihre Kraft aus. Denn hat man beispielsweise bei vier $f_i(\lambda)$ irgend zwei unabhängige Zerlegungen ersten Grades, während die nächst höhere erst vom Grade $\geq m - 1$ sein möge (sodass $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 > m$ ausfällt), so fliesst aus der linearen Combinirung jener zwei einfachsten Zerlegungen mittelst willkürlicher ganzer Functionen (in μ) vom Grade $m - 3$ freilich nur eine ∞^{2m-5} lineare Schaar von (uneigentlichen) Zerlegungen des Grades $m - 2$, während deren wirkliche Mannigfaltigkeit, wie leicht abzuzählen, mindestens gleich $2m - 4$ sein müsste. *Aber es wäre erst noch der Beweis zu erbringen*, dass man entweder durch die angegebene Combinirung *sämmtliche* gemeinten Zerlegungen erhält, oder aber, dass bei Benützung multiplicativer Functionen von einem Grade $> m - 3$, die Mannigfaltigkeit $2m - 5$ thatsächlich *nicht erhöht wird.*

Wegen dieser Bedenken haben wir im Texte die Forderung (9) *als eine beschränkende Voraussetzung* proclamirt.

Raumcurven vierter Ordnung niedergelegt haben, dass wir das folgende geometrische Problem implicite mitgelöst haben:

„Gegeben sei vermöge der Gleichungen:

$$x_0 : x_1 : x_2 = f_0^{(m)}(\lambda) : f_1^{(m)}(\lambda) : f_2^{(m)}(\lambda)$$

eine ebene, nicht zerfallende, rationale Curve R m^{ter} Ordnung; gesucht werden sämmtliche algebraischen Classencurven (von irgend einem Geschlechte), die zur Punktcurve R in einer solchen mehr-eindeutigen Correspondenz stehen, dass jede Tangente der Classencurve durch den ihr zugeordneten Punkt von R hindurchgeht.“

Tübingen, im März 1887.

Note on Kiepert's L-equations, in the Transformation of Elliptic Functions.

By

A. Cayley of Cambridge.

It appears by comparison with Klein's paper „Ueber die Transformation u. s. w." Math. Annalen t. XIV (1878), see p. 144, that Kiepert's L made use of in the Memoir „Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen" Math. Ann. t. 26 (1886), pp. 369—454, is in fact the square of the multiplier, „für das durch $\sqrt[12]{\Delta}$ normirte Integral", viz. considering the general quartic function $(a, \ldots)(x, 1)^4 = (a, b, c, d, e)(x, 1)^4$, and the transformed function $(a_1, \ldots)(y, 1)^4$, then we have

$$\frac{L^2 \sqrt[12]{\Delta}\, dx}{\sqrt{(a, \ldots)(x, 1)^4}} = \frac{\sqrt[12]{\Delta_1}\, dy}{\sqrt{(a_1, \ldots)(y, 1)^4}},$$

where if

$$I = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$J = ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3,$$

and similarly I_1, J_1 are the invariants of the two functions, then Δ, Δ_1 are the discriminants

$$\Delta = I^3 - 27J^2, \qquad \Delta_1 = I_1^3 - 27J_1^2,$$

and the γ_2, γ_3 of Kiepert's equations are

$$\gamma_2 = I \div \sqrt[3]{\Delta}, \quad \gamma_3 = J \div \sqrt{\Delta},$$

whence

$$\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 = 1.$$

In particular, if the forms are

$$1 - x^2 \cdot 1 - k^2x^2, \text{ and } 1 - y^2 \cdot 1 - \lambda^2y^2,$$

and if as usual $k = u^4$, $\lambda = v^4$, and M is the multiplier for the form

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 \cdot 1 - k^2x^2}} = \frac{M\, dy}{\sqrt{1 - y^2 \cdot 1 - \lambda^2y^2}}$$

then we have

$$I = \frac{1}{12}(1+14u^8+u^{16}),$$

$$J = \frac{1}{216}(1+u^8)(1-34u^8+u^{16}),$$

$$\Delta = \frac{1}{16}u^8(1-u^8)^4, \quad \Delta_1 = \frac{1}{16}v^8(1-v^8)^4,$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{6}\sqrt[3]{2}\,\frac{1+144u^8+u^{16}}{u^{\frac{8}{3}}(1-u^8)^{\frac{4}{3}}}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{54}\,\frac{(1+u^8)(1-34u^8+u^{16})}{u^4(1-u^8)^3},$$

and thence

$$L^2 = \frac{v^{\frac{2}{3}}(1-v^8)^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{2}{3}}(1-u^8)^{\frac{1}{3}}}\,\frac{1}{M},$$

which last equation is the expression for L^2 in terms of the Jacobian symbols u, v, M.

As an easy verification in a particular case, suppose $n = 5$. We have here

$$L^2 = \frac{v^{\frac{2}{3}}(1-v^4)^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{2}{3}}(1-u^4)^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{M}, \quad M = \frac{v(1-uv^3)}{v-u^3}, \quad \left(= \frac{v+u^3}{5u(1+u^3v)}\right),$$

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2-v^2) + 4uv(1-u^4v^4) \doteq 0,$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{6}\sqrt[3]{2}\,\frac{1+14u^4+u^{16}}{u^{\frac{8}{3}}(1-u^4)^{\frac{4}{3}}},$$

and it should be possible, by eliminating u, v, M, to deduce hence the L-equation

$$L^{12} + 10L^6 - 12\gamma_2 L^2 + 5 = 0. \quad \text{(Kiepert, p. 428).}$$

It does not seem in any wise easy to do this in the case of an arbitrary modulus, but writing the modular equation in the form

$$(u^2-v^2)(u^4+6u^2v^2+v^4) + 4uv(1-u^4v^4) = 0,$$

we satisfy this by

$$uv - 1 = 0, \quad u^4 + 6u^2v^2 + v^4 = 0,$$

or say by

$$v = \frac{1}{u}, \quad u^8 + 6u^4 + 1 = 0,$$

and the equation may be verified for this particular modulus.

We have

$$1 + 14u^8 + u^{16} = 48u^8, \quad (1-u^8)^2 = 32u^8,$$

and consequently

$$\gamma_2 = \frac{1}{6}\sqrt[3]{2}\cdot\frac{48u^8}{u^{\frac{8}{3}}(32u^8)^{\frac{2}{3}}}, = \frac{1}{2\cdot 3}\,2^{\frac{1}{3}}\,\frac{2^4\cdot 3u^8}{u^{\frac{8}{3}}\cdot 2^{\frac{10}{3}}\cdot u^{\frac{16}{3}}} = 1. \text{ (whence also } \gamma_3 = 0);$$

Moreover

$$M = \frac{\frac{1}{u} - \frac{u}{u^4}}{\frac{1}{u} - u^5} = -\frac{1}{u^2}\,\frac{1-u^2}{1-u^6} = \frac{-1}{u^2(1+u^2+u^4)},$$

and thence

$$L^2 = \frac{\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1}{u^6}\right)^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}(1-u^6)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{M} = \frac{(u^6-1)^{\frac{1}{2}}}{u^4(1-u^6)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{M} = -\frac{1}{u^4 M},$$

that is

$$L^2 = 1 + u^2 + u^{-2}.$$

But we have

$$u^4 = -3 + 2\sqrt{2},$$

and thence

$$u^2 = i(1-\sqrt{2}), \quad u^{-2} = i(1+\sqrt{2}),$$

and

$$L^2 = 1 + 2i,$$

whence

$$L^{12} + 10L^6 - 12\gamma_2 L^2 + 5$$
$$= (117+44i) + 10(-11-2i) - 12(1+2i) + 5 = 0,$$

or the L-equation is satisfied.

Cambridge, 14. March 1887.

Note on the Jacobian Sextic Equation.

By

A. Cayley of Cambridge.

In the Jacobian sextic equation

$$(z-a)^6 - 4a(z-a)^5 + 16b(z-a)^3 - 4c(z-a) + 5b^2 - 4ac = 0,$$

if A, B, C, D, E, F are the square roots (each with a determinate sign) of the roots $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_\infty$ of the equation, and if ε be an imaginary fifth root of unity, such that $\varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 = \sqrt{5}$, then we have between the square roots a system of three linear equations

$$\begin{aligned} 0 &= -A\sqrt{5} + B + C + D + E + F, \\ 0 &= B + \varepsilon^3 C + \varepsilon D + \varepsilon^4 E + \varepsilon^2 F, \\ 0 &= B + \varepsilon^2 C + \varepsilon^4 D + \varepsilon E + \varepsilon^3 F, \end{aligned}$$

see Brioschi's Funzioni Ellittiche (Milan 1880) third appendix, p. 402.

The sextic equation is irreducible, and there is thus nothing to distinguish any one square root from any other square root. But in the foregoing system of equations A is distinguished from the other square roots, hence the system must be one of 6 Systems, wherein the place occupied by A is occupied by A, B, C, D, E, F respectively. Observe however that the letters being square roots, it may very well happen, and (as will appear) it does in fact happen that the passage from the first to another system implies a change of sign in certain of the letters A, B, C, D, E, F.

The selection of one of the square roots as $= A$, does not determine which of the other square roots shall be $= B, C, D, E, F$ respectively: and in fact each system of equations may be represented in 10 different forms: viz. by multiplying the second and third equations by $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ respectively, we obtain four new forms: we have thus five forms: and then in each of them transposing the second and third equations, we have five other forms: we have thus in all 10 forms.

Write $ABCDEF$ to denote the foregoing system of three equations

$$\begin{aligned} 0 = &- A\sqrt{5} + B + C + D + E + F, \\ 0 = &\quad B + \varepsilon^3 C + \varepsilon D + \varepsilon^4 E + \varepsilon^2 F, \\ 0 = &\quad B + \varepsilon^2 C + \varepsilon^4 D + \varepsilon E + \varepsilon^4 F, \end{aligned}$$

the 10 forms of the system are

$ABCDEF$	$ABFEDC$
$ACDEFB$	$ACBFED$
$ADEFBC$	$ADCBFE$
$AEFBCD$	$AEDCBF$
$AFBCDE$	$AFEDCB$

where observe that the five forms in the same column are connected by cyclical substitutions on the last five letters; and that the forms in each line are connected by two inversions of the last four letters.

It is hardly necessary to remark that $ABFEDC$ means the system of three equations

$$\begin{aligned} 0 = &- A\sqrt{5} + B + F + E + D + C, \\ 0 = &\quad B + \varepsilon^3 F + \varepsilon E + \varepsilon^4 D + \varepsilon^2 C, \\ 0 = &\quad B + \varepsilon^2 F + \varepsilon^4 E + \varepsilon D + \varepsilon^3 C \end{aligned}$$

which are the same with the equations of the original form; and similarly that $ACDEFB$ means the system of three equations

$$\begin{aligned} 0 = &- A\sqrt{5} + C + D + E + F + B, \\ 0 = &\quad C + \varepsilon^3 D + \varepsilon E + \varepsilon^4 F + \varepsilon^2 B, \\ 0 = &\quad C + \varepsilon^2 D + \varepsilon^4 E + \varepsilon F + \varepsilon^3 B, \end{aligned}$$

where the first equation is the same with the first equation, and the second and third equations only differ by a factor from the second and third equations respectively, of the original form. And similarly as regards the others of the 10 forms.

I say that we have a second system $BCAF\overline{D}\overline{E}$ (where $\overline{D}$, $\overline{E}$ mean $-D$, $-E$ respectively): in fact this denotes the system of three equations

$$\begin{aligned} 0 = &- B\sqrt{5} + C + A + F - D - E, \\ 0 = &\quad C + \varepsilon^3 A + \varepsilon F - \varepsilon^4 D - \varepsilon^2 E, \\ 0 = &\quad C + \varepsilon^2 A + \varepsilon^4 F - \varepsilon D - \varepsilon^3 E, \end{aligned}$$

which are deducible from the original three equations.

We have in fact the identities

$$\begin{aligned}
-\sqrt{5}\{-B\sqrt{5}+\ C+\ A\ +\ F-\ D-\ E\} \\
=1(B\ +\ C-\ A\sqrt{5}+\ F+\ D+\ E) \\
+2(B\ +\varepsilon^3 C\ +\varepsilon^2 F+\ \varepsilon D+\varepsilon^4 E) \\
+2(B\ +\varepsilon^2 C\ +\varepsilon^3 F+\varepsilon^4 D+\ \varepsilon E),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon-\varepsilon^3+\varepsilon^4)\{\ C+\varepsilon^3 A\ +\ \varepsilon F-\varepsilon^4 D-\varepsilon^2 E\} \\
=\ 1(B+\ C-\ A\sqrt{5}+\ F+\ D+\ E) \\
+(\varepsilon\ +\varepsilon^4)(B+\varepsilon^3 C\ +\varepsilon^2 F+\ \varepsilon D+\varepsilon^4 E) \\
+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)(B+\varepsilon^2 C\ +\varepsilon^3 F+\varepsilon^4 D+\ \varepsilon E),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(1+\varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^4)\{\ C+\varepsilon^2 A\ +\varepsilon^4 F-\ \varepsilon D-\varepsilon^3 E\} \\
=\ 1(B+\ C-\ A\sqrt{5}+\ F+\ D+\ E) \\
+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)(B+\varepsilon^3 C\ +\varepsilon^2 F+\ \varepsilon D+\varepsilon^4 E) \\
+(\varepsilon\ +\varepsilon^4)(B+\varepsilon^2 C\ +\varepsilon^3 F+\varepsilon^4 D+\ \varepsilon E),
\end{aligned}$$

all which identities are at once verified recollecting that

$$1=-\varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^3-\varepsilon^4 \quad \text{and} \quad \sqrt{5}=\varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^3+\varepsilon^4.$$

We can now write down the 6 systems, each of them under its 10 forms: these in fact are

$A\,B\,C\,D\,E\,F$	$A\,B\,F\,E\,D\,C$
$A\,C\,D\,E\,F\,B$	$A\,C\,B\,F\,E\,D$
$A\,D\,E\,F\,B\,C$	$A\,D\,C\,B\,F\,E$
$A\,E\,F\,B\,C\,D$	$A\,E\,D\,C\,B\,F$
$A\,F\,B\,C\,D\,E$	$A\,F\,E\,D\,C\,B$
$B\,C\,A\,F\,\overline{D}\,\overline{E}$	$B\,C\,\overline{E}\,\overline{D}\,F\,A$
$B\,A\,F\,\overline{D}\,\overline{E}\,C$	$B\,A\,C\,\overline{E}\,\overline{D}\,F$
$B\,E\,\overline{D}\,\overline{E}\,C\,A$	$B\,F\,A\,C\,\overline{E}\,D$
$B\,\overline{D}\,\overline{E}\,C\,A\,F$	$B\,\overline{D}\,F\,A\,C\,\overline{E}$
$B\,\overline{E}\,C\,A\,F\,\overline{D}$	$B\,\overline{E}\,\overline{D}\,F\,A\,C$
$C\,D\,A\,B\,\overline{E}\,\overline{F}$	$C\,D\,\overline{F}\,\overline{E}\,B\,A$
$C\,A\,B\,\overline{E}\,\overline{F}\,D$	$C\,A\,D\,\overline{F}\,E\,B$
$C\,B\,\overline{E}\,\overline{F}\,D\,A$	$C\,B\,A\,D\,\overline{F}\,\overline{E}$
$C\,\overline{E}\,\overline{F}\,D\,A\,B$	$C\,\overline{E}\,B\,A\,D\,\overline{F}$
$C\,\overline{F}\,D\,A\,B\,\overline{E}$	$C\,\overline{F}\,\overline{E}\,B\,A\,D$

$D\,E\,A\,C\,\overline{F}\,\overline{B}$	$D\,E\,\overline{B}\,\overline{F}\,C\,A$
$D\,A\,C\,\overline{F}\,\overline{B}\,E$	$D\,A\,E\,\overline{B}\,\overline{F}\,C$
$D\,C\,\overline{F}\,\overline{B}\,E\,A$	$D\,C\,A\,E\,\overline{B}\,\overline{F}$
$D\,\overline{F}\,\overline{B}\,E\,A\,C$	$D\,\overline{F}\,C\,A\,E\,\overline{B}$
$D\,\overline{B}\,E\,A\,C\,\overline{F}$	$D\,\overline{B}\,\overline{F}\,C\,A\,E$
$E\,F\,A\,D\,\overline{B}\,\overline{C}$	$E\,F\,\overline{C}\,\overline{B}\,D\,A$
$E\,A\,D\,\overline{B}\,\overline{C}\,F$	$E\,A\,F\,\overline{C}\,\overline{B}\,D$
$E\,D\,\overline{B}\,\overline{C}\,F\,A$	$E\,D\,A\,F\,\overline{C}\,\overline{B}$
$E\,\overline{B}\,\overline{C}\,F\,A\,D$	$E\,\overline{B}\,D\,A\,F\,\overline{C}$
$E\,\overline{C}\,F\,A\,D\,\overline{B}$	$E\,\overline{C}\,\overline{B}\,D\,A\,F$
$F\,A\,E\,\overline{C}\,\overline{D}\,B$	$F\,A\,B\,\overline{D}\,\overline{C}\,E$
$F\,E\,\overline{C}\,\overline{D}\,B\,A$	$F\,E\,A\,B\,\overline{D}\,\overline{C}$
$F\,\overline{C}\,\overline{D}\,B\,A\,E$	$F\,\overline{C}\,E\,A\,B\,\overline{D}$
$F\,\overline{D}\,B\,A\,E\,\overline{C}$	$F\,\overline{D}\,\overline{C}\,E\,A\,B$
$F\,B\,A\,E\,\overline{C}\,\overline{D}$	$F\,B\,\overline{D}\,\overline{C}\,E\,A$

here as before the superscript line denotes a change of sign, $\overline{A} = -A$, etc.

As to the formation of this table, observe that we have $A\,B\,C\,D\,E\,F$ and $B\,C\,A\,F\,\overline{D}\,\overline{E}$; repeating the substitution, we have

$$A\,B\,C\,D\,E\,F$$
$$B\,C\,A\,F\,\overline{D}\,\overline{E}$$
$$C\,A\,B\,\overline{E}\,\overline{F}\,D$$
$$\overline{A\,B\,C\,D\,E\,F}$$

viz. we have thus the $C\,A\,B\,\overline{E}\,\overline{F}\,D$ which belongs to the third system; but nothing further, for the subsitution is periodic of the third order, and the three forms are merely repeated. But if upon

$$A\,B\,C\,D\,E\,F$$
$$B\,C\,A\,F\,\overline{D}\,\overline{E}$$

we operate successively with the substitutions which change the upper line into the three forms of the first system

$$A\,D\,E\,F\,B\,C \quad A\,E\,F\,B\,C\,D \quad A\,F\,B\,C\,D\,E$$

then the lower line is changed into the three forms

$$D\,E\,A\,C\,\overline{F}\,\overline{B} \quad E\,F\,A\,D\,\overline{B}\,\overline{C} \quad F\,B\,A\,E\,\overline{C}\,\overline{D}$$

which are forms belonging to the fourth, fifth, and sixth systems respectively. By way of verification observe that for instance repeating upon the second line the substitution

$$A\,B\,C\,D\,E\,F$$

in place of

$$D\,E\,A\,C\,\overline{F}\,\overline{B},$$

we obtain

$$C\,\overline{F}\,D\,A\,B\,\overline{E},$$

which is one of the forms of the third system, assumed to have been previously found; and so in other instances.

Reverting to the three equations belonging to the form $ABCDEF$, by subtracting the third from the second equation, we obtain a linear relation between the four square roots C, D, E, F viz. this is

$$0 = (\varepsilon^3 - \varepsilon^2)(C - F) + (\varepsilon - \varepsilon^4)(D - E);$$

and the same equation is obtained by means of the form $ABFEDC$: we thus obtain from the thirty lines of either column of the preceding table, thirty such equations, but obviously the number of such equations should be fifteen, for there can be but one relation between any four square roots C, D, E, F; consequently each equation will be obtained twice; an in fact it is clear that the forms $A\,B\,C\,D\,E\,F$ and $B\,A\,F\,D\,\overline{E}\,C$, and so in general any two forms which begin with the same pair of letters give the same equation. But for greater symmetry I write down the thirty equations in the order in which they are given by the left hand column of the table: the equations are.

$0 = (\varepsilon^3 - \varepsilon^2)$ into	$+ (\varepsilon - \varepsilon^4)$ into
$C - F$	$D - E$
$D - B$	$E - F$
$E - C$	$F - B$
$F - D$	$B - C$
$B - E$	$C - D$
$A + F$	$F + D$
$F - C$	$-D + E$
$-D - A$	$-E - C$
$-E - F$	$C - A$
$C + D$	$A - F$
$A + F$	$B + E$
$B - D$	$-E + F$
$-E - A$	$-F - D$
$-F - B$	$D - A$
$D + E$	$A - B$

$0=(\varepsilon^3-\varepsilon^2)$ into	$+(\varepsilon-\varepsilon^4)$ into
$A+B$	$C+F$
$C-E$	$-F+B$
$-F-A$	$-B-E$
$-B-C$	$E-A$
$E+F$	$A-C$
$A+C$	$D+B$
$D-F$	$-B+C$
$-B-A$	$-C-F$
$-C-D$	$F-A$
$F+B$	$A-D$
$E-B$	$-C+D$
$-C-A$	$-D-B$
$-D-F$	$B-A$
$B+C$	$A-E$
$A+D$	$E+C$

ere it is be observed that adding together the five equations given any one of the systems we obtain the identical result $0=0$.

I write down the 15 equations in a different order, in some cases nging the sign of the whole equation, as follows.

$0=(\varepsilon^3-\varepsilon^2)$ into	$+(\varepsilon-\varepsilon^4)$ into
$A+C$	$B+D$
$B+C$	$A-E$
$A+B$	$C+F$
$D+E$	$A-B$
$B+F$	$A-D$
$A+F$	$B+E$
$A+D$	$C+E$
$C+D$	$A-F$
$E+F$	$A-C$
$A+E$	$D+F$
$B-E$	$C-D$
$F-D$	$B-C$
$E-C$	$F-B$
$D-B$	$E-F$
$C-F$	$D-E$

The first three of these equations, or writing $\lambda = \varepsilon^3 - \varepsilon^2$, $\mu = \varepsilon - \varepsilon^4$, say

$$\lambda(A+C) + \mu(B+D) = 0,$$
$$\lambda(B+C) + \mu(A-E) = 0,$$
$$\lambda(A+B) + \mu(C+F) = 0,$$

constitute the entire System of independent linear relations between the square roots A, B, C, D, E, F. The coefficients λ, μ are such that

$$\lambda^2 - \mu^2 = \lambda\mu \quad (= \varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4, \quad = \sqrt{5})$$

and it is hence easy to verify that the remaining twelve equations can be deduced from these by the elimination of one or two of the square roots A, B, C. For instance, to eliminate A from the first and second equations, multiplying by $-\mu$, λ and adding we obtain

$$(-\lambda\mu + \lambda^2)C + (-\mu^2 + \lambda^2)B - \mu^2 D - \lambda\mu E = 0$$

that is

$$\mu^2 C + \quad \lambda\mu B - \mu^2 D - \lambda\mu E = 0,$$

or finally

$$\lambda(B-E) + \mu(C-D) = 0$$

which is one of the equations. And so again eliminating A from the first an third equations, we find

$$\lambda(B-C) + \mu(C+F-B-D) = 0,$$

that is

$$(\lambda-\mu)(B-C) + \mu(F-D) = 0,$$

or multiplying by λ,

$$\mu^2(B-C) + \lambda\mu(F-D) = 0,$$

that is finally

$$\lambda(F-D) + \mu(B-C) = 0,$$

which is one of the equations.

Cambridge, 21. March 1887.

On the Intersection of Curves.

By

A. Cayley of Cambridge.

It is only recently that I have studied Bacharach's paper „Ueber den Cayley'schen Schnittpunktsatz" Math. Ann. t. 26 (1885) pp. 275—299: his theorem in regard to the case where the δ points lie on a curve of the order $\gamma - 3$ is a very interesting and valuable one, but I consider it rather as an addition than as a correction to my original theorem; and I cannot by any means agree that the method by counting of constants is to be rejected as not trustworthy; on the contrary it seems to me to be the proper foundation of the whole theory; it must of course be employed with due consideration of special cases. I reproduce the theorem in what appears to me the complete form.

Writing with Bacharach $r \gtreqless m$, $r \gtreqless n$, $r \lesseqgtr m+n-3$, $\gamma = m+n-r$, $\delta = \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$, and assuming $n \gtreqless m$, (these equations and inequalities are to be attended to throughout the present paper) I consider two curves of the orders m, n respectively meeting in δ points B, and in $(mn-\delta)$ points A; and I state the theorem as follows:

1°. The $mn - \delta$ points A are in general such that a curve of the order r which passes thro' $mn - \delta - 1$ of these points does not of necessity pass thro' the remaining point; and in this case the general curve of the order r which passes thro' the $mn - \delta$ points A has for its form of equation

$$0 = L_{r-m} P_m + M_{r-n} Q_n$$

(where $P_m = 0$, $Q_n = 0$ are the equations of the given curves and L_{r-m}, M_{r-n} denote functions of the orders $r - m$, $r - n$ respectively) and it thus appears that the curve of the order r thro the $mn - \delta$ points A passes also thro' the δ points B.

2°. If however the δ points B are on a curve of the order $\gamma - 3$, then the $mn - \delta$ points A are a System such that every curve of the order r passing thro' $mn - \delta - 1$ of these points passes thro' the remaining point; and in this case the general curve of the order r which passes thro' the $mn - \delta$ points A has for its form of equation

$$0 = \Omega_r + L_{r-m} P_m + M_{r-n} Q_n,$$

($\Omega_r = 0$ a particular curve thro' the $mn - \delta$ points A, but which does not go thro' any of the points B), and consequently the curve of the order r does not pass thro' any of the points B.

For the proof of the theorem I premise as follows:

A curve of the order r depends upon $\frac{1}{2}r(r+3)$ constants, or to use a convenient expression, its Postulandum is $= \frac{1}{2}r(r+3)$: if the curve has to pass thro' a given point, this imposes a single relation upon the constants, or say the Postulation is $= 1$; similarly if the curve has to pass thro' k given points, this imposes k relations, or say the Postulation is $= k$. The points may be however a special system, for instance they may be such that every curve of the order r which passes thro' $k - 1$ of the points, will pass thro' the remaining point; the Postulation is in this case $= k - 1$; and so in other cases. Assuming the Postulation of the k points to be $= k$, then the Postulandum of a curve of the order r thro' the k points is $= \frac{1}{2}r(r+3) - k$. I stop to remark that the Postulation has reference to the particular curve or other entity in question; thus if in the case of a curve passing thro' k points, the Postulation for a curve of a certain order may be $= k$, and for a curve of a different order it may be less than k.

Considering now as above two given curves of the orders m and n intersecting in the $mn - \delta$ points A and the δ points B, then assuming that the $mn - \delta$ points are not a special System, viz. that their Postulation in regard to a curve of the order r is $= mn - \delta$, the Postulandum of a curve of the order r thro' the $mn - \delta$ points is

$$= \frac{1}{2}r(r+3) - mn + \delta$$

which is

$$= \frac{1}{2}(r-m+1)(r-m+2) + \frac{1}{2}(r-n+1)(r-n+2) - 1,$$

viz. this is identically true when for δ we write its value

$$= \frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2).$$

But we have thro' the $mn - \delta$ points A, a curve

$$L_{r-m} P_m + M_{r-n} Q_n = 0$$

with the proper Postulandum, (viz. L_{r-n} contains $\frac{1}{2}(r-m+1)(r-m+2)$ constants, M_{r-n} contains $\frac{1}{2}(r-n+1)(r-n+2)$ constants, and there is a diminution -1 for the constant which divides out); hence this is the general equation of the curve of the order r thro' the $(mn-\delta)$ points A; and the curve passes thro' the remaining δ points B.

In the case where the δ points B are on a curve of the order $\gamma - 3$ (observe this is a single condition imposed on the δ, $= \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ points, for a curve of the order $(\gamma-3)$ can be drawn thro $\frac{1}{2}\gamma(\gamma-3)$. points) it is to be shown that the Postulation of the $mn-\delta$ points A is $= mn - \delta - 1$; for, this being so, the Postulandum of the curve of the order r thro' the $(mn-\delta)$ points A will be

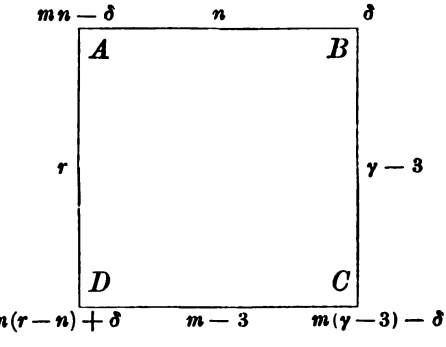
$$= \frac{1}{2} r(r+3) - mn + \delta + 1,$$

and the equation of the curve will no longer be of the foregoing form, but it will be of the form

$$\Omega_r + L_{r-m} P_m + M_{r-m} Q_n = 0,$$

$\Omega_r = 0$ being a particular curve thro' the $mn - \delta$ points A, but which does not pass thro' any of the points B. The proof depends on the theory of Residuation: which for the present purpose may be presented under the following form.

Let $A, B, \ldots$ denote systems of points upon a given Basis-curve, for instance the foregoing curve $P_m = 0$, of the order m. And let $A = ci$ denote that the points A are the complete intersection of the basis curve by some other curve (this implies that the number of the points is $= km$, a multiple of m, and the intersecting curve is then of course a curve of the order k). It is clear that if $A = ci$, and $B = ci$, then also $A + B = ci$. But conversely we have the theorem if $A + B = ci$, and $A = ci$ then also $B = ci$. And we at once deduce the further theorem: if $A + B = ci$, $B + C = ci$, $C + D = ci$, then also $A + D = ci$. For the first and third relations give $A + B + C + D = ci$, and the second relation then gives $A + D = ci$.



Starting now (see the diagram) with the δ points B on a curve of the order $\gamma - 3$, suppose that we have thro' these points the basis-curve $P_m = 0$ of the order m, and another given curve $Q_n = 0$, of the order n; and let these besides meet in the $mn - \delta$ points A. Let the curve of the order $\gamma - 3$ besides meet the basis-curve in the $m(\gamma-3) - \delta$ points C; and thro' these let there be drawn a curve of the order $m - 3$, which besides meets the basis-curve in the $m(r-n) + \delta$ points D. We have here $A + B = ci$, $B + C = ci$, $C + D = ci$; consequently $A + D = ci$, that is the $mn - \delta$ points A and the $m(r-n) + \delta$ points D lie on a curve of the order r. The curve of the order $m - 3$ passes thro' the $m(\gamma-3) - \delta$ points C, its Postulandum is thus

$$= \tfrac{1}{2} m(m-3) - m(\gamma - 3) + \delta$$

which is

$$= \tfrac{1}{2} (r-n+1)(r-n+2).$$

In fact substituting for γ, δ their values $= m + n - r$, and

$$\tfrac{1}{2} (m+n-r-1)(m+n-r-2)$$

this equation is satisfied identically. The System of the $m(r-n) + \delta$ points D thus depends upon $\frac{1}{2}(r-n+1)(r-n+2)$ constants, or say the Postulandum of the points D is $= \frac{1}{2}(r-n+1)(r-n+2)$. It follows that the curve of the order r thro' the $(mn - \delta)$ points A and the $m(r-n) + \delta$ points D *cannot* have an equation of the form

$$L_{r-m} P_m + M_{r-n} Q_n = 0,$$

for the intersections of this curve with the basis-curve $P_m = 0$, are given by the equation $M_{r-n} Q_n = 0$ which contains only the

$$\tfrac{1}{2} (r-n+1)(r-n+2) - 1$$

constants of M_{r-n} (one constant of course divides out, giving the diminution -1); but that the equation must have the more general form

$$\Omega_r + L_{r-m} P_m + M_{r-n} Q_n = 0;$$

and it thus appears that the Postulation of the $(mn - \delta)$ points A, instead of being $= mn - \delta$, must be $= mn - \delta - 1$. This completes the proof.

[I notice that combining the last-mentioned identity

$$\tfrac{1}{2}(m(m-3) - m(\gamma-3) + \delta = \tfrac{1}{2}(r-n+1)(r-n+2)$$

with the like identity

$$\tfrac{1}{2}n(n-3) - n(\gamma-3) + \delta = \tfrac{1}{2}(r-m+1)(r-m+2)$$

we obtain

$$\tfrac{1}{2}m(m-3) + \tfrac{1}{2}n(n-3) - (m+n)(\gamma-3) + 2\delta$$
$$= \tfrac{1}{2}(r-n+1)\left(r-n+\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}(r-m+1)(r-m+2),$$

and consequently, referring to a former result, the left-hand side should be

$$= \tfrac{1}{2}r(r+3) - mn + \delta + 1;$$

substituting for γ, δ their values, this is at once verified].

As appears by what precedes, Bacharach's special case is that in which the δ, $= \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ points B satisfy the single condition of lying on a curve of the order $\gamma - 3$. We may have between the points B more than a single relation; in particular the points B may be such as to include among themselves the complete intersection of two curves of the orders a, b respectively ($ab \gtreqless \delta$): this will be the case if the given curves are of the form

$$P_m = \lambda_a S_{m-a} - \mu_b R_{m-b},$$
$$Q_n = \lambda_a V_{n-a} - \mu_b U_{n-b},$$

(it being understood, here and in what follows, that the values of a, b are such that the suffixes are none of them negative).

The two curves here intersect in the ab points ($\lambda_a = 0$, $\mu_b = 0$), and in the $mn - ab$ points

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_a, & R_{m-b}, & U_{n-b} \\ \mu_b, & S_{m-a}, & V_{n-a} \end{matrix} \right\| = 0,$$

say the $(mn - \delta)$ points A are $mn - ab - \Theta$ of the lastmentioned points, and the δ points B are the remaining Θ points together with the ab points. Here the general form of the curve of the order r passing thro' the $mn - ab$ points (and therefore thro' the $mn - \delta$ points A) is

$$\begin{vmatrix} L_{r-m-n+a+b}, & M_{r-n}, & N_{r-m} \\ \lambda_a \quad\quad , & R_{m-b}, & U_{n-b} \\ \mu_b \quad\quad , & S_{m-a}, & V_{n-a} \end{vmatrix} = 0$$

where the $L_{r-m-n+a+b}$, M_{r-n}, N_{r-m} are arbitrary functions of the orders indicated by the respective suffixes. The theory in regard to the number of constants is of course altogether different from that which belongs to the case of the general functions P_m, Q_n; and it is probable that much interesting theory would present itself in the consideration of particular cases.

Cambridge, 22. March 1887.

Bestimmung der allgemeinsten der Functionalgleichung der σ-Function genügenden Function.

Von

Alfons Delisle †.*)

Bekanntlich genügt die Function $\sigma(u)$, welche in der Theorie der elliptischen Functionen eine hervorragende Rolle spielt, der Functionalgleichung

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)\\ &+\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1)=0,\\ &+\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)\end{aligned}$$

die wir in der Folge kürzer mit:

$$\sum\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)=0$$

bezeichnen wollen.

Herr Weierstrass hat nun im Sitzungsbericht der Berliner Akademie vom Jahre 1882, pag. 508, darauf hingewiesen, dass in dieser Functionalgleichung allein in gewissem Sinne die Definition der σ-Function enthalten ist; seine bezüglichen Andeutungen lauten folgendermassen:

„Man kann, ohne von der Function $\sigma(u)$ irgend etwas zu wissen, direct nachweisen, dass es eine vier willkürliche Constante enthaltende (transcendente) ganze Function der Veränderlichen u giebt, welche, für $\sigma(u)$ in die Gleichung (1) eingesetzt, dieselbe befriedigt. Man zeigt zu dem Ende zunächst, dass der Gleichung *formell* genügt werden kann, wenn man für $\sigma(u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe annimmt; dieselbe enthält nur ungerade Potenzen von u, und die Coefficienten derselben lassen sich als ganze rationale Functionen der vier ersten, die un-

*) Die nachfolgende Arbeit des jung verstorbenen Verfassers, die uns von geehrter Seite zur Verfügung gestellt wurde, wird hier von unbedeutenden Aenderungen abgesehen so abgedruckt, wie sie seitens ihres Autors hinterlassen worden ist; wir wollen dabei ausdrücklich darauf aufmerksam machen, dass dieselbe eine vom Verf. selbst hervorgehobene Annahme enthält, welche noch der weitergehenden Begründung bedarf (vergl. § 5 die Voraussetzung betreffs des Nichtverschwindens einer gewissen Determinante). Die R.

bestimmt bleiben, ausdrücken. Mit Hülfe der Gleichung (1) selbst lässt sich dann ferner nachweisen, dass diese Potenzreihe bei beliebigen Werthen der Veränderlichen u und der genannten willkürlichen Constanten convergent ist, also eine Function von der angegebenen Beschaffenheit darstellt. Setzt man sodann

$$\wp(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2},$$

so ergiebt sich, ebenfalls aus der Gleichung (1)

$$\left(\frac{d\wp(u)}{du}\right)^2 = A\wp^3(u) + B\wp^2(u) + C\wp(u) + D,$$

wo A, B, C, D Constanten sind; wodurch der Zusammenhang der auf die angegebene Weise definirten Function $\sigma(u)$ mit der Theorie der elliptischen Functionen festgestellt ist." Im Folgenden sollen diese Andeutungen ausgeführt werden. Dem entsprechend werden wir zunächst in einem ersten Abschnitt eine Potenzreihe bestimmen, welche *formell* der Functionalgleichung genügt; der zweite Abschnitt wird sich sodann mit der Untersuchung dieser Reihe auf ihre *Convergenz* beschäftigen, und endlich werden wir im dritten Abschnitt den *Zusammenhang der allgemeinen σ-Function mit der speciellen*, in der Theorie der elliptischen Functionen gebräuchlichen, und mit den elliptischen Functionen überhaupt entwickeln.

I. Bestimmung einer Potenzreihe von u, welche die Functionalgleichung formell erfüllt.

§ 1.

Nimmt man für $\sigma(u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u an, so folgt aus der Functionalgleichung, wenn man $u = u_1 = u_2 = u_3 = 0$ setzt, $3\sigma^4(0) = 0$, also $\sigma(0) = 0$. Setzt man ferner $u = u_1$, $u_2 = u_3 = 0$, so folgt mit Benutzung von $\sigma(0) = 0$:

$$\sigma^3(u)[\sigma(-u) + \sigma(u)] = 0;$$

wenn überhaupt eine Function $\sigma(u)$ existirt, welche der Functionalgleichung genügt, so muss hiernach für alle Werthe von u, für welche $\sigma(u)$ nicht verschwindet,

$$\sigma(-u) = -\sigma(u)$$

sein. Für die ausgeschlossenen Werthe von u besteht aber diese Gleichung von selbst; sie gilt also für jeden Werth von u, d. h. $\sigma(u)$ *muss eine ungerade Function sein.*

Wir setzen demgemäss für $\sigma(u)$ die Reihe an:

(2) $$\sigma(u) = a_1 u + a_2 u^3 + a_3 u^5 + \cdots + a_n u^{2n-1} + \cdots$$

Setzen wir ferner, nach Potenzen von u_1 ordnend:

$$(3)\qquad \sigma(u+u_1) = A_0 u + A_1 u_1 + (A_2 u + A_3 u_1) u_1^2 + \cdots + (A_{2n} u + A_{2n+1} u_1) u_1^{2n} + \cdots,$$

so werden die Grössen $A_0, A_1, \ldots$ Potenzreihen von u^2, und zwar ergiebt sich:

$$(4)\quad \begin{cases} A_{2n} = \begin{bmatrix} 2n+1 \\ 1 \end{bmatrix} a_{n+1} + \begin{bmatrix} 2n+3 \\ 3 \end{bmatrix} a_{n+2} u^2 + \begin{bmatrix} 2n+5 \\ 5 \end{bmatrix} a_{n+3} u^4 + \cdots \\ \qquad + \begin{bmatrix} 2n+2m+1 \\ 2m+1 \end{bmatrix} a_{n+m+1} u^{2m} + \cdots, \\ A_{2n+1} = \begin{bmatrix} 2n+1 \\ 0 \end{bmatrix} a_{n+1} + \begin{bmatrix} 2n+3 \\ 2 \end{bmatrix} a_{n+2} u^2 + \begin{bmatrix} 2n+5 \\ 4 \end{bmatrix} a_{n+3} u^4 + \cdots \\ \qquad + \begin{bmatrix} 2n+2m+1 \\ 2m \end{bmatrix} a_{n+m+1} u^{2m} + \cdots, \end{cases}$$

wobei in gebräuchlicher Weise $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ den Binominalcoefficienten

$$\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-q+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots q}$$

bezeichnet. Bezeichnen wir mit $[A_\nu]_{u^\mu}$ den Coefficienten von u^μ in A_ν, so folgt aus $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p-q \end{bmatrix}$ unmittelbar

$$\begin{bmatrix} 2n+2m+1 \\ 2m+1 \end{bmatrix} a_{n+m+1} = \begin{bmatrix} 2m+2n+1 \\ 2n \end{bmatrix} a_{m+n+1},$$

oder:

$$(5)\qquad [A_{2n}]_{u^{2m}} = [A_{2m+1}]_{u^{2n}}.$$

Denkt man sich die Potenzreihen A_ν mit geraden Indices und diejenigen mit ungeraden Indices in getrennten Gruppen unter einander geschrieben, so drückt die Relation (5) aus, dass die Verticalreihen von Coefficienten in der einen Gruppe mit den Horizontalreihen von Coefficienten in der anderen Gruppe übereinstimmen.

Da die Grössen A_ν Potenzreihen von u, oder u^2, sind, so haben wir:

$$\sigma(u+u_1) = A_0 u + A_1 u_1 + (A_2 u + A_3 u_1) u_1^2 + \cdots + (A_{2n} u + A_{2n+1} u_1) u_1^{2n} + \cdots,$$

$$\sigma(u-u_1) = A_0 u - A_1 u_1 + (A_2 u - A_3 u_1) u_1^2 + \cdots + (A_{2n} u - A_{2n+1} u_1) u_1^{2n} + \cdots.$$

Hieraus ergiebt sich durch Ausführung der Multiplication:

$$
\begin{aligned}
\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1) = {} & [A_0^2u^2 - A_1^2u_1^2] + 2[A_0A_2u^2 - A_1A_3u_1^2]u_1^2 \\
& + [(2A_0A_4+A_2^2)u^2 - (2A_1A_5+A_3^2)u_1^2]u_1^4 + \cdots \\
& + [(2A_0A_{4n} + 2A_2A_{4n-2} + \cdots + A_{2n}^2)u^2 \\
& \quad - (2A_1A_{4n+1} + 2A_3A_{4n-3} + \cdots + A_{2n+1}^2)u_1^2]u_1^{4n} \\
& + 2[(A_0A_{4n+2} + A_2A_{4n} + \cdots + A_{2n}A_{2n+2})u^2 \\
& \quad - (A_1A_{4n+3} + A_3A_{4n+1} + \cdots + A_{2n+1}A_{2n+3})u_1^2]u_1^{4n+2} + \cdots .
\end{aligned} \tag{6}
$$

Da $\sigma(u)$ eine ungerade Function ist, so ändert sich $\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1)$ nicht, wenn man der Variabeln u oder u_1 den entgegengesetzten Werth ertheilt; vertauscht man aber u mit u_1, so ändert das Product $\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)$ sein Zeichen. Es folgt daraus, dass die Entwickelung von $\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)$ nur gerade Potenzen von u und u_1 enthält, wie schon die erhaltene Function (6) zeigt, und bei Vertauschung von u mit u_1 das Zeichen wechseln muss. Dasselbe gilt auch von jeder homogenen Function, welche die Glieder gleicher Dimension in der Entwickelung von $\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)$ zusammensetzen. Bildet man sich den allgemeinsten Ausdruck einer homogenen Function n^{ten} Grades von zwei Veränderlichen x, y und stellt die Bedingungen dafür auf, dass die Function bei Vertauschung von x mit y nur ihr Zeichen wechsele, so gelangt man zu dem Resultat, dass die Function die folgende Gestalt haben muss:

$$
\begin{aligned}
& C_0(x^n - y^n) + C_1xy(x^{n-2} - y^{n-2}) + C_2x^2y^2(x^{n-4} - y^{n-4}) + \cdots \\
& \quad + C_{(n)}x^{(n)}y^{(n)}(x^{n-2(n)} - y^{n-2(n)}),
\end{aligned}
$$

wobei (n) den Werth $\frac{n}{2} - 1$ oder $\frac{n-1}{2}$ hat, je nachdem n gerad oder ungerad ist. $\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1)$ entwickelt sich in eine Potenzreihe von u^2 und u_1^2, welche bei der Vertauschung von u^2 mit u_1^2 nur ihr Zeichen wechselt; nach dem Vorigen müssen daher die Glieder n^{ter} Dimension in der Entwickelung von $\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)$ eine Function von folgender Gestalt bilden:

$$
\begin{aligned}
& C_0(u^{2n} - u_1^{2n}) + C_1u^2u_1^2(u^{2n-4} - u_1^{2n-4}) + C_2u^4u_1^4(u^{2n-8} - u_1^{2n-8}) + \cdots \\
& \quad + C_{(n)}u^{2(n)}u_1^{2(n)}(u^{2n-4(n)} - u_1^{2n-4(n)}).
\end{aligned}
$$

Wir setzen demgemäss:

$$
\begin{aligned}
\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1) = {} & \alpha_1(u^2 - u_1^2) + \alpha_2(u^4 - u_1^4) \\
& + [\alpha_3(u^6 - u_1^6) + \alpha_3'u^2u_1^2(u^2 - u_1^2)] + \cdots \\
& + [\alpha_{2n}(u^{4n} - u_1^{4n}) + \alpha_{2n}'u^2u_1^2(u^{4n-4} - u_1^{4n-4}) + \cdots \\
& \quad + \alpha_{2n}^{(n-1)}u^{2n-2}u_1^{2n-2}(u^4 - u_1^4)] \\
& + [\alpha_{2n+1}(u^{4n+2} - u_1^{4n+2}) + \alpha_{2n+1}'u^2u_1^2(u^{4n-2} - u_1^{4n-2}) + \cdots \\
& \quad + \alpha_{2n+1}^{(n)}u^{2n}u^{2n}(u^2 - u_1^2)] + \cdots
\end{aligned} \tag{7}
$$

und erhalten durch Vergleichung mit (6) für die Grössen $\alpha_n^{(\nu)}$ die Werthe:

$$\alpha_n = [A_0{}^2 u^2]_{u^{2n}}, \quad \alpha_n' = [2A_0 A_2 u^2 - A_1{}^2]_{u^{2(n-1)}}$$

$$\alpha_n^{(2\nu)} = \{[2A_0 A_{4\nu} + 2A_2 A_{4\nu-2} + \cdots + A_{2\nu}^2] u^2 - 2[A_1 A_{4\nu-1} + A_3 A_{4\nu-3} + \cdots + A_{2\nu-1} A_{2\nu+1}]\}_{u^{2(n-2\nu)}},$$

(8)

$$\alpha_n^{(2\nu+1)} = \{2[A_0 A_{4\nu+2} + A_2 A_{4\nu} + \cdots + A_{2\nu} A_{2\nu+2}] u^2 - [2A_1 A_{4\nu+1} + 2A_3 A_{4\nu-1} + \cdots + A_{2\nu+1}^2]\}_{u^{2(n-2\nu-1)}}.$$

Die Grössen $\alpha_n^{(\nu)}$ sind homogene ganze Functionen zweiten Grades mit ganzzahligen Coefficienten von den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$; die Summe der unteren Indices je zweier Coefficienten a, die in $\alpha_n^{(\nu)}$ mit einander multiplicirt vorkommen, ist gleich $n+1$. Denn in $\alpha_n^{(\nu)}$ kommen von Grössen A mit geraden Indices immer nur solche zusammen multiplicirt vor, deren Indexsumme 2ν ist, und aus diesem Product ist der Coefficient von $u^{2(n-\nu-1)}$ zu nehmen. Betrachten wir das Product $A_{2p} A_{2(\nu-p)}$, so enthält der Factor von u^{2q} in A_{2p} den Coefficienten a_{p+q+1}; dagegen enthält der Factor von $u^{2(n-\nu-1-q)}$ in $A_{2(\nu-p)}$ den Coefficienten $a_{(\nu-p)+(n-\nu-1-q)+1} = a_{n-p-q}$. In $\alpha_n^{(\nu)}$ kommen also zunächst von dem ersten Theil nur Producte von der Form $a_{p+q+1} a_{n-p-q}$ vor, also in der That mit $(n+1)$ als Summe der unteren Indices. Von den Grössen A mit ungeraden Indices kommen in $\alpha_n^{(\nu)}$ auch nur solche zusammen multiplicirt vor, deren Indexsumme 2ν ist, aber aus diesem Product ist der Coefficient von $u^{2(n-\nu)}$ zu nehmen. Der Factor von u^{2q} in A_{2p+1} enthält den Coefficienten a_{p+q+1}, der Factor von $u^{2(n-\nu-q)}$ in $A_{2(\nu-p-1)+1}$ enthält den Coefficienten $a_{(\nu-p+1)+(n-\nu-q)+1} = a_{n-p-q}$; also haben wir wieder nur Producte von der Form $a_{p+q+1} a_{n-p-q}$ oder solche mit der Indexsumme $n+1$. Wir sehen hieraus, dass in $\alpha_n^{(\nu)}$ kein Coefficient a_k mit höherem Index als n vorkommen kann; es ist von besonderem Interesse nachzuweisen, dass der Coefficient a_n in $\alpha_n^{(\nu)}$ stets vorkommt oder dass der Zahlenfactor von $a_1 a_n$ in $\alpha_n^{(\nu)}$ niemals Null ist. Für die Grössen α_n erhalten wir direct die Werthe

$$a_1 = a_1{}^2, \quad \alpha_2 = 2a_1 a_2, \ldots \alpha_{2n} = 2(a_1 a_{2n} + a_2 a_{2n-1} + \cdots + a_n a_{n+1}),$$
$$\alpha_{2n+1} = 2a_1 a_{2n+1} + 2a_2 a_{2n} + \cdots + a_{n+1}^2,$$

welche unmittelbar unsere Behauptung bestätigen.

Für den Zahlencoefficienten von $a_1 a_n$ in α_n' erhalten wir

$$2\binom{2n-1}{2n-3} - 2(2n-1) = 2(2n-1)(n-2);$$

dieser verschwindet auch niemals, da in allen vorkommenden Grössen α_n' der untere Index n mindestens gleich 3 ist.

Zur Berechnung des Zahlencoefficienten von $a_1 a_n$ in der allgemeinen

Grösse $\alpha_n^{(\nu)}$ brauchen wir die Fälle geraden und ungeraden Werthes von ν nicht zu trennen; es ergiebt sich dafür

$$2\left\{\begin{bmatrix}2n-1\\2n-2\nu-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2n-1\\2n-2\nu\end{bmatrix}\right\}=2\left\{\begin{bmatrix}2n-1\\2\nu\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2n-1\\2\nu-1\end{bmatrix}\right\}$$
$$=4\,\frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-2\nu+1)}{(2\nu)!}(n-2\nu).$$

Dieser Factor verschwindet auch niemals, da in der Entwickelung (7) nur solche Grössen $\alpha_n^{(\nu)}$ vorkommen, in denen $n>2\nu$ ist.

Aus der Gleichung (7), welche die Definition der Grössen $\alpha_n^{(\nu)}$ enthält, ersieht man auch unmittelbar, dass $\alpha_n^{(\nu)}$, unabhängig von dem Werthe ν, mit Gliedern von der Dimension $2n$ multiplicirt ist.

Setzt man u_2 an Stelle von u, u_3 an Stelle von u_1, so folgt aus (7):

$$\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)=\alpha_1(u_2^2-u_3^2)+\alpha_2(u_2^4-u_3^4)$$
$$+[\alpha_3(u_2^6-u_3^6)+\alpha_3' u_2^2u_3^2(u_2^2-u_3^2)]+\cdots.$$

Bilden wir das Product $\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)$, so erhalten wir lauter Glieder von der Form:

$$\alpha_m^{(\mu)}\alpha_n^{(\nu)}[u^{2\mu}u_1^{2\mu}(u^{2m-4\mu}-u_1^{2m-4\mu})u_2^{2\nu}u_3^{2\nu}(u_2^{2n-4\nu}-u_3^{2n-4\nu})$$
$$+u^{2\nu}u_1^{2\nu}(u^{2n-4\nu}-u_1^{2n-4\nu})u_2^{2\mu}u_3^{2\mu}(u_2^{2m-4\mu}-u_3^{2m-4\mu})],$$

nur wenn gleichzeitig $m=n$, $\mu=\nu$ ist, hat man bloss die Hälfte dieses Ausdrucks zu nehmen. Um die Entwickelung der linken Seite unserer Functionalgleichung zu erhalten, haben wir u_1, u_2, u_3 cyklisch zu vertauschen und die drei Ausdrücke zu addiren, welche Operationen wir einfach durch ein vorgesetztes Σ-Zeichen andeuten. Unterziehen wir den Ausdruck

$$(9)\qquad [p,q,r,s]=\sum[u^{2p}u_1^{2p}(u^{2q}-u_1^{2q})u_2^{2r}u_3^{2r}(u_2^{2s}-u_3^{2s})$$
$$+u^{2r}u_1^{2r}(u^{2s}-u_1^{2s})u_2^{2p}u_1^{2p}(u^{2q}-u_1^{2q})],$$

in welchem die Grössen p, q, r, s positive ganze Zahlen, p und r auch 0, bedeuten sollen, einer näheren Untersuchung, so finden wir, dass derselbe in den folgenden vier Fällen und keinen anderen identisch, d. h. für alle Werthe von u, u_1, u_2, u_3 verschwindet:

$$p+q=r,\quad p=r+s,\quad p=r,\quad p+q=r+s.$$

Für einen Ausdruck von der Form (9), der nicht identisch verschwindet, müssen daher die Ungleichungen

$$p+q\gtrless r,\quad p\gtrless r+s,\quad p\gtrless r,\quad p+q\gtrless r+s$$

bestehen. Die beiden einzigen Ungleichungen, welche für sich allein alle übrigen einschliessen sind

$$r>p+q\quad\text{und}\quad p>r+s;$$

doch kommen dieselben im Wesentlichen auf dasselbe hinaus, da $[p, q, r, s]$ unverändert bleibt, wenn man gleichzeitig p mit r und q mit s vertauscht.

Nehmen wir also $r > p + q$ an, so verschwindet $[p, q, r, s]$ sicher nicht identisch, und unter derselben Voraussetzung ergeben sich die folgenden Identitäten:

$$(10) \qquad \begin{aligned}[p, q, r, s] &= -[p, r-p, p+q, r+s-p-q] \\ &= [p, r+s-p, p+q, r-p-q].\end{aligned}$$

In dem mittleren Ausdruck ist die Summe der beiden ersten Zahlen gleich r, im dritten gleich $r + s$, in beiden Fällen ist sie, nach der Annahme $r > p + q$, grösser als die dritte Zahl in den beiden Ausdrücken. Unter den drei Ausdrücken, welche bis auf das Vorzeichen einander gleich sind, befindet sich nur ein einziger, in welchem die Summe der beiden ersten Zahlen kleiner ist als die dritte. Denken wir uns daher aus der unendlichen Reihe von Ausdrücken von der Form (9) diejenigen herausgenommen, für welche $r > p + q$ ist, so sind diese stets von Null verschieden und giebt es noch je zwei andere Ausdrücke in der Reihe, welche diesen abgesehen vom Vorzeichen gleich sind. Die dreifache Reihe enthält alle von Null verschiedenen Ausdrücke und jeden nur ein einziges Mal.

Nach dieser Untersuchung lassen sich je drei der nicht identisch verschwindenden Ausdrücke, welche in der Entwickelung der linken Seite unserer Functionalgleichung auftreten, zusammenfassen. Das Glied $[p, q, r, s]$ hat den Factor $\alpha^{(p)}_{2p+q}\,\alpha^{(r)}_{2r+s}$ (da $p = r$, $q = s$, in welchem Falle wir den Factor $\frac{1}{2}$ hinzufügen müssten, einen identisch verschwindenden Ausdruck liefert); daher entstehen mit Berücksichtigung der Gleichung (10) durch Zusammenfassung der drei passenden Ausdrücke lauter Glieder von der Form:

$$(\alpha^{(p)}_{2p+q}\,\alpha^{(r)}_{2r+s} - \alpha^{(p)}_{p+r}\,\alpha^{(p+q)}_{p+q+r+s} + \alpha^{(p)}_{p+r+s}\,\alpha^{(p+q)}_{p+q+r})\,[p, q, r, s].$$

Da $\alpha^{(\nu)}_{n}$ mit Gliedern $2n^{\text{ter}}$ Dimension multiplicirt ist, so muss die Summe der unteren Indices je zweier Grössen $\alpha^{(\nu)}_{n}$, die mit einander multiplicirt sind, gleich $2p+q+2r+s$ sein, indem $2(2p+q+2r+s)$ die Dimension des Ausdruckes $[p, q, r, s]$ angiebt.

Wir kommen auf diese Weise zu der folgenden *Entwickelung der linken Seite unserer Functionalgleichung:*

$$(11) \qquad \begin{aligned}&\Sigma\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3) \\ &= \sum_{p,q,r,s}{}' (\alpha^{(p)}_{2p+q}\,\alpha^{(r)}_{2r+s} - \alpha^{(p)}_{p+r+s}\,\alpha^{(p+q)}_{p+q+r+s} + \alpha^{(p)}_{p+r+s}\,\alpha^{(p+q)}_{p+q+r})\,[p, q, r, s] \\ &\left(p=0, 1, 2, \ldots;\ q=1, 2, 3, \ldots;\ r=2, 3, 4;\ s=1, 2, 3, \ldots;\ r > p+q\right).\end{aligned}$$

§ 2.

Soll die angenommene Potenzreihe die Functionalgleichung formell befriedigen, so müssen die Coefficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ so bestimmt werden, dass sie die sämmtlichen Gleichungen

$$(12) \qquad \alpha^{(p)}_{2p+q}\,\alpha^{(r)}_{2r+s} - \alpha^{(p)}_{p+r+s}\,\alpha^{(p+q)}_{p+q+r+s} + \alpha^{(p)}_{p+r+s}\,\alpha^{(p+q)}_{p+q+r} = 0$$

$$(p=0,1,2,\ldots;\ q=1,2,3,\ldots;\ r=2,3,4,\ldots;\ s=1,2,3,\ldots;\ r>p+q)$$

erfüllen.

Um eine Uebersicht über diese unendliche Reihe von Gleichungen zu bekommen, theilen wir dieselben in Gruppen ein, indem wir zu einer Gruppe diejenigen Gleichungen vereinigen, welche durch Nullsetzen der Coefficienten von Gliedern einer und derselben Dimension entstehen, oder, mit anderen Worten, in welchen die Summe

$$2p + q + 2r + s$$

einen und denselben Werth n hat; *wir wollen sie die Gruppe n nennen.* Wir geben, um zugleich eine bestimmte Ordnung der Gleichungen festzusetzen, einen Weg an, auf welchem man in systematischer Weise sämmtliche Gleichungen einer jeden Gruppe erhalten kann.

Man nehme zuerst $p=0$, $q=1$, $r=2$ an und bestimme den Werth von s aus der Gleichung $2p+q+2r+s=n$, woraus $s=n-5$ folgt; dann lasse man r um je eine Einheit wachsen, wobei s um je zwei Einheiten abnimmt, bis s den Werth 2 oder 1 erhält. Nun nehme man $p=0$, $q=2$, $r=3$ (da $r>p+q$ sein muss) an und erhalte so für s den Werth $n-8$, lasse hierauf wieder r um je eine Einheit wachsen, bis s wieder auf 2 oder 1 gesunken ist. Dann nehme man $p=0$, $q=3$, $r=4$ an und verfahre in derselben Weise; den Werth $p=0$ halte man so lange fest, bis $p=0$, $q=x$, $r=x+1$ für s den Werth 3, 2 oder 1 ergiebt. Dann nehme man $p=1$, $q=1$, $r=3$, $s=n-9$ an und verfahre wie oben solange, bis auch $p=1$, $q=y$, $r=y+2$ für s den Werth 3, 2 oder 1 ergiebt. Kurz man halte zunächst die beiden Werthe p, q solange als thunlich fest, erhöhe dann, den Werth von p noch beibehaltend, q um je eine Einheit, und bei jedem neuen Werth von p hat man auszugehen von $p=x$, $q=1$, $r=x+2$, $s=n-4x-5$. Wir werden später noch einige Untersuchungen über die Anzahl von Gleichungen einer Gruppe anstellen; von besonderem Interesse ist die Zahl der Gleichungen, in denen $p=0$, $q=1$ ist. Dieselbe ist nach dem Obigen gleich der grössten ganzen Zahl, welche in $\frac{n-4}{2}$ enthalten ist; bezeichnen wir mit $\left[\frac{n}{2}\right]$ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so ist die fragliche Anzahl von Gleichungen

in der Gruppe n gleich $\left[\frac{n}{2}\right] - 2$. Setzen wir für p, q, r, s die kleinsten Werthe, welche sie überhaupt annehmen können, so erhalten wir auch den kleinsten Werth von n. Es ergiebt sich für denselben

$$(p=0, q=1, r=2, s=1)\ 2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 2 + 1 = 6;$$

es beginnt daher die Entwickelung der linken Seite unserer Functionalgleichung mit Gliedern 12^{ter} Dimension. Die Gruppe 6 besteht aus der einzigen Gleichung

$$(p=0, q=1, r=2, s=1)\quad \alpha_1 \alpha_5'' - \alpha_2 \alpha_4' + \alpha_3 \alpha_3' = 0;$$

die Gruppe 7 enthält gleichfalls nur eine Gleichung, nämlich:

$$(p=0, q=1, r=2, s=2)\quad \alpha_1 \alpha_6'' - \alpha_2 \alpha_5' + \alpha_4 \alpha_3' = 0;$$

erst die Gruppe 8 enthält zwei Gleichungen, nämlich:

$$(p=0, q=1, r=2, s=3)\quad \alpha_1 \alpha_7'' - \alpha_2 \alpha_6' + \alpha_5 \alpha_3' = 0,$$
$$(p=0, q=1, r=3, s=1)\quad \alpha_1 \alpha_7''' - \alpha_3 \alpha_5' + \alpha_4 \alpha_4' = 0.$$

Die linken Seiten der Gleichungen (12) sind ganze homogene Functionen vierten Grades von den Coefficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Wir haben bewiesen, dass in $\alpha_n^{(\nu)}$ stets das Glied $a_1 a_n$ vorkommt und dass a_n der Coefficient mit höchstem Index ist, welcher in $\alpha_n^{(\nu)}$ überhaupt vorkommt. Da $r > p + q$ ist, so haben wir

$$2r + s > p + q + r + s > 2p + 2q + s;$$

ein Blick auf die Gleichung (12) zeigt, dass daher $2r + s$ der grösste in der Gleichung vorhandene untere Index ist. Aus früher erwähnten Eigenschaften der Gleichungen (12) und der Grössen $\alpha_n^{(\nu)}$ folgt, dass die Summe der Indices von je vier Coefficienten a_n, welche in der allemeinen Gleichung (12) mit einander multiplicirt sind, den constanten Werth $2p + q + 2r + s + 2$ hat. Die Gruppe n enthält also nur solche Producte zu je vieren der Coefficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$, deren Indexsumme gleich $n + 2$ ist. Nehmen wir für p und q die kleinsten zulässigen Werthe, nämlich $p = 0$, $q = 1$ an, so erhält $2r + s$ seinen grössten Werth und zwar $n - 1$. In der Gruppe n kommen also nur der Coefficient a_{n-1} und solche mit kleinerem Index vor. a_{n-1} tritt aber nur in den Gleichungen auf, die $p = 0$, $q = 1$ haben, und ist dort, abgesehen von einem sicher von Null verschiedenen Zahlenfactor, mit a_1^3 multiplicirt. Die erste aller Gleichungen hat sonach die Form:

$$N a_1^3 a_5 + [a_1, a_2, a_3, a_4] = 0,$$

wobei N eine gewisse ganze Zahl und $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ eine ganze homogene Function vierten Grades mit ganzzahligen Coefficienten von a_1, a_2, a_3, a_4 bezeichnet. Die zweite Gleichung hat die Form:

$$N_1 a_1^3 a_6 + [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]_1 = 0,$$

und die beiden Gleichungen der Gruppe 8 sind von der Gestalt:

$$N_2 a_1^3 a_7 + [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]_2 = 0,$$
$$N_3 a_1^3 a_7 + [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]_3 = 0.$$

In der ganzen Gruppe n kommt kein Coefficient a mit grösserem Index als $n-1$ vor; es giebt aber auch eine Zahl m, welche der Index von a in jeder Gleichung der Gruppe mindestens erreichen muss. $2r+s$ ist der grösste Index von a, welcher in der allgemeinen Gleichung (12) vorkommt, und stets ist auch das Glied $a_1^2 a_{2p+q} a_{2r+s}$ wirklich vorhanden. Wir haben also nur zu untersuchen, unterhalb welche Grenze $2r+s$ nicht sinken darf, wenn mit den bekannten Nebenbedingungen $2p+q+2r+s=n$ sein soll. Da $r > p+q$ sein muss und q und s als kleinsten Werth nur 1 annehmen können, so haben wir:

$$r \geqq p+q+1; \quad 2r+s \geqq 2p+2q+2+s \geqq 2p+q+4$$

und es folgt daher aus der Gleichung $2p+q+2r+s=n$:

$$2(2r+s) \geqq n+4 \quad \text{oder} \quad 2r+s \geqq \frac{n+4}{2}.$$

In jeder Gleichung der Gruppe n muss also ein Coefficient a mit mindestens dem Index $\frac{n+4}{2}$, wenn n gerade, $\frac{n+5}{2}$, wenn n ungerade ist, vorkommen. Da n mit dem Werth 6 beginnt, so existirt hiernach keine Gleichung zwischen den Coefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 allein; diese können daher vorläufig willkürlich gelassen werden. Aus unserer ersten Gleichung bestimmt sich dann a_5 als rationale Function von a_1, a_2, a_3, a_4, welche nur eine Potenz von a_1 zum Nenner hat. Setzt man in die zweite Gleichung den Werth von a_5 ein, so kann man a_6 als rationale Function von a_1, a_2, a_3, a_4 bestimmen, die gleichfalls nur eine Potenz von a_1 als Nenner hat. In derselben Form lässt sich a_7 mit Hülfe der dritten Gleichung darstellen; aber es bleibt nun zur Befriedigung der vierten Gleichung keine Grösse mehr verfügbar. Wenn es bei beliebigen Werthen von a_1, a_2, a_3, a_4 eine Potenzreihe von u giebt, welche der Functionalgleichung formell genügt, so muss die vierte Gleichung schon von selbst erfüllt sein, wenn die Coefficienten a_5, a_6, a_7 aus den drei ersten Gleichungen bestimmt sind. — Nimmt man aus jeder Gruppe die erste Gleichung, so erhält man gerade die genügende Anzahl, um der Reihe nach sämmtliche Coefficienten a_n als rationale Functionen von a_1, a_2, a_3, a_4 mit Potenzen von a_1 als Nenner zu bestimmen. Es soll nun der Beweis geliefert werden, dass hierdurch gleichzeitig alle übrigen Gleichungen erfüllt werden.

§ 3.

Führen wir für den Coefficienten von $[p, q, r, s]$ in der Entwickelung (11) die Bezeichnung (p, q, r, s) ein, setzen also:

$$(13)\quad \alpha^{(p)}_{2p+q}\,\alpha^{(r)}_{2r+s} - \alpha^{(p)}_{p+r}\,\alpha^{(p+q)}_{p+q+r+s} + \alpha^{(p)}_{p+r+s}\,\alpha^{(p+q)}_{p+q+r} = (p, q, r, s),$$

so können wir folgende in den Grössen $\alpha^{(\nu)}_{n}$ identische Gleichungen anschreiben:

$$(14)\quad \alpha^{(m)}_{p+m}(p,q,r,s) = \alpha^{(p)}_{2p+q}(m,p-m,r,s) - \alpha^{(p)}_{p+r}(m,p-m,p+q,r+s-p-q) + \alpha^{(p)}_{p+r+s}(m,p-m,p+q,r-p-q),$$

$$(15)\quad \alpha^{(p)}_{2p+n}(p,q,r,s) = \alpha^{(p)}_{2p+q}(p,n,r,s) - \alpha^{(p)}_{p+r}(p,n,p+q,r+s-p-q) + \alpha^{(p)}_{p+r+s}(p,n,p+q,r-p-q);$$

den Zahlen m und n können innerhalb sogleich zu bestimmender Grenzen beliebige ganzzahlige positive Werthe, der Zahl m auch der Werth Null, beigelegt werden. Die genannten Grenzen bestimmen sich daraus, dass in allen vorkommenden Grössen $\alpha^{(\nu)}_{\mu}$ $\mu > 2\nu$ und in den Ausdrücken $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ $\varkappa + \lambda < r$ sein muss. Diese sämmtlichen Bedingungen werden, da $r > p + q$ ist, in der Gleichung (14) durch

$$0 \leqq m < p,$$

in der Gleichung (15) durch

$$1 \leqq n < q$$

erfüllt. In der Gleichung (14) gehören die drei Klammerausdrücke auf der rechten Seite den Gruppen

$$p + 2r + s + m,\quad 2p + q + r + s + m,\quad 2p + q + r + m$$

an, in der Gleichung (15) gehören sie den Gruppen

$$2p + 2r + s + n,\quad 3p + q + r + s + n,\quad 3p + q + r + n$$

an. Wegen $r > p + q$, $p > m$, $q > n$ sind diese sechs Zahlen kleiner als $2p + q + 2r + s$. Die Gleichung (14) kann stets angewendet werden, wenn $p > 0$ ist, die Gleichung (15), wenn $q > 1$ ist; in allen Fällen, wo nicht gleichzeitig $p = 0$, $q = 1$ ist, kann man daher sicher eine der Gleichungen anwenden und mit Hülfe derselben den Ausdruck (p, q, r, s) als homogene lineare Function der linken Seiten von Gleichungen *vorausgegangener* Gruppen darstellen.

Setzen wir in den Gleichungen (14) und (15) $m = 0$ und $n = 1$, so stellt die erste Gleichung jeden Ausdruck (p, q, r, s), in dem nicht schon $p = 0$ ist, als homogene lineare Function solcher Ausdrücke $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ dar, in denen $\varkappa = 0$ ist; solche Ausdrücke (p, q, r, s), in denen $p = 1$ ist, werden als lineare homogene Functionen von

Ausdrücken $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ mit $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$ dargestellt. Die zweite Gleichung mit $n = 1$ stellt jeden Ausdruck (p, q, r, s), in dem q nicht den Werth 1 hat, als homogene lineare Function von Ausdrücken $(p, 1, \lambda, \mu)$, jeden Ausdruck $(0, q, r, s)$ also als homogene lineare Function von Ausdrücken $(0, 1, \lambda, \mu)$ dar. Durch Anwendung beider Gleichungen kann man jeden Ausdruck (p, q, r, s), in dem weder $p = 0$ noch $q = 1$ ist, als lineare homogene Function solcher Ausdrücke $(0, 1, \lambda, \mu)$ darstellen. Man leitet sich durch Ausführung der Rechnung die folgende Identität ab:

$$
(16) \qquad \alpha_1 \alpha_p(p,q,r,s) = \left\{ \begin{array}{l}
\alpha_p \alpha^{(p)}_{2p+q}(0,1,r,s) \\
- \left\{ \alpha_r \alpha^{(p)}_{2p+q} - \alpha_{p+q} \alpha^{(p)}_{p+r} \right\} (0,1,p,r+s-p) \\
- \alpha_p \alpha^{(p)}_{p+r}(0,1,p+q,r+s-p-q) \\
- \left\{ \alpha_{p+q} \alpha^{(p)}_{p+r+s} - \alpha_{r+s} \alpha^{(p)}_{2p+q} \right\} (0,1,p,r-p) \\
+ \alpha_p \alpha^{(p)}_{p+r+s}(0,1,p+q,r-p-q) \\
- \left\{ \alpha_{r+s} \alpha^{(p)}_{p+r} - \alpha_r \alpha^{(p)}_{p+r+s} \right\} (0,1,p,q).
\end{array} \right.
$$

Die Gleichung (16) lehrt, dass wenn die Coefficienten $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ so bestimmt sind, dass sie die Gleichungen mit $p = 0$, $q = 1$ befriedigen, auch gleichzeitig alle übrigen Gleichungen erfüllt werden. Dieser Schluss ist zunächst für alle Gleichungen nur unter der Voraussetzung streng, dass die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ nicht verschwinden. Doch können wir uns leicht von dieser Beschränkung frei machen. Denken wir uns die Coefficienten $a_5, a_6, \ldots$ mit Benutzung der ersten Gleichung jeder Gruppe als rationale Functionen von a_1, a_2, a_3, a_4 bestimmt und die Werthe in die Gleichung (16) eingesetzt, so erhalten wir auf beiden Seiten rationale Functionen von a_1, a_2, a_3, a_4, die nur Potenzen von a_1 zum Nenner haben. Wenn die Coefficienten $a_5, a_6, \ldots$ überhaupt so bestimmt werden können, dass sie sämmtliche Gleichungen mit $p = 0$, $q = 1$ befriedigen, so muss dieses auch die völlig eindeutige Bestimmung mit Hülfe der ersten Gleichung aus jeder Gruppe leisten. Nehmen wir an, es sei dies der Fall, so würde in der Gleichung (16) nach Einsetzen der Ausdrücke der Coefficienten $a_5, a_6 \ldots$ in den Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 die rechte Seite in a_1, a_2, a_3, a_4 identisch verschwinden. Da $\alpha_1 = a_1^2$, so könnten wir nur dann nicht schliessen, dass auch der Ausdruck (p, q, r, s) in a_1, a_2, a_3, a_4 identisch gleich Null wäre, wenn zufällig α_p als Function von a_1, a_2, a_3, a_4 identisch verschwinden würde. Durch Betrachtung einer speciellen Function, welche unserer Functionalgleichung genügt, kann man sich aber leicht überzeugen, dass dieser Fall nicht eintritt. Man erkennt unmittelbar, dass die Function ue^{u^2} der Functionalgleichung genügt; daraus folgt,

dass für $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{6}$ sich $a_5 = \frac{1}{4!}$, allgemein $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$, ergeben muss. Es wird aber in diesem Fall:

$$\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1)$$
$$= (u^2 - u_1^2)\left\{1 + 2(u^2+u_1^2) + \frac{2^2(u^2+u_1^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{2^{n-1}(u^2+u_1^2)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right\};$$

die Glieder $2n^{\text{ter}}$ Dimension werden:

$$(u^2 - u_1^2)\frac{2^{n-1}(u^2+u_1^2)^{n-1}}{(n-1)!} = \alpha_n(u^{2n} - u_1^{2n}) + \alpha'_n u^2 u_1^2 (u^{2n-4} - u_1^{2n-4}) + \cdots$$

Daher hat in dem speciellen Fall α_n den von Null verschiedenen Werth $\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$. Man sieht zu gleicher Zeit, dass im vorliegenden Fall auch keine der Grössen $\alpha_n^{(\nu)}$ den Werth Null hat. Es folgt daraus, dass keine der Grössen α_p, wie auch $\alpha_\mu^{(\nu)}$ als Function von a_1, a_2, a_3, a_4 in der oben auseinandergesetzten Weise dargestellt, (identisch) verschwindet; denn sonst müsste dies auch für das specielle Werthsystem stattfinden.

Wir haben hiermit folgenden Satz bewiesen:

Wenn es gelingt, die Coefficienten $a_5, a_6, \ldots$ als rationale Functionen von a_1, a_2, a_3, a_4 so zu bestimmen, dass gleichzeitig alle Gleichungen, in denen $p = 0$, $q = 1$ ist, verschwinden, so erfüllen diese Ausdrücke für $a_5, a_6, \ldots$ auch sämmtliche übrige Gleichungen.

Bei beliebigen, aber bestimmten Zahlenwerthen von a_1, a_2, a_3, a_4, nur $a_1 = 0$ ausgenommen, können wir aus den ersten Gleichungen jeder Gruppe die Coefficienten $a_5, a_6 \ldots$ berechnen und erhalten dafür vollkommen bestimmte endliche Werthe. Es kann nun wohl vorkommen, dass eine der Grössen α_p verschwindet, aber trotzdem bleibt der Satz bestehen, dass wenn alle Gleichungen mit $p = 0$, $q = 1$ erfüllt sind, auch gleichzeitig alle übrigen befriedigt werden. Denn die linke Seite der fraglichen in (16) mit $\alpha_1 \alpha_p$ multiplicirten Gleichung lässt sich als rationale Function von a_1, a_2, a_3, a_4 mit einer unserer Voraussetzung nach von Null verschiedenen Potenz von a_1 als Nenner darstellen, die in a_1, a_2, a_3, a_4 identisch verschwindet. Daher muss sie auch für das specielle Werthsystem von a_1, a_2, a_3, a_4 den Werth Null haben.

Da sich die linke Seite einer jeden Gleichung, in der nicht gleichzeitig $p = 0$, $q = 1$ ist, durch die linken Seiten von Gleichungen vorausgegangener Gruppen linear und homogen ausdrücken lässt, so folgt, dass wenn es gelungen ist, sämmtliche Gleichungen in den Gruppen $6, 7, \ldots n-1$ zu erfüllen, dann von selbst die Gleichungen in der Gruppe n, in denen nicht $p = 0$, $q = 1$ ist, mit erfüllt werden. Es muss also nur gezeigt werden, dass unter der Voraussetzung,

sämmtliche Gleichungen der vorausgegangenen Gruppen seien befriedigt, durch den Werth von a_{n-1}, welcher sich aus der ersten Gleichung der Gruppe n ergiebt, zugleich den übrigen $\left[\frac{n}{2}\right] - 3$ Gleichungen mit $p = 0$, $q = 1$ genügt wird. Dieses ist nur möglich, wenn zwischen den linken Seiten der $\left[\frac{n}{2}\right] - 2$ Gleichungen mit $p = 0$, $q = 1$ genau $\left[\frac{n}{2} - 3\right]$ von einander unabhängige Relationen bestehen. Es ist der Existenzbeweis dieser Relationen, der uns zunächst beschäftigen wird.

§ 4.

Wir haben die Entwickelung der linken Seite unserer Gleichung in synthetischer Weise hergestellt und sind auf diesem Wege zu dem Hauptresultat gelangt, dass sämmtliche Gleichungen, in denen nicht gleichzeitig $p = 0$, $q = 1$ ist, sich auf Gleichungen mit $p = 0$, $q = 1$ vorausgegangener Gruppen reduciren lassen. Um die noch fehlenden Relationen zwischen den linken Seiten von Gleichungen einer und derselben Gruppe zu erhalten, gehen wir von einer directen Betrachtung der vollständigen linken Seite unserer Functionalgleichung aus, indem wir nur $\sigma(u)$ als ungerade Function voraussetzen. Es sei zur Abkürzung gesetzt:

$$(17)\quad S(u, u_1, u_2, u_3) = \begin{cases} \sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1)\sigma(u_2+u_3)\sigma(u_2-u_3) \\ +\sigma(u+u_2)\sigma(u-u_2)\sigma(u_3+u_1)\sigma(u_3-u_1) \\ +\sigma(u+u_3)\sigma(u-u_3)\sigma(u_1+u_2)\sigma(u_1-u_2). \end{cases}$$

Eine nähere Betrachtung zeigt, dass die Variable u durchaus nicht, wie es den Anschein haben könnte, in anderer Weise in S eingeht wie u_1, u_2, u_3; nur bei der Anschreibung ist u bevorzugt. In der That ergiebt sich, dass, — $\sigma(u)$ als ungerade Function vorausgesetzt —, S unverändert bleibt, wenn man irgend einer der Variabeln u, u_1, u_2, u_3 ihren entgegengesetzten Werth ertheilt, und nur das Zeichen wechselt, wenn man irgend zwei der Variabeln u, u_1, u_2, u_3 mit einander vertauscht. Dieses heisst nichts anderes, als dass S eine alternirende Function von u^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2 ist. In der Entwickelung von S müssen daher die Glieder gleicher Dimension homogene ganze rationale alternirende Functionen von u^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2 sein. Jede homogene ganze rationale alternirende Function lässt sich als lineare homogene Function von gewissen einfachsten alternirenden Functionen darstellen. Für diese einfachsten alternirenden Functionen eignet sich am Besten die Darstellung in Determinantenform. Bleiben wir bei vier Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4 stehen, so bilden die einfachsten alternirenden Functionen vom Grade n die Reihe:

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} x_1^\alpha & x_1^\beta & x_1^\gamma & x_1^\delta \\ x_2^\alpha & x_2^\beta & x_2^\gamma & x_2^\delta \\ x_3^\alpha & x_3^\beta & x_3^\gamma & x_3^\delta \\ x_4^\alpha & x_4^\beta & x_4^\gamma & x_4^\delta \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha<\beta<\gamma<\delta \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha=0,1,2,\ldots, \beta=1,2,3,\ldots \\ \gamma=2,3,4,\ldots, \delta=3,4,5,\ldots \end{pmatrix}.$$

Da S eine alternirende Function von u^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2 ist, so müssen nach dem Vorausgehenden die Glieder $2n^{\text{ter}}$ Dimension eine lineare homogene Function von Ausdrücken von der Gestalt:

$$\begin{vmatrix} u^{2\alpha} & u^{2\beta} & u^{2\gamma} & u^{2\delta} \\ u_1^{2\alpha} & u_1^{2\beta} & u_1^{2\gamma} & u_1^{2\delta} \\ u_2^{2\alpha} & u_2^{2\beta} & u_2^{2\gamma} & u_2^{2\delta} \\ u_3^{2\alpha} & u_3^{2\beta} & u_3^{2\gamma} & u_3^{2\delta} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha=0,1,2,\ldots, \beta=1,2,3,\ldots, \gamma=2,3,4,\ldots, \delta=3,4,5,\ldots \\ \alpha<\beta<\gamma<\delta, \qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta=n \end{pmatrix}$$

sein.

Auf diese Form sind wir aber durch den früher eingeschlagenen Weg auch geführt worden. Denn nach bekannten Determinantensätzen ist:

$$\begin{vmatrix} u^{2\alpha} & u^{2\beta} & u^{2\gamma} & u^{2\delta} \\ u_1^{2\alpha} & u_1^{2\beta} & u_1^{2\gamma} & u_1^{2\delta} \\ u_2^{2\alpha} & u_2^{2\beta} & u_2^{2\gamma} & u_2^{2\delta} \\ u_3^{2\alpha} & u_3^{2\beta} & u_3^{2\gamma} & u_3^{2\delta} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \quad \begin{vmatrix} u^{2\alpha} & u^{2\beta} \\ u_1^{2\alpha} & u_1^{2\beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2^{2\gamma} & u_2^{2\delta} \\ u_3^{2\gamma} & u_3^{2\delta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u^{2\gamma} & u^{2\delta} \\ u_1^{2\gamma} & u_1^{2\delta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2^{2\alpha} & u_2^{2\beta} \\ u_3^{2\alpha} & u_3^{2\beta} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} u^{2\beta} & u^{2\gamma} \\ u_1^{2\beta} & u_1^{2\gamma} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2^{2\alpha} & u_2^{2\delta} \\ u_3^{2\alpha} & u_3^{2\delta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u^{2\alpha} & u^{2\delta} \\ u_1^{2\alpha} & u_1^{2\delta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2^{2\beta} & u_2^{2\gamma} \\ u_3^{2\beta} & u_3^{2\gamma} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} u^{2\gamma} & u^{2\alpha} \\ u_1^{2\gamma} & u_1^{2\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2^{2\beta} & u_2^{2\delta} \\ u_3^{2\beta} & u_3^{2\delta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u^{2\beta} & u^{2\delta} \\ u_1^{2\beta} & u_1^{2\delta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2^{2\gamma} & u_2^{2\alpha} \\ u_3^{2\gamma} & u_3^{2\alpha} \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

$$= [\alpha, \beta-\alpha, \gamma, \delta-\gamma].$$

Da $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ vorausgesetzt ist, so genügen, wenn wir

$$\alpha=p, \quad \beta-\alpha=q, \quad \gamma=r, \quad \delta-\gamma=s$$

setzen, die Grössen p, q, r, s den früheren Bedingungen; wir haben also:

$$(19)\qquad [p,q,r,s]=\begin{vmatrix} u^{2p} & u^{2(p+q)} & u^{2r} & u^{2(r+s)} \\ u_1^{2p} & u_1^{2(p+q)} & u_1^{2r} & u_1^{2(r+s)} \\ u_2^{2p} & u_2^{2(p+q)} & u_2^{2r} & u_2^{2(r+s)} \\ u_3^{2p} & u_3^{2(p+q)} & u_3^{2r} & u_3^{2(r+s)} \end{vmatrix}.$$

Da auch jedem zulässigen Werthsystem p, q, r, s ein Werthsystem α, β, γ, δ entspricht, welches den Bedingungen $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ genügt, so ist die Zahl der Glieder $[p, q, r, s]$, welche die homogene Function $2n^{\text{ten}}$ Grades in der Entwickelung von S zusammensetzen, gleich der Anzahl einfachster, oder überhaupt linear von einander unabhängiger

homogener alternirender Functionen $2n^{\text{ten}}$ Grades von u^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2. Wir hätten also schon aus dieser kurzen Betrachtung den Schluss machen können, dass die Entwickelung von S die Gestalt haben muss:

$$S = \sum (p, q, r, s)\,[p, q, r, s];$$

von den Coefficienten (p, q, r, s) könnten wir aber unmittelbar aus dem Anblick von S nur schliessen, dass sie homogene Functionen vierten Grades mit ganzzahligen Coefficienten von den Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sein müssen.

Die einfachste alternirende Function von vier Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4 ist die Function 6^{ten} Grades:

$$\mathsf{P} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

Wir finden also bestätigt, dass die Entwickelung von S mit Gliedern 12^{ten} Grades beginnen muss.

Jede homogene alternirende Function von x_1, x_2, x_3, x_4 vom n^{ten} Grade ist gleich dem Product aus P in eine homogene symmetrische Function von x_1, x_2, x_3, x_4 vom Grade $n - 6$. Die alternirenden Functionen von der Form (18), welche wir als die einfachsten bezeichnet haben, sind im Allgemeinen keineswegs gleich dem Product aus P in die einfachsten symmetrischen Functionen; aber die Anzahl der einfachsten alternirenden Functionen n^{ten} Grades von ϱ Variabeln ist, da das entsprechende Product P vom Grade $\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}$ ist, gleich der Anzahl der einfachsten symmetrischen Functionen vom Grade $n - \frac{\varrho(\varrho-1)}{2}$.

Die Anzahl von Gleichungen in der Gruppe n ist daher gleich der Anzahl von einfachsten oder überhaupt linear von einander unabhängigen symmetrischen Functionen $(n-6)^{\text{ten}}$ Grades von vier Veränderlichen. Wir wollen dieses direct aus den Gleichungen beweisen, welche diese Anzahlen bestimmen. Die Anzahl von Gleichungen der Gruppe n ist gleich der Anzahl ganzzahliger Lösungen der Gleichung

$$2p + q + 2r + s = n \quad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots, & q, s = 1, 2, 3, \ldots \\ & r > p + q \end{pmatrix}$$

oder

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = n \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots \\ \alpha < \beta < \gamma < \delta \end{pmatrix};$$

die Anzahl der genannten symmetrischen Functionen dagegen ist gleich der Anzahl ganzzahliger Lösungen der Gleichung

$$\varkappa + \lambda + \mu + \nu = n - 6 \quad (\varkappa, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots; \quad \varkappa \leqq \lambda \leqq \mu \leqq \nu).$$

Setzt man

$$\alpha = p, \quad \beta = p + q, \quad \gamma = r, \quad \delta = r + s,$$
$$p = \alpha, \quad q = \beta - \alpha, \quad r = \gamma, \quad s = \delta - \gamma,$$

so gehen die beiden ersten Gleichungen mit ihren Nebenbedingungen in einander über. Bei den Gleichungen der Gruppe n haben sich diejenigen mit $p = 0$, $q = 1$ vor den anderen ausgezeichnet; wir wollen aber mit Rücksicht auf Beziehungen, die sich sogleich ergeben werden, vier Abtheilungen machen, nämlich:

$$1)\ p = 0, \ q = 1, \ r = 2, \qquad 2)\ p = 0, \ q = 1, \ r > 2,$$
$$3)\ p = 0, \ q > 1, \qquad 4)\ p > 0.$$

Hiernach theilen sich auch die einfachsten alternirenden Functionen (18) eines und desselben Grades in vier Abtheilungen ein:

$$1)\ \alpha = 0, \ \beta = 1, \ \gamma = 2, \qquad 2)\ \alpha = 0, \ \beta = 1, \ \gamma > 2,$$
$$3)\ \alpha = 0, \ \beta > 1, \qquad 4)\ \alpha > 0.$$

Setzen wir

$$\varkappa = p, \quad \lambda = p + q - 1, \quad \mu = r - 2, \quad \nu = r + s - 3,$$
$$p = \varkappa, \quad q = \lambda - \varkappa + 1, \quad r = \mu + 2, \quad s = \nu - \mu + 1,$$

so gehen die erste und dritte Gleichung mit ihren Nebenbedingungen in einander über. Den vier gemachten Abtheilungen entsprechen in Bezug auf die symmetrischen Functionen die Abtheilungen

$$1)\ \varkappa = 0, \ \lambda = 0, \ \mu = 0, \qquad 2)\ \varkappa = 0, \ \lambda = 0, \ \mu > 0,$$
$$3)\ \varkappa = 0, \ \lambda > 0, \qquad 4)\ \varkappa > 0.$$

In den symmetrischen Functionen treten die Unterschiede der einzelnen Abtheilungen am auffallendsten hervor; denn es ist die bekannte Eintheilung in solche erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung. Wir können daher über die Anzahl der Gleichungen der Gruppe n folgenden Satz aussprechen:

Die Anzahl der Gleichungen der Gruppe n ist gleich der Anzahl einfachster symmetrischer Functionen vom Grade $(n - 6)$ von vier Variabeln; die Anzahl der Gleichungen, in denen $p = 0$, $q = 1$, $r = 2$; $p = 0$, $q = 1$, $r > 2$; $p = 0$, $q > 1$; $p > 0$ ist, kommt bezw. der Anzahl von symmetrischen Functionen erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung gleich.

Nach dieser Untersuchung über die Anzahl von Gleichungen in einer Gruppe kehren wir zur Betrachtung der linken Seite unserer Functionalgleichung zurück.

§ 5.

Setzen wir:

$$(20)\qquad u = \frac{v_1+v_2+v_3}{2},\quad u_1 = \frac{v_1-v_2-v_3}{2},\quad u_2 = \frac{-v_1+v_2-v_3}{2},\quad u_3 = \frac{-v_1-v_2+v_3}{2},$$

so wird

$$u+u_1=v_1,\quad u-u_1=v_2+v_3,\quad u_2+u_3=-v_1,\quad u_2-u_3=v_2-v_3,$$
$$u+u_2=v_2,\quad u-u_2=v_3+v_1,\quad u_3+u_1=-v_2,\quad u_3-u_1=v_3-v_1,$$
$$u+u_3=v_3,\quad u-u_3=v_1+v_2,\quad u_1+u_2=-v_3,\quad u_1-u_2=v_1-v_2.$$

Diese Werthe lehren, dass die Gleichung besteht

$$(21)\quad S\left(\frac{v_1+v_2+v_3}{2},\ \frac{v_1-v_2-v_3}{2},\ \frac{v_2-v_3-v_1}{2},\ \frac{v_3-v_1-v_2}{2}\right) = S(0, v_1, v_2, v_3).$$

Es muss daher die Summe

$$\sum (p, q, r, s)\ [p, q, r, s]$$

durch die Substitution (20) in ihren Werth für $u = 0$, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$ übergehen. Für $u = 0$, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$ geht der Ausdruck $[0, q, r, s]$ in die alternirende Function

$$(22)\quad [q, r, s] = \begin{vmatrix} v_1^{2q} & v_1^{2r} & v_1^{2(r+s)} \\ v_2^{2q} & v_2^{2r} & v_2^{2(r+s)} \\ v_3^{2q} & v_3^{2r} & v_3^{2(r+s)} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} q = 1, 2, 3 \ldots \\ s = 1, 2, 3 \ldots \\ r > q \\ p + 2r + s = n \end{pmatrix}$$

von v_1^2, v_2^2, v_3^2 über, dagegen verschwinden alle Ausdrücke $[p, q, r, s]$, in denen p einen von Null verschiedenen Werth hat.

Giebt man in der Substitution (20) einer der Grössen v_1, v_2, v_3 das entgegengesetzte Zeichen, so gehen stets zweimal zwei der Grössen u, u_1, u_2, u_3 mit wechselndem Vorzeichen in einander über; eine alternirende (oder eine symmetrische) Function von u^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2 verwandelt sich daher durch die Substitution in eine Function von v_1^2, v_2^2, v_3^2. Vertauscht man aber zwei der Variabeln v_1, v_2, v_3 mit einander, so bleiben u und eine der Grössen u_1, u_2, u_3 unverändert, während die beiden übrigen in einander übergehen. Es folgt hieraus, dass eine alternirende Function von u^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2 sich durch die Substitution (20) in eine alternirende Function von v_1^2, v_2^2, v_3^2 verwandelt.

Führen wir daher die Substitution (20) in dem Ausdruck $[p, q, r, s]$, welcher eine alternirende Function von u^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2 ist, aus, so muss er in eine alternirende Function von v_1^2, v_2^2, v_3^2 übergehen. Da

die Function homogen von demselben Grade bleibt, so muss sie sich linear und homogen aus den Ausdrücken:

$$\begin{vmatrix} v_1^{2\alpha'} & v_1^{2\beta'} & v_1^{2\gamma'} \\ v_2^{2\alpha'} & v_2^{2\beta'} & v_2^{2\gamma'} \\ v_3^{2\alpha'} & v_3^{2\beta'} & v_3^{2\gamma'} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha' = 0, 1, 2, \ldots \\ \alpha' < \beta' < \gamma' \\ \alpha + \beta + \gamma = n \end{pmatrix}$$

mit Zahlencoefficienten zusammensetzen. Wenn wir $v_i = 0$ setzen, so wird $u = -u_i$ $(i = 1, 2, 3)$; $[p, q, r, s]$ muss daher als alternirende Function von u^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2 verschwinden. Das Gleiche muss von den Ausdrücken gelten, aus denen sich $[p, q, r, s]$ linear und homogen zusammensetzt; es kommen daher in Wirklichkeit nur solche Ausdrücke vor, in denen $\alpha' > 0$ ist. Wir können daher kurz sagen, dass sich $[p, q, r, s]$ nach der Substitution (20) in eine homogene, lineare Function von Ausdrücken von der Form (22) zerlegen lässt, wobei die Zahlen q, r, s denselben Bedingungen wie früher unterworfen bleiben, wenn man sich $p = 0$ dazu gehörig denkt.

Fassen wir die Gesammtheit der Glieder $2n^{\text{ter}}$ Dimension in der Entwickelung von S in's Auge und bezeichnen sie mit S_n, so lässt sich diese nach der Substitution (20) auf die Form bringen:

$$S_n = \sum_{q', r', s'} A_{q', r', s'} [q', r', s'] \quad \begin{pmatrix} q' = 1, 2, 3, \ldots & s' = 1, 2, 3, \ldots & r' > q' \\ q' + 2r' + s' = n \end{pmatrix},$$

wo die Grössen $A_{q,r,s}$ lineare homogene Functionen der früheren Coefficienten (p, q, r, s) mit $2p + q + 2r + s = n$ sind.

Setzt man andrerseits $u = 0$, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$, so werden die Glieder $2n^{\text{ter}}$ Dimension

$$S_n = \sum_{q, r, s} (0, q, r, s) [q, r, s] \quad \begin{pmatrix} q = 1, 2, 3, \ldots, & r > q, & s = 1, 2, 3 \\ q + 2r + s = n \end{pmatrix}.$$

Nach der Gleichung (21) müssen daher die Relationen bestehen:

$$A_{q', r', s'} - (0, q', r', s') = 0.$$

Die Werthsysteme, in denen $p = 0$, $q = 1$, $r > 2$ ist, sind gerade in der Anzahl $\left[\frac{n}{2}\right] - 3$ vorhanden. Nehmen wir daher die Gleichungen

$$(23) \qquad A_{1, r', s'} - (0, 1, r', s') = 0 \quad \begin{pmatrix} r' = 3, 4, \cdots \left[\frac{n}{2}\right] - 1 \\ 2r' + s' = n - 1 \end{pmatrix},$$

so haben wir gerade die genügende Anzahl von Relationen, die zwischen den linken Seiten der Gleichungen für $p = 0$, $q = 1$ bestehen müssen. Aber es ist noch zu beweisen, dass die Determinante aus den Coeffi-

cienten der $\left[\frac{n}{2}\right] - 3$ Grössen $(0, 1, r, s]$, in denen $r > 2$ ist, nicht verschwindet.

Setzen wir dieses als bewiesen voraus, so lassen sich sicher aus dem Gleichungensystem (23) die Grössen $(0, 1, 3, n-7)$, $(0, 1, 4, n-9)\ldots$ $\left(0, 1, \left[\frac{n}{2}\right] - 1,\ n - 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$ als homogene lineare Functionen der Grösse $(0, 1, 2, n-5)$ und der anderen Grössen (p, q, r, s) ausdrücken, in denen nicht gleichzeitig $p = 0$, $q = 1$ ist. Nehmen wir an, die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ seien so bestimmt, dass alle Gleichungen bis zur n^{ten} Gruppe excl. erfüllt sind, so verschwinden nach dem Früheren alle Grössen (p, q, r, s), in denen nicht gleichzeitig $p = 0$, $q = 1$ ist. Es werden daher die Grössen $(0, 1, r, s)$, in denen $r > 2$ ist, gleich $(0, 1, 2, n-5)$ multiplicirt mit rationalen Zahlenfactoren. Bestimmen wir also a_{n-1} aus der Gleichung $(0, 1, 2, n-5) = 0$, so werden auch alle übrigen Gleichungen $(0, 1, r, s) = 0$ erfüllt. Da nun die erste aller Gruppen, nämlich die Gruppe 6, nur aus einer Gleichung besteht, so wird bei der einfachen Bestimmung von a_5 aus der ersten Gleichung für die Gruppe 7 und so der Reihe nach durch die Bestimmung des nächstfolgenden Coefficienten aus der ersten Gleichung jeder Gruppe für jede beliebige Gruppe unsere Voraussetzung zutreffend. *Es werden also durch die Bestimmung der Coefficienten $a_5, a_6, \ldots$ aus den ersten Gleichungen der Gruppen sämmtliche Gleichungen erfüllt.*

II. Untersuchung der Potenzreihe auf ihre Convergenz.

§ 6.

Aus der Functionalgleichung lässt sich in folgender Weise eine Formel für $\sigma(2u)$ herleiten. Setzen wir $u_2 = u - u_1$, $u_3 = 0$, so geht die Functionalgleichung über in:

$$\sigma^3(u - u_1)\,\sigma(u + u_1) - \sigma^3(u_1)\,\sigma(2u - u_1) - \sigma^3(u)\,\sigma(u - 2u_1) = 0.$$

Wir differentiiren diese Gleichung dreimal hinter einander nach u_1 und setzen dann $u_1 = 0$. Führen wir vorübergehend die Zeichen ein

$$\sigma^3(u - u_1)\,\sigma(u + u_1) = P, \qquad \sigma^3(u_1)\,\sigma(2u - u_1) = Q,$$
$$\sigma^3(u)\,\sigma(u - 2u_1) = R$$

und bezeichnen in der üblichen Weise $\frac{d^n\sigma(u)}{du^n}$ mit $\sigma^{(n)}(u)$, so kommt:

$$\frac{\partial P}{\partial u_1} = \sigma^2(u - u_1)\left\{-3\sigma'(u - u_1)\,\sigma(u + u_1) + \sigma(u - u_1)\,\sigma'(u + u_1)\right\},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u_1^2} = \sigma(u-u_1)\{\sigma[\sigma'(u-u_1)]^2\sigma(u+u_1) - 6\sigma(u-u_1)\sigma'(u-u_1)\sigma'(u+u_1) + 3\sigma(u-u_1)\sigma''(u-u_1)\sigma(u+u_1) + \sigma^2(u-u_1)\sigma''(u+u_1)\},$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial u_1^3} = -\sigma'(u-u_1)\{6[\sigma'(u-u_1)]^2\sigma(u+u_1) - 6\sigma(u-u_1)\sigma'(u-u_1)\sigma'(u+u_1) + 3\sigma(u-u_1)\sigma''(u-u_1)\sigma(u+u_1) + \sigma^2(u-u_1)\sigma''(u+u_1)\}$$
$$+\sigma(u-u_1)\{-15\sigma'(u-u_1)\sigma''(u-u_1)\sigma(u+u_1) + 12[\sigma'(u-u_1)]^2\sigma'(u+u_1) + 9\sigma(u-u_1)\sigma''(u-u_1)\sigma'(u+u_1) - 8\sigma(u-u_1)\sigma'(u-u_1)\sigma''(u+u_1) - 3\sigma(u-u_1)\sigma'''(u-u_1)\sigma(u+u_1) + \sigma^2(u-u_1)\sigma'''(u+u_1)\}.$$

Den Werth von $\frac{\partial^3 Q}{\partial u_1^3}$ können wir, soweit er hier in Betracht kommt, unmittelbar anschreiben; es ergiebt sich:

$$\frac{\partial^3 Q}{\partial u_1^3} = 6[\sigma'(u_1)]^3\,\sigma(2u-u_1) + \sigma(u_1)\,M,$$

wo M eine ganze rationale Function von $\sigma(u_1)$, $\sigma(2u-u_1)$, u. s. w. ist. Endlich haben wir:

$$\frac{\partial^3 R}{\partial u_1^3} = -8\sigma^3(u)\,\sigma'''(u-2u_1).$$

Wir erhalten hieraus:

$$\left[\frac{\partial^3 P}{\partial u_1^3}\right]_{u_1=0} = -18\sigma^2(u)\,\sigma'(u)\,\sigma''(u) + 12\sigma(u)\,[\sigma'(u)]^3 - 2\sigma^3(u)\,\sigma'''(u),$$

$$\left[\frac{\partial^3 Q}{\partial u_1^3}\right]_{u_1=0} = 6a_1^3\sigma(2u); \quad \left[\frac{\partial^3 R}{\partial u_1^3}\right]_{u_1=0} = -8\sigma^3(u)\,\sigma'''(u).$$

Bilden wir nun die Gleichung $\left[\frac{\partial^3 P}{\partial u_1^3} + \frac{\partial^3 Q}{\partial u_1^3} + \frac{\partial^3 R}{\partial u_1^3}\right]_{u_1=0} = 0$, so kommt:

(1a) $$a_1^3\sigma(2u) = 2\sigma(u)\,[\sigma'(u)]^3 - 3\sigma^2(u)\,\sigma'(u)\,\sigma''(u) + \sigma^3(u)\,\sigma'''(u),$$

oder

(2a) $$\sigma(2u) = \frac{1}{a_1^3}\,\sigma^4(u)\,\frac{d^3\log\sigma(u)}{du^3}.$$

Nehmen wir an, die Potenzreihe für $\sigma(u)$ convergire für $|u|<\varrho$, so lässt sich die rechte Seite der Gleichung (2a) in eine Potenzreihe von u entwickeln, welche sicher ebenfalls für $|u|<\varrho$ convergirt. Ersetzen wir daher in (2a) u durch $\frac{u}{2}$, so erhalten wir $\sigma(u)$ durch eine neue Potenzreihe ausgedrückt, welche sicher für $|u|<2\varrho$ convergirt. Da diese neue Potenzreihe für $|u|<\varrho$ mit der alten übereinstimmt, so muss sie überhaupt mit ihr identisch sein; es convergirt also auch schon die ursprüngliche Potenzreihe für $\sigma(u)$ für $|u|<2\varrho$. In derselben Weise weiterschliessend gelangt man zu dem Resultat,

dass die im ersten Abschnitt bestimmte Potenzreihe für $\sigma(u)$ für jeden im Endlichen gelegenen Werth von u convergirt, also *beständig convergent* ist, wenn sie überhaupt für irgend welche Werthe von u convergirt.

Daraus lässt sich nun mit Zuhülfenahme einer speciellen der Functionalgleichung genügenden Function beweisen, dass die Potenzreihe, welche der Functionalgleichung formell genügt, bei beliebigen Werthen von a_1, a_2, a_3, a_4, mit Ausnahme von $a_1 = 0$, beständig convergent ist. Aus der Gleichung

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}[\cos 2\alpha - \cos 2\beta]$$

und der Identität:

$$(\alpha - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1) + (\alpha - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

folgt unmittelbar, dass $\sin u$ eine Function ist, welche unserer Functionalgleichung genügt. Aus der bekannten Entwickelung von $\sin u$ ersehen wir, dass hiernach für

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{3!}, \quad a_3 = \frac{1}{5!}, \quad a_4 = -\frac{1}{7!}$$

wirklich eine beständig convergente Potenzreihe von u existirt. In der allgemeinen Potenzreihe sind die Coefficienten rationale Functionen von a_1, a_2, a_3, a_4, welche nur Potenzen von a_1 zu Nennern haben. Für die obigen bestimmten Werthe von a_1, a_2, a_3, a_4 ist die Potenzreihe beständig convergent; lassen wir nun von diesen bestimmten Werthen ausgehend die Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 sich stetig ändern, so ändern sich auch, so lange a_1 von Null verschieden bleibt, sämmtliche Coefficienten der Potenzreihe stetig. Bei dieser stetigen Aenderung der Coefficienten kann die Potenzreihe nicht plötzlich überhaupt zu convergiren aufhören und muss also, da, wenn sie überhaupt convergirt, sie auch beständig convergent ist, fortwährend beständig convergent bleiben. Da man von dem speciellen Werthsystem

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{3!}, \quad a_3 = \frac{1}{5!}, \quad a_4 = -\frac{1}{7!}$$

zu jedem anderen Werthsystem a_1, a_2, a_3, a_4 einen stetigen Uebergang machen kann, ohne dass a_1 den Werth Null passirt, so muss die aufgestellte Potenzreihe *für jedes beliebige Werthsystem* a_1, a_2, a_3, a_4, *in dem* $a_1 \gtrless 0$ *ist, beständig convergent sein.*

§ 7.

Der Fall $a_1 = 0$, den wir bisher ausschliessen mussten, erledigt sich sehr leicht. Es gilt dann nicht mehr die Behauptung, dass es keine Gleichung zwischen a_1, a_2, a_3, a_4 gebe; denn die erste Gleichung

muss bei noch unbestimmten Werthen der Coefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 von der Gestalt sein

$$N a_1^3 a_5 + N_1 a_1^2 a_2 a_4 + N_2 a_1^2 a_3^2 + N_3 a_1 a_2^2 a_3 + N_4 a_2^4 = 0.$$

Für $a_1 = 0$ folgt aus dieser Gleichung $a_2 = 0$, falls nicht zufällig N_4 verschwindet. In der That hat N_4 einen von Null verschiedenen Werth; aber wir wollen uns nicht damit aufhalten, dies zu beweisen und ferner zu zeigen, wie aus der Reihe unserer Gleichungen (12) gefolgert werden kann, dass nicht nur für a_2, sondern für sämmtliche Coefficienten aus $a_1 = 0$ der Werth Null resultirt. Denn wir kommen auf folgendem Wege einfacher zu dem Schluss, dass für $a_1 = 0$ auch $\sigma(u)$ identisch Null sein muss, oder, mit anderen Worten, dass für $a_1 = 0$ keine Potenzreihe existirt, welche unsere Functionalgleichung erfüllt. Die Gleichung (2a) lautet in der Form, wie sie die Ableitung direct ergiebt:

$$\sigma^4(u) \frac{d^3 \log \sigma(u)}{du^3} = a_1^3 \sigma(2u);$$

für $a_1 = 0$ erhalten wir also:

$$\sigma^4(u) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^3 \log \sigma(u)}{du^3} = 0.$$

Die erste Gleichung drückt gerade unsere Behauptung aus. Aus der zweiten Gleichung folgt, da $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{d \log \sigma(u)}{\sigma(u)}$ eine ungerade Function sein muss:

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = cu \quad \text{oder} \quad \sigma'(u) = c\sigma(u)\, u.$$

Nehmen wir an, a_n sei der erste von Null verschiedene Coefficient in der Potenzreihe für $\sigma(u)$, setzen also

$$\sigma(u) = a_n u^{2n-1} + \cdots,$$

so folgt nach der vorausgehenden Gleichung:

$$(2n-1)\, a_n u^{2n-2} + \cdots = c a_n u^{2n} + \cdots,$$

also

$$a_n = 0.$$

Es führt somit auch das Verschwinden des zweiten Factors zu dem Resultat, *dass für $a_1 = 0$ alle Coefficienten in der für $\sigma(u)$ angenommenen Potenzreihe verschwinden müssen.*

Wir haben, indem wir für $\sigma(u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe annahmen, nur solche Functionen erhalten können, die in $u = 0$ keine singuläre Stelle besitzen. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass eine unserer Functionalgleichung genügende Function für $u = 0$ nicht unendlich werden kann. Setzen wir nämlich in der Functionalgleichung $u_3 = u - \delta$, so folgt:

$$\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u+u_2-\delta)\,\sigma(u_2-u+\delta)$$
$$+\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u+u_1-\delta)\,\sigma(u-u_1-\delta)$$
$$+\sigma(2u-\delta)\,\sigma(\delta)\,\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)=0.$$

Man kann nun offenbar die Grössen u, u_1, u_2 so wählen, dass die Function $\sigma(u)$, wenn eine solche überhaupt existirt, für keinen der Werthe $2u$, $u+u_1$, $u+u_2$, $u-u_2$, u_2-u, u_1+u_2, u_1-u_2 weder Null noch Unendlich wird. Dann können wir δ so klein annehmen, dass auch dasselbe gilt für die um δ vermehrten oder verminderten Argumente. Lassen wir nun δ immer kleiner und kleiner werden, so bleiben die beiden ersten Glieder in der linken Seite unserer Gleichung endlich und der Factor von $\sigma(\delta)$ im dritten Gliede von Null verschieden; es kann daher, wenn die Gleichung bestehen soll, $\sigma(\delta)$ nicht unendlich gross werden.

Es wäre noch denkbar, dass eine Function $\sigma(u)$ der Functionalgleichung genügte, für welche das Gebiet der Variabeln sich auf einen Bereich beschränkte, der die Nullstelle weder im Innern noch an der Grenze enthält. Doch wollen wir derartige Functionen von vorn herein ausschliessen.

Wir sind somit zu dem Resultat gelangt:

Die allgemeinste eindeutige in der ganzen Ebene definirte analytische Function, welche der Functionalgleichung

$$\left.\begin{aligned}&\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)\\+&\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1)\\+&\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)\end{aligned}\right\}=0$$

genügt, ist eine ungerade ganze (transcendente) Function von u, die vier willkürliche Constante enthält.

III. Beziehung der allgemeinen σ-Function zu der speciellen in der Theorie der elliptischen Functionen gebräuchlichen und den elliptischen Functionen selbst.

§ 8.

Für die Function $\varphi(u)$, welche zu der allgemeinen σ-Function in der durch die Gleichung

$$\varphi(u)=-\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} \tag{1b}$$

definirten Beziehung steht, lässt sich aus der Functionalgleichung eine bemerkenswerthe Differentialgleichung herleiten.

Bezeichnen wir die Functionalgleichung kurz mit

$$A + B + C = 0$$

und führen vorübergehend die Bezeichnung ein:

$$U_i = \log \sigma(u + u_i) + \log \sigma(u - u_i), \quad (i = 1, 2, 3),$$

so erhalten wir, wenn wir die Functionalgleichung noch einmal anschreiben und dann zweimal nach u differentiiren:

$$A + B + C = 0,$$

$$A \frac{\partial U_1}{\partial u} + B \frac{\partial U_2}{\partial u} + C \frac{\partial U_3}{\partial u} = 0,$$

$$A\left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2\right] + B\left[\frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)^2\right] + C\left[\frac{\partial^2 U_3}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial U_3}{\partial u}\right)^2\right] = 0.$$

Durch Elimination von A, B, C folgt hieraus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial U_1}{\partial u} & \frac{\partial U_2}{\partial u} & \frac{\partial U_3}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial^2 U_3}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial U_3}{\partial u}\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Differentiiren wir diese Gleichung zweimal nach u_1, so kommen Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial u \partial u_1} V_{2,3} - \left\{\frac{\partial^3 U_1}{\partial u^2 \partial u_1} + 2 \frac{\partial U_1}{\partial u} \frac{\partial^2 U_1}{\partial u \partial u_1}\right\} W_{2,3} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 U_1}{\partial u \partial u_1^2} V_{2,3} - \left\{\frac{\partial^4 U_1}{\partial u^2 \partial u_1^2} + 2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial u \partial u_1}\right)^2 + 2 \frac{\partial U_1}{\partial u} \frac{\partial^3 U_1}{\partial u \partial u_1^2}\right\} W_{2,3} = 0.$$

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen die Ausdrücke $V_{2,3}$, $W_{2,3}$, so erhalten wir die einfache Gleichung

$$\text{(2b)} \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial u \partial u_1}\left\{\frac{\partial^4 U_1}{\partial u^2 \partial u_1^2} + 2\left(\frac{\partial^3 U_1}{\partial u \partial u_1}\right)^2\right\} - \frac{\partial^3 U_1}{\partial u \partial u_1^2} \cdot \frac{\partial^3 U_1}{\partial u^2 \partial u_1} = 0.$$

Da in U_1 nur die Summe und die Differenz der Variabeln u, u_1 vorkommen, so kann man die partiellen Ableitungen nach u und u_1 durch die nach dem ganzen Argument genommenen unmittelbar ausdrücken. Man erhält:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial u_1} = \frac{d^2 \log \sigma(u + u_1)}{d(u + u_1)^2} - \frac{d^2 \log \sigma(u - u_1)}{d(u - u_1)^2};$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial u^2 \partial u_1^2} = \frac{d^4 \log \sigma(u + u_1)}{d(u + u_1)^4} + \frac{d^4 \log \sigma(u - u_1)}{d(u - u_1)^4};$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial u \partial u_1^2} = \frac{^3 \log \sigma(u + u_1)}{d(u + u_1)^3} + \frac{d^3 \log \sigma(u - u_1)}{d(u - u_1)^3};$$

$$\frac{\partial^3 U_1}{\partial u^2 \partial u_1} = \frac{d^3 \log \sigma(u + u_1)}{d(u + u_1)^3} - \frac{d^3 \log \sigma(u - u_1)}{d(u - u_1)^3}.$$

Die rechten Seiten kann man nach der Definitionsgleichung (1b) durch die Werthe von $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$, $\varphi''(u)$ für $u+u_1$ und $u-u_1$ ausdrücken und erhält so durch Einsetzen in die Gleichung (2b) die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}&\{\varphi(u+u_1)-\varphi(u-u_1)\}\{\varphi''(u+u_1)+\varphi''(u-u_1)\}\\&\quad-2\{\varphi(u+u_1)-\varphi(u-u_1)\}^3\\&\quad-\{[\varphi'(u+u_1)]^2-[\varphi'(u-u_1)]^2\}=0.\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung gilt für alle Werthe von u und u_1. Denken wir sie uns für ein zweites Werthepaar v, v_1 gebildet, welches dieselbe Summe wie u, u_1 hat, sodass also

$$u+u_1=v+v_1=w$$

gesetzt werden kann, so haben wir, wenn

$$u-u_1=k,\quad v-v_1=l$$

gesetzt wird, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\{\varphi(w)-\varphi(k)\}\{\varphi''(w)+\varphi''(k)\}-2\{\varphi(w)-\varphi(k)\}^2\\-\{[\varphi'(w)]^2-[\varphi'(k)]^2\}=0,\\\{\varphi(w)-\varphi(l)\}\{\varphi''(w)+\varphi''(l)\}-2\{\varphi(w)-\varphi(l)\}^2\\-\{[\varphi'(w)]^2-[\varphi'(l)]^2\}=0.\end{aligned}$$

Eliminiren wir $\varphi''(w)$ aus diesen beiden Gleichungen, so kommt:

$$\begin{aligned}[\varphi'(w)]^2=4\varphi^3(w)+\left\{\frac{\varphi''(k)-\varphi''(l)}{\varphi(k)-\varphi(l)}-6[\varphi(k)+\varphi(l)]\right\}\varphi^2(w)\\+\left\{\frac{\varphi'^2(k)-\varphi'^2(l)}{\varphi(k)-\varphi(l)}+4\varphi(k)\varphi(l)+2[\varphi(k)+\varphi(l)]^2\right.\\\left.-[\varphi(k)+\varphi(l)]\frac{\varphi''(k)-\varphi''(l)}{\varphi(k)-\varphi(l)}\right\}\varphi(w)\\+\varphi(k)\varphi(l)\frac{\varphi''(k)-\varphi''(l)}{\varphi(k)-\varphi(l)}-2\varphi(k)\varphi(l)[\varphi(k)+\varphi(l)]\\+\frac{\varphi(k)[\varphi'(l)]^2-\varphi(l)[\varphi'(k)]^2}{\varphi(k)-\varphi(l)}.\end{aligned}\tag{3b}$$

Für die Grössen k und l können wir uns beliebige Constante gesetzt denken. Wenn die Function $\sigma(u)$ unserer Functionalgleichung genügt, so muss auch die Function $\varphi(w)$ diese Differentialgleichung erfüllen und zwar bei beliebigen Werthen von k und l, woraus folgt, dass die Coefficienten von k und l unabhängige Constante sein müssen. Wir sehen daher, dass $\varphi(u)$ einer Differentialgleichung von der Form

(4 b) $$[\varphi'(u)]^2 = 4\varphi^3(u) - G_1\varphi^2(u) - G_2\varphi(u) - G_3$$

genügen muss. Wenn wir die Function $\sigma(u)$ als gegeben voraussetzen, so lässt sich aus der Entwickelung von $\sigma(u)$ die Entwickelung von $\varphi(u)$ herleiten. Man findet:

(5 b) $$\varphi(u) = -\frac{d}{du}\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{u^2} - \frac{2a_2}{a_1} - 6\frac{2a_1a_3 - a_2^2}{a_1^2}u^2$$
$$- 10\frac{3a_1a_4 - 3a_1a_2a_3 + a_2^3}{a_1^3}u^4 + \ldots.$$

Setzt man diese Entwickelung für $\varphi(u)$ in die Differentialgleichung (4 b) ein, so erhält man für die Coefficienten G_1, G_2, G_3 die folgenden Werthe

(6 b) $$G_1 = -24\frac{a_2}{a_1}; \quad G_2 = -24\frac{10a_1a_3 - 3a_2^2}{a_1^2};$$
$$G_3 = -24\frac{35a_1^2a_4 - 15a_1a_2a_3 + 3a_2^3}{a_1^3}.$$

Man kann rückwärts aus der Gleichung (4 b) beweisen, dass die Coefficienten in der Gleichung (3 b) in der That von k und l unabhängig sind. Durch Differentiation folgt nämlich aus (4 b):

(7 b) $$\varphi''(u) = 6\varphi^2(u) - G_1\varphi(u) - G_2,$$

und daraus leitet man unmittelbar die Gleichung ab

$$\frac{\varphi''(k) - \varphi''(l)}{\varphi(k) - \varphi(l)} - 6[\varphi(k) + \varphi(l)] = -G_1.$$

Indem man einfach für $[\varphi'(k)]^2$, $[\varphi'(l)]^2$, $\varphi''(k)$, $\varphi''(l)$, die aus (4 b) und (7 b) entnommenen Werthe einsetzt, erhält man für den Factor von $\varphi(w)$ den Werth $-G_2$ und für das absolute Glied den Werth $-G_3$.

Die Differentialgleichung (4 b) sagt aus, dass $\varphi(u)$ eine elliptische Function ist. *Es hat also die allgemeine σ-Function die Eigenschaft, dass die zweite Ableitung ihres Logarithmus eine elliptische Function ist.*

§ 9.

Setzen wir

(8 b) $$\varphi(u) = \psi(u) - 2\frac{a_2}{a_1},$$

so kommt für $\psi(u)$ die Differentialgleichung

$$[\psi'(u)]^2 = 4\psi^3(u) - \left(G_1 + 24\frac{a_2}{a_1}\right)\psi^2(u) - \left(G_2 - 48\frac{a_2^2}{a_1^2} - 4\frac{a_2}{a_1}G_1\right)\psi(u)$$
$$- G_3 - 32\frac{a_2^3}{a_1^3} - 4\frac{a_2^2}{a_1^2}G_1 + 2\frac{a_2}{a_1}G_2,$$

oder mit Einsetzung der Werthe von G_1, G_2, G_3:

$$(9b) \qquad [\psi'(u)]^2 = 4\psi^3(u) + 120\,\frac{2a_1a_3 - a_2^2}{a_1^2}\,\psi(u) + 280\,\frac{3a_1^2a_4 - 3a_1a_2a_3 + a_2^3}{a_1^3}.$$

Die einfachste elliptische Function $\wp(u)$ genügt der Differentialgleichung

$$[\wp'(u)]^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3$$

und hat die Entwickelung

$$\wp(u) = \frac{1}{v^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots.$$

Durch Vergleichung mit der Differentialgleichung (9b), der Definitionsgleichung (8b) von $\psi(u)$ und der Entwickelung (5b) von $\varphi(u)$ folgt übereinstimmend, dass sich $\varphi(u)$ nur um die Constante $2\frac{a_2}{a_1}$ von *der* Function $\wp(u)$ unterscheidet, deren Invarianten g_2, g_3 die Werthe haben:

$$(10b) \qquad g_2 = -120\,\frac{2a_1a_3 - a_2^2}{a_1^2}; \quad g_3 = -280\,\frac{3a_1^2a_4 - 3a_1a_2a_3 + a_2^3}{a_1^3}.$$

Denken wir uns $\wp(u)$ für diese Invarianten gebildet, so haben wir:

$$(11b) \qquad \varphi(u) = \wp(u) - 2\frac{a_2}{a_1}.$$

Bezeichnen wir die specielle σ-Function, welche zu $\wp(u)$ gehört, mit $\bar{\sigma}(u)$, so folgt aus (11b) durch Integration:

$$\frac{d\log\sigma(u)}{du} = \frac{d\log\bar{\sigma}(u)}{du} + 2\frac{a_2}{a_1}u;$$

die Integrationsconstante muss nämlich den Werth Null haben, da $\frac{d\log\sigma(u)}{du}$ und $\frac{d\log\bar{\sigma}(u)}{du}$ ungerade Functionen sind. Durch nochmalige Integration ergiebt sich:

$$\log\sigma(u) = \log\bar{\sigma}(u) + \frac{a_2}{a_1}u^2 + \log C$$

oder

$$\sigma(u) = Ce^{\frac{a_2}{a_1}u_2}\cdot\bar{\sigma}(u).$$

Die Entwickelung von $\bar{\sigma}(u)$ fängt mit u an, die Entwickelung von $e^{\frac{a_2}{a_1}u^2}$ mit 1, die von $\sigma(u)$ mit a_1u; daher muss C den Werth a_1 haben. Wir kommen daher zu der endgültigen Gleichung:

(12 b) $$\sigma(u) = a_1 e^{\frac{a_2}{a_1} u^2} \cdot \bar{\sigma}(u),$$

worin den beiden Invarianten g_2, g_3 von $\bar{\sigma}(u)$ die Werthe (10b) zu ertheilen sind.

Die allgemeinste (eindeutige) Function, welche der betrachteten Functionalgleichung genügt, unterscheidet sich also von der speciellen, zwei willkürliche Constante enthaltenden σ-Function nur durch einen Factor von der Form Ce^{cu^2}.

Berlin, im September 1882.

Ueber ternäre lineare Formen.

Von

E. Study in Leipzig.

Der Fundamentalsatz der symbolischen Methoden der Invariantentheorie ist bekanntlich der Satz von der symbolischen Darstellbarkeit *aller Invarianten* allgemeiner Formen. Derselbe kann, wie es durch Clebsch ursprünglich geschehen ist, so ausgesprochen werden, dass man sagt, es seien alle Invarianten beliebiger (allgemeiner) Formen formal darstellbar als Invarianten *linearer* Formen. Neben diesen Satz stellt sich aber noch ein zweiter, nicht minder wichtiger, welcher bisher, wie es scheint, als selbstverständlich angenommen worden ist, aber ebensowohl einer ausdrücklichen Formulirung, als auch eines Beweises bedarf; der Satz nämlich, dass man durch das Operiren mit den symbolischen Ausdrücken auch *alle Relationen* zwischen den Invarianten beliebiger Formen erhält.

Dieser Satz braucht nach Gordan nur für die Invarianten *linearer* Formen bewiesen zu werden, da man aus jeder identischen Relation zwischen den Invarianten beliebiger Formen durch Evectantenprocesse eine ihr äquivalente Relation zwischen den Invarianten linearer Formen herleiten kann. (Indem man nämlich auf alle möglichen Arten gleichwerthige Symbole vertauscht, und aus den entstehenden Ausdrücken das arithmetische Mittel nimmt). Für lineare Formen aber kann der Beweis leicht geführt werden durch die Gordan'schen Reihenentwickelungen.

Die Reihenentwickelungen sind solche identische Umformungen irgend eines symbolischen Ausdrucks A:

$$A \equiv (A-B) + (B-C) + (C-D) + \cdots,$$

welche die ausgezeichnete Eigenschaft haben, dass aus dem identischen Verschwinden von A das identische Verschwinden der einzelnen Theile $(A-B)$, $(C-D)$, ... erschlossen werden kann. Da nun diese Theile einfachere Eigenschaften haben, als der ganze Ausdruck, so ergibt sich ein recurrirendes Verfahren, welches gestattet, aus einer symbolischen Identität $A \equiv 0$ eine Reihe von anderen, einfacheren her-

zuleiten, die zusammen der Identität $A \equiv 0$ äquivalent sind. Das einfache Endergebniss kann man bei binären Formen dahin aussprechen*), *dass ein jedes verschwindende Aggregat von Invarianten linearer Formen durch identische Umformungen in Theile zerlegt werden kann, deren jeder einzelne einen Factor*

$$(ab)(cd) + (ac)(db) + (ad)(bc)$$

besitzt.

Das Folgende enthält eine Erweiterung dieses Satzes auf ternäre Formen, wo die Verhältnisse insofern weniger einfach liegen, als an Stelle von einer identischen Relation deren fünf, oder, wenn man will, sieben in Betracht gezogen werden müssen. Der betreffende Satz lautet so:

„*Wenn eine Summe von Potenzen und Producten der simultanen Invarianten beliebig vieler ternärer linearer Formen* $(X_1 U)$, $(X_2 U)\ldots$ $(U_1 X)$, $(U_2 X)\ldots$ *stets den Werth Null hat, so kann sie durch identische Umformungen in Theile zerlegt werden, welche einzeln je einen der folgenden fünf Ausdrücke, in beliebigen Indices geschrieben, als Factor haben:***)

$$\begin{aligned}
A \equiv{}& (X_2 X_3 X_4)(U X_1) - (X_3 X_4 X_1)(U X_2) + (X_4 X_1 X_2)(U X_3) \\
&- (X_1 X_2 X_3)(U X_4), \\
A' \equiv{}& (U_2 U_3 U_4)(U_1 X) - (U_3 U_4 U_1)(U_2 X) + (U_4 U_1 U_2)(U_3 X) \\
&- (U_1 U_2 U_3)(U_4 X), \\
B \equiv{}& (X_2 X_3 X_4)(X_1 Y Z) - (X_3 X_4 X_1)(X_2 Y Z) + (X_4 X_1 X_2)(X_3 Y Z) \\
&- (X_1 X_2 X_3)(X_4 Y Z), \\
B' \equiv{}& (U_2 U_3 U_4)(U_1 V W) - (U_3 U_4 U_1)(U_2 V W) + (U_4 U_1 U_2)(U_3 V W) \\
&- (U_1 U_2 U_3)(U_4 V W), \\
C \equiv{}& (U_1 U_2 U_3)(X_1 X_2 X_3) - |(U_1 X_1)(U_2 X_2)(U_3 X_3)|.\text{“}
\end{aligned}$$

So besteht z. B. zwischen den 16 Invarianten von der Form (UX),

---

*) Siehe den demnächst im Druck erscheinenden zweiten Band von P. Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von G. Kerschensteiner.

**) Ich bediene mich hier, und in späteren Aufsätzen einer Bezeichnung, welche von der gebräuchlichen etwas verschieden ist: indem ich nämlich (UX) statt U_X schreibe. Der Grund ist die grosse Unbequemlichkeit des Druckes, welche der häufig vorkommende Fall verursacht, wo sowohl der Buchstabe U als auch X noch mit einem Index versehen werden muss. Missverständnisse können durch diese rein äusserliche Veränderung der symbolischen Bezeichnungen nicht entstehen, ausgenommen im Falle der binären Formen, wo auch in den Klammerfactoren nur zwei Zeichen stehen. Hier ist aber die ganze Unterscheidung von Klammerfactoren (ab) und „Factoren erster Art“ a_x überflüssig; ich schreibe daher im binären Gebiete nur noch Klammerfactoren, setze also für a_x auch hier (ax), was nun ebenso zu behandeln ist, wie (ab).

welche man in dem simultanen System von vier Punkten und vier Linien bilden kann, eine Relation:

$$|(U_1 X_1) \ldots \ (U_4 X_4)| \equiv 0.$$

Man erhält dieselbe, indem man in der Gleichung

$$\lambda_1 (U X_1) + \lambda_2 (U X_2) + \lambda_3 (U X_3) + \lambda_4 (U X_4) = 0$$

für U der Reihe nach U_1, U_2, U_3, U_4 setzt, und dann aus den vier so entstandenen Gleichungen die Unbekannten λ eliminirt.

Die linke Seite jener Identität setzt sich aber wie es der Satz behauptet, aus Gliedern von der Form A und C zusammen, indem sie identisch gleich ist dem Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&(U_2 U_3 U_4) \{(X_2 X_3 X_4)(U_1 X_1) - (X_3 X_4 X_1)(U_1 X_2) + (X_4 X_1 X_2)(U_1 X_3) \\
&\qquad\qquad - (X_1 X_2 X_3)(U_1 X_4)\} \\
&- (U_1 X_1) \{(X_2 X_3 X_4)(U_2 U_3 U_4) - |(U_2 X_2)(U_3 X_3)(U_4 X_4)|\} \\
&+ (U_1 X_2) \{(X_3 X_4 X_1)(U_2 U_3 U_4) - |(U_2 X_3)(U_3 X_4)(U_4 X_1)|\} \\
&- (U_1 X_3) \{(X_4 X_1 X_2)(U_2 U_3 U_4) - |(U_2 X_4)(U_3 X_1)(U_4 X_2)|\} \\
&+ (U_1 X_4) \{(X_1 X_2 X_3)(U_2 U_3 U_4) - |(U_2 X_1)(U_3 X_2)(U_4 X_3)|\}.
\end{aligned}$$

Den Beweis des aufgestellten Satzes führen wir in zwei Schritten. Zuerst soll gezeigt werden, dass ein im Uebrigen beliebiges symbolisches Product $E \,.\, Q$, wenn nur der Factor E irgend einem der Ausdrücke A, A', B, B', C gleich ist, durch Anwendung beliebiger invarianter Processe immer in eine Summe von Producten gleicher Eigenschaft $\Sigma E' Q'$ übergeht; oder, wie man es auch ausdrücken kann: *dass die Aggregate $\Sigma E \,.\, Q$ gegenüber der Gruppe aller symbolischen Processe die Invarianteneigenschaft haben;* zweitens, auf Grund hiervon, dass das aufgestellte Theorem richtig ist für n lineare Formen, sobald es für $n - 1$ solche gilt.

Den ersten Theil des Beweises brauchen wir nur für die elementaren Operationen rein formaler Natur zu führen, aus welchen sich die invarianten Processe zusammensetzen; dabei dürfen wir noch von je zwei einander dualistisch gegenüberstehenden Operationen immer die eine fortlassen, und auch von den dann noch übrig bleibenden brauchen wir nur diejenigen zu beachten, welche nur den ersten Factor des Productes $E.Q$ modificiren. Hiernach haben wir nur noch die folgenden Fälle zu untersuchen:

1) Es wird in E für irgend ein Symbol X ein neues eingeführt, welches bereits in E vorhanden ist. Man erhält identisch Null, ausgenommen in dem Falle $E = B$. Dann entsteht ein einfacherer Ausdruck, welcher in B als Specialfall enthalten ist; und für welchen wir schreiben wollen:

$$B_0 \equiv (Y X_1 X_2)(Y X_3 X_4) + (Y X_1 X_3)(Y X_4 X_1) + (Y X_1 X_4)(Y X_2 X_3).$$

2) Es wird in E für irgend ein Symbol X ein neues eingeführt, welches noch nicht in E vorhanden war. E reproducirt sich mit anderen Symbolen, ausgenommen den Fall, wo $E = B_0$. Dieser Fall führt aber auf das Aggregat:

$$(YX_1X_2)(ZX_3X_4) + (YX_1X_3)(ZX_4X_2) + (YX_1X_4)(ZX_2X_3)$$
$$+ (ZX_1X_2)(YX_3X_4) + (ZX_1X_3)(YX_4X_2) + (ZX_1X_4)(YX_2X_3),$$

welches durch Addition zweier Ausdrücke B erhalten werden kann, nämlich der folgenden:

$$(YX_1X_2)(ZX_3X_4) + (YX_1X_3)(ZX_4X_2) + (YX_1X_4)(ZX_2X_3) - (X_1X_2X_3)(YX_4Z),$$
$$(ZX_1X_2)(YX_3X_4) + (ZX_1X_3)(YX_4X_2) + (ZX_1X_4)(YX_2X_3) - (X_1X_2X_3)(ZX_4Y).$$

3) Es werden in E für irgend ein Symbol X zwei neue (VW) eingeführt, die noch nicht in E vorhanden sind. Durch diese Operation kommt man, im Falle $E = A$ auf den Ausdruck C, im Falle $E = A'$ auf B', im Falle $E = B$ auf zwei Theile mit Factoren A. Nur im Falle $E = C$ ergiebt sich ein etwas verwickelteres Resultat, nämlich:

$$(U_1U_2U_3)(VX_1)(WX_2) - (U_1U_2U_3)(WX_1)(VX_2)$$
$$+ (U_1VW)(U_3X_1)(U_2X_2) - (U_1VW)(U_2X_1)(U_3X_2)$$
$$+ (U_2VW)(U_1X_1)(U_3X_2) - (U_2VW)(U_3X_1)(U_1X_2)$$
$$+ (U_3VW)(U_2X_1)(U_1X_2) - (U_3VW)(U_1X_1)(U_2X_2).$$

Fasst man hier aber etwa die Glieder mit (U_1X_1) zusammen, und führt dann das Zeichen A' ein, und verfährt dann ähnlich hinsichtlich (U_2X_1) und (U_3X_1), so findet man, dass der vorliegende Ausdruck sich in den folgenden überführen lässt:

$$(VX_2)\{(U_2U_3W)(U_1X_1) + (U_3U_1W)(U_2X_1) + (U_1U_2W)(U_3X_1) - (U_1U_2U_3)(WX_1)\}$$
$$- (WX_2)\{(U_2U_3V)(U_1X_1) + (U_3U_1V)(U_2X_1) + (U_1U_2V)(U_3X_1) - (U_1U_2U_3)(VX_1)\}$$
$$+ (U_1X_1)\{(U_2VW)(U_3X_2) - (U_3VW)(U_2X_2) + (U_2U_3V)(WX_2) - (U_2U_3W)(VX_2)\}$$
$$+ (U_2X_1)\{(U_3VW)(U_1X_2) - (U_1VW)(U_3X_2) + (U_3U_1V)(WX_2) - (U_3U_1W)(VX_2)\}$$
$$+ (U_3X_1)\{(U_1VW)(U_2X_2) - (U_2VW)(U_1X_2) + (U_1U_2V)(WX_2) - (U_1U_2W)(VX_2)\}.$$

Jeder einzelne Term hier hat einen Factor A'.

Den Fall, wo eines der Symbole $(V\,W)$ in E bereits vorkommt, brauchen wir nicht besonders zu behandeln, weil diese Operation nur eine Combination der Operationen 3) und 1) vorstellt.

4) Es werden innerhalb E zwei Symbole X und U durch Faltung beseitigt. Man erhält identisch Null.

5) Es werden innerhalb E zwei Symbole X und Y zu einen neuen, U, zusammengezogen. Im Falle $E = A$ erhält man identisch Null, im Falle $E = B$ kommt man auf A zurück, und ebenso im Falle $E = C$.

6) Die Operationen endlich, welche sich auf Symbole von E und Q zugleich beziehen, lassen sich auf die unter 2) und 3) genannten Fälle zurückführen.

Nachdem somit gezeigt ist, dass die Processe des symbolischen Rechnens jeden Ausdruck von der Form ΣEQ wieder in einen Ausdruck gleicher Art übergehen lassen, können wir nun leicht eine jede identische Relation $\Pi \equiv 0$ zwischen Invarianten der Formen

$$(X_1\,U),\ (X_2\,U),\ \ldots\ (U_1\,X),\ (U_2\,X),\ \ldots$$

so umgestalten, dass in ihren einzelnen Gliedern Factoren E zum Vorschein kommen.

Wir zeichnen zu diesem Zweck in dem vorgelegten Ausdruck Π irgend zwei Linien, oder Punkte $X_1\,X_2$ aus. Da die Gleichung $\Pi = 0$ bestehen soll für alle Werthe von X_1 und X_2, so können wir in Bezug auf diese beiden Veränderlichen die Gordan'sche Reihenentwickelung anwenden. Die Glieder dieser Reihe müssen jedes für sich verschwinden. Wie aus der Ableitung jener Reihenentwickelung hervorgeht (vgl. Gordan, Math. Ann. Bd. V, „Ueber Combinanten"), unterscheidet sich nun das erste Glied derselben von einer Polare einer Form mit einer Veränderlichen weniger nur um Vielfache von E; die übrigen Glieder aber gehen ganz ebenso aus Formen hervor, welche einen niedrigeren Gesammtgrad in den X und U haben. Werden wir also voraussetzen dürfen, dass der Satz einerseits richtig ist für Formen mit einer Veränderlichen weniger, als Π, und andrerseits für Formen von niedrigerem Gesammtgrad, so erweist er sich auch als richtig für das Aggregat Π. Denn Π wird alsdann identisch gleich einem Ausdruck, welche durch die Processe 1) ... 6) aus einem Aggregat ΣEQ hervorgeht, und also selbst die Form ΣEQ hat, plus Gliedern, welche gleichfalls Factoren E haben. Damit ist aber alles erledigt; denn wir können augenscheinlich durch wiederholte Anwendung der Reihenentwickelung erreichen, dass der Satz nur noch für die Invarianten von vier linearen Formen bewiesen zu werden braucht. Hier ist er aber selbstverständlich, da in diesem Falle überhaupt gar keine Relation bestehen kann.

Es ist nicht ohne Interesse, auch auf die Gruppirung der Relationen E zwischen den Invarianten mehrerer linearer Formen zu achten. Betrachten wir z. B. den Fall von fünf solchen Formen, welche *Punkte* vorstellen. Dann gibt es 10 Invarianten, zwischen welchen drei von einander unabhängige Relationen bestehen.

Solcher Relationen erhält man aber zunächst fünf; die erste ist etwa:

$$B_{01} \equiv (X_1 X_2 X_3)(X_1 X_4 X_5) + (X_1 X_2 X_4)(X_1 X_5 X_3) + (X_1 X_2 X_5)(X_1 X_3 X_4) \equiv 0;$$

die übrigen, $B_{02}, \ldots B_{05}$ ergeben sich aus ihr durch cyklische Permutation der Indices. Je drei von diesen Relationen sind von einander unabhängig, zwischen je vieren aber besteht eine lineare Identität, von welchen die erste

$$D_1 \equiv (X_3 X_4 X_5) B_{02} - (X_4 X_5 X_2) B_{03} + (X_5 X_2 X_3) B_{04} - (X_2 X_3 X_4) B_{05} \equiv 0$$

ist, und die übrigen wieder durch cyklische Vertauschung erhalten werden. Da zwischen je dreien der Ausdrücke D_i eine lineare Relation besteht, nämlich z. B.

$$(X_1 X_4 X_5) D_1 + (X_2 X_4 X_5) D_2 + (X_3 X_4 X_5) D_3 \equiv 0,$$

so erweisen sich die Gleichungen $D = 0$ in der That nur als mit zwei Bedingungen äquivalent.

Es lässt sich hier nun auch leicht direct einsehen, dass die Relationen zwischen den 10 Invarianten der fünf Punkte sich in der Form:

$$\sum_1^5 \varphi_\varkappa B_{0\varkappa} \equiv 0$$

darstellen lassen, wo die $\varphi_\varkappa$ beliebige ganze Functionen der 10 Invarianten sind, die nur der einen Bedingung zu genügen haben, dass der ganze Ausdruck homogen werden muss in $X_1, X_2, \ldots X_5$, und (also) auch homogen in den 10 Invarianten selbst. Ordnen wir nämlich diese einem Systeme von irgend 10 Verhältnissgrössen zu, deren relative Werthe eine neunfach ausgedehnte Mannichfaltigkeit bestimmen; so erfüllen alle Werthsysteme dieser 10 Grössen, welche als Invarianten von fünf Punkten angesehen werden können, nur eine sechsfach ausgedehnte Mannichfaltigkeit. Man überzeugt sich sofort, dass diese in keiner linearen, weniger als neunfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit enthalten ist, und dass alle quadratischen Mannichfaltigkeiten, welche sie enthalten, lineare Verbindungen der fünf quadratischen Formen $B_{0\varkappa}$ sind.

Daraus folgt aber die Behauptung für alle Mannichfaltigkeiten höherer Ordnung, sobald gezeigt werden kann, dass jene fünf quadra-

tischen Mannichfaltigkeiten zur Definition der sechsfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit hinreichend sinp. Dies ist nun in der That der Fall; denn man kann durch sieben passend gewählte unter den 10 Verhältnissgrössen die drei übrigen mit Hilfe der Relationen $B_{0\varkappa} = 0$ eindeutig bestimmen.

Aus dem hiermit Bewiesenen geht hervor, dass zur Herleitung aller Relationen zwischen Invarianten oder symbolischen Ausdrücken die symbolischen Rechnungen selbst hinreichen. Es folgt daraus insbesondere, dass das Verfahren des Symbolvertauschens, dessen man sich bei der Aufstellung der Formensysteme bedient, mehr ist als ein bloser Kunstgriff; da man zufolge des hier bewiesenen Satzes *alle* Relationen zwischen den Formen eines Formensystems auf diese Art muss erhalten können. Ich denke im Anschluss hieran demnächst eine allgemeine Methode zu entwickeln, welche gestattet: „In einem Formensystem alle Formen mit gegebenen Grad- und Ordnungszahlen durch eine kleinste Anzahl von linear unabhängigen Formen auszudrücken."

Coburg, im März 1887.

Ueber die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde.

Von

M. Pasch in Giessen.

In einer Mittheilung auf S. 154—156 des vorigen Bandes behandelt Herr Ventura Reyes y Prósper einen Satz, dessen man bedarf, um die Unabhängigkeit der projectiven Geometrie von der metrischen zu untersuchen, und berührt in den einleitenden Worten diese Unabhängigkeit selbst. Ich habe nun in meiner Schrift: „Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882", für jenen Satz den vereinfachten Beweis, welcher den Gegenstand der genannten Mittheilung bildet, bereits gegeben, über die Stellung der projectiven Geometrie jedoch eine von der üblichen abweichende Ansicht ausgesprochen und möchte mir erlauben, auf beide Punkte hier zurückzukommen.

1. Es seien $ABCFC'F'$ Punkte, welche, ohne einer Ebene anzugehören, so liegen, dass die Geraden CF und $C'F'$ die AB schneiden, etwa in G bezw. G', und dass die Punkte G und G' zwischen A und B fallen, aber nicht zwischen C und F bezw. zwischen C' und F'. Dann schneiden sich AC und BF, BC und AF, AC' und BF', BC' und AF' etwa in D, E, D', E'. Die gegebene Figur soll aus eigentlichen Punkten im Sinne des § 6 der „Vorlesungen" bestehen und überhaupt den in der Einleitung des Buches S. 3 und in § 1 S. 17—19 entwickelten Anschauungen entsprechen; es wird dies für die erweiterte Figur dann ebenfalls gelten. Bezeichnet man noch die Geraden CC', DD', EE', FF' mit c, d, e, f, so liegen keine drei in einer Ebene, aber die Paare cd, ce, df, ef je in einer Ebene.

Für den Zweck, den Herr Felix Klein: Mathem. Ann. Bd. 6, 1873, S. 138 f. verfolgt, und ebenso für die Betrachtung in § 5 meiner Schrift ist es nun vortheilhaft, nachdem man von den beiden Punkten C und F den zu G näheren etwa mit F bezeichnet hat, von den beiden Punkten C' und F' den zu G' näheren nicht mit F', sondern mit C' zu bezeichnen, wie ich dies a. a. O. in Figur 11 gethan habe. Dann schneiden sich nämlich sicher cd, ce, df, ef je in einem eigent-

lichen Punkt, und diese vier Punkte fallen überdies mit einander — und folglich G mit G' — zusammen, wenn $DED'E'$ einer Ebene angehören. Hiermit stimmt der Gedanke des Herrn Prósper überein, in dessen Figur die Buchstaben $abdefgd'e'f'g'$ an die Stelle von $ABDCEFE'F'D'C'$ treten. Der Punkt c tritt bei mir nicht auf, weil es sich dort gerade um den Fall handelt, wo von einer Begegnung der Geraden DE und $D'E'$ mit AB nichts bekannt ist.

Zugleich folgt die Umkehrung: Wenn G mit G' zusammenfällt, so liegen $DED'E'$ in einer Ebene. Diese beiden Sätze ermöglichen nun die Festlegung eines Strahlenbündels mittels zweier durch eine Ebene verbundenen Strahlen, über deren Begegnung nichts bekannt zu sein braucht. Solange gemäss den Darlegungen in § 1 S. 18 f. nur Figuren von beschränkter Ausdehnung betrachtet und solche Figuren nicht in beliebigem Masse verknüpft werden, ist es gegenstandslos, zu fragen, ob und wie viele Scheitel des Strahlenbündels existiren. Diese Frage kommt vielmehr erst von einem anderen Standpunkte aus zur Erledigung; siehe: Killing, die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung 1885, Art. 11. 16. 17 und Litteraturnachweis Note 4. (Bei den Unterscheidungen auf S. 163 meiner Schrift habe ich diejenige Geometrie, in welcher die Summe der Winkel des Dreiecks grösser als ein gestreckter ist, als die Riemann'sche bezeichnet, weil ihre Möglichkeit zuerst von Riemann ausgesprochen, wenn auch nicht erschöpft worden ist. Das letztere ist erst durch Herrn Killing geschehen).

2. Der Nachweis der Unabhängigkeit des Strahlenbündels vom Scheitel ist der erste Schritt zur Gewinnung der der projectiven Geometrie eigenthümlichen Begriffe, nämlich: Punkt, Gerade, Ebene als Elemente, jedes in der erweiterten Bedeutung des Wortes; Aneinanderliegen von zwei ungleichartigen Elementen; Getrenntliegen von zwei Elementenpaaren in einem einförmigen Grundgebilde. Diese Begriffserweiterungen kann man an die Begründung der Projectivität im eigentlichen Strahlenbüschel oder an die Einführung projectiver Coordinaten anschliessen, muss aber dann schon jetzt sich mit der bekannten Staudt'schen Lücke abfinden. Die von mir in §§ 5—9 gegebenen Entwickelungen lassen jedoch erkennen, dass solche Betrachtungen zunächst noch nicht nöthig sind, dass vielmehr die in den beiden ersten Paragraphen aufgestellten Grundsätze zu jenen Erweiterungen genügen.

Hiernach sind diese Stammbegriffe der projectiven Geometrie (§ 10, S. 74) nicht bloss von Congruenz und Parallelismus, sondern auch von jedem zur Beseitigung der Staudt'schen Lücke dienenden Axiom unabhängig. Freilich ist der durch das Strahlenbündel gegebene Punkt der projectiven Geometrie schon desshalb nicht mehr

der Punkt der nichtprojectiven, weil Bündel ohne Scheitel oder Bündel mit zwei Scheiteln existiren können (s. oben), und Aehnliches gilt von der Geraden und der Ebene. Auch muss (wie z. B. in Nr. 1 zu ersehen) die Verwendung der nicht projectiven Vorstellung von der Lage eines Punktes zwischen zwei anderen in deren gerader Verbindungsstrecke und der darauf bezüglichen Grundsätze vorangehen.

3. Anders verhält es sich mit den *Sätzen* der projectiven Geometrie. Diese führen sich auf eine Gruppe von Stammsätzen (§ 12 S. 98) zurück, siehe § 12 S. 94 f. und § 16 S. 127; die in § 12 bezeichneten Stammsätze sind in §§ 7—9 enthalten; von den beiden in § 16 angeführten ist einer der reciproke des anderen, in § 15 S. 120 erlangten. Die Mittel nun, welche zur Gewinnung der projectiven Begriffe genügten, sind auch zum Beweise der projectiven Stammsätze mit Ausnahme des letztgenannten (S. 120) noch ausreichend; dieser letzte aber ist von wesentlich anderer Natur, er kann ohne Vermehrung jener Mittel nicht bewiesen werden.

Um einen Beweis zu erbringen, habe ich in § 13 den Begriff der Congruenz und die darauf bezüglichen Grundsätze eingeführt und aus dem so erweiterten Material in §§ 14 und 15 die erforderlichen Folgerungen gezogen. Dadurch erscheint aber die projective Geometrie, wenn auch unabhängig vom Parallelismus, so doch nicht unabhängig von der Congruenz und kann — wie ich S. 125 ff. auseinandergesetzt habe (s. auch S. IV) — von dem dort festgehaltenen Standpunkte aus nicht anders erscheinen.

Will man nämlich ohne die Congruenz zum Ziele gelangen, so muss man, wie zuerst Herr Klein erkannt und durchgeführt hat, ein besonderes Axiom aufstellen, welches die Vorstellung einer Stetigkeit in der geraden Punktreihe zum Ausdruck bringt, etwa in der bei mir S. 125 f. angegebenen Fassung, welches jedoch unvereinbar ist mit der Forderung, die m. E. an die Geometrie gestellt werden soll: dass die Grundbegriffe und die Grundsätze unmittelbar aus der Erfahrung geschöpft und alle übrigen Begriffe und Sätze auf jene allein zurückführbar sein müssen; dass also die Geometrie von vornherein wie eine die Erscheinungswelt beschreibende Wissenschaft verfahre und auch in ihren zusammengesetztesten Vorstellungen diesen Charakter behalte. Ich habe die hierbei in Betracht kommenden Gesichtspunkte an verschiedenen Stellen (Vorwort, Einleitung, ferner § 1 S. 4—6, S. 16—18, § 2 S. 20, § 6 S. 43—45, § 12 S. 98—100, § 15 S. 126 f.) näher auseinandergesetzt*) und eine jener — natürlich keineswegs neuen — Forderung durchaus entsprechende Darstellung angestrebt.

*) S. auch H. Vogt, der Grenzbegriff in der Elementarmathematik, Breslau 1885 (Programm Nr. 157).

4. Die von mir bis zu einem gewissen Punkte durchgeführte Darstellung der Geometrie habe ich im Einzelnen durchaus nicht als die allein mögliche hinstellen wollen. Ich hoffe aber gezeigt zu haben, dass eine Beschränkung der Geometrie auf diejenigen Vorstellungen, welche thatsächlich den Anwendungen auf Naturobjecte zu Grunde liegen, durchführbar ist und uns nicht hindert, auch die sonst üblichen, als fruchtbar und zweckmässig bewährten Vorstellungen — wenn auch in anderem Sinne — zu erzeugen.

Um insbesondere zu der Vorstellung zu gelangen, welche man mit dem mathematischen Punkte zu verbinden gewohnt ist, wird in §§ 21*) und 22 die Einführung von projectiven Coordinaten vorangeschickt und dann auf S. 188 der Grundsatz formulirt, nach welchem der Uebergang vom physischen Punkte zur Zahl sich mit der dem einzelnen Falle entsprechenden Genauigkeit vollzieht. Nach Einführung der stetigen Zahlenreihe in die Geometrie muss schliesslich (S. 200) für die Rückkehr vom mathematischen Punkte, d. i. von den Coordinaten, zum physischen Punkte die Festsetzung getroffen werden, dass zu jedem physischen Punkte eine stetige Mannigfaltigkeit von mathematischen Punkten gehört. Vergl. auch meine „Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung" 1882, S. 12—14 und S. 188.

5. Der Thatsache, dass die geometrischen Begriffe, wie wir sie in der Natur antreffen, mit Ungenauigkeit behaftet sind, hat in der mathematischen Literatur m. W. zuerst Herr Felix Klein Rechnung zu tragen unternommen in dem Aufsatz: „Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve", Sitzungsber. der phys.-med. Soc. zu Erlangen 1873, wieder abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 22, 1883, S. 249—259. Namentlich hat Herr Klein der in der physischen Linie gelegenen Ungenauigkeit einen analytischen Ausdruck gegeben.

In der wiederholt angezogenen geometrischen Schrift hatte ich krumme Gebilde ganz ausgeschlossen. Dagegen musste in dem Buche über Infinitesimalrechnung bei der Erörterung des Zusammenhanges mit der Geometrie, neben allgemeinen Bemerkungen über die begrenzte Genauigkeit der Beobachtungen (S. 12—14, 39, 44, 68 f.), das Verhältniss der Curve zur stetigen Function (§§ 7 und 10), der Tangente zum Differentialquotienten (§ 16), des Flächeninhalts und der Bogenlänge zum Integral (§ 20) dargelegt werden.

Bei allen derartigen Gelegenheiten wird man m. E. dahin gedrängt, zur rein empirischen Auffassung zurückzukehren, um Widersprüchen bei der Anwendung der Analysis auf Geometrie zu entgehen. So möchte ich auch anlässlich der Ausführungen, mit denen Herr Köpcke

*) Dort ist auf S. 168 auf der linken Seite der letzten Gleichung q statt r zu lesen.

seine bemerkenswerthe Untersuchung auf S. 123—140 des vorigen Bandes begleitet, meine Bedenken dagegen aussprechen, dass auf „Anschauung" oder „Vorstellungskraft" wie auf eine besondere Quelle mathematischer Erkenntniss neben der sinnlichen Wahrnehmung Bezug genommen werden müsse oder dürfe. Wenn z. B., wie Herr Köpcke S. 140 bemerkt, die angewandte Mathematik die Voraussetzung macht, dass „alle anschaulichen Curven (in der Ebene) anschauliche Differentialcurven und anschauliche Integralcurven besitzen", so ist die Berechtigung dazu nur in den Eigenschaften der physischen Linie zu suchen und dort auch zu finden. Es lässt sich eben jede Planlinie, bei geeigneter Begrenzung und geeigneter Annahme des Coordinatensystems, hinreichend genau durch eine beliebig oft differentiirbare Function einer Veränderlichen darstellen; auf eine solche Darstellung der Linie bezieht sich die Anwendung des analytischen Apparats. Im Interesse der Klarheit sollten freilich derartige Voraussetzungen nicht mit Stillschweigen übergangen werden.

Giessen, März 1887.

Ueber einige Punkte der Functionentheorie.

Von

M. Pasch in Giessen.

Bei wiederholtem Eingehen auf die Grundlehren der Functionentheorie erschien es mir als ein entschiedenes Bedürfniss, dass bei der Darstellung jener Lehren der von Herrn du Bois-Reymond (Freiburger Antrittsprogramm 1870) eingeführte Begriff der Unbestimmtheitsgrenzen eine möglichst frühe Stelle finde und in möglichst ausgedehntem Maasse auf ihn Bezug genommen werde. Ueberall streben wir danach, von einem Begriffe, der nur bedingungsweise anwendbar ist, zu einem anderen aufzusteigen, der jenen umfasst, ohne ähnlichen Einschränkungen zu unterliegen. In diesem Verhältniss steht zu dem Begriff des Grenzwerthes einer Function der der Unbestimmtheitsgrenzen, welcher zwar bei vielen Untersuchungen*) — wenn auch zum Theil nur indirect — bereits verwerthet, aber in den Lehrbüchern noch wenig berücksichtigt worden ist. Nur Herr Stolz hat m. W. diesen Begriff aufgenommen (Vorlesungen über allgemeine Arithmetik I. 1885).

Von dem obigen Gesichtspunkte aus habe ich versucht, die Lehre von den Ableitungen einer Function und vom bestimmten Integral, sowie gewisse damit eng zusammenhängende Gegenstände, auf Ueberlegungen einfachster Art zurückzuführen und bei dieser Gelegenheit Ergänzungen oder Verallgemeinerungen zu geben. Hinsichtlich der Terminologie habe ich mir einzelne Abweichungen von dem Gebräuchlichen erlaubt, meist behufs Erzielung genauerer oder kürzerer Ausdrucksweise.

Es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass überall nur von reellen Zahlenwerthen die Rede ist.

*) Ich verweise namentlich auf die unten verschiedentlich angeführten Arbeiten von du Bois-Reymond, Darboux, Dini, Harnack, Scheeffer und Thomae.

I. Schranken und Grenzen.

1.*) Jede Zahlenmenge (Punktmenge) hat eine untere Schranke α und eine obere Schranke β. Die Differenz $\beta - \alpha$ heisst die Schwankung der Menge; die von den Schranken begrenzte Strecke $\alpha\beta$ mag die Strecke der Menge genannt werden.

Man kann die Zahlenmenge auch auffassen als die Werthreihe einer Veränderlichen x. Wenn x eine beliebige Zahl der Menge bedeuten soll, so nennt man x eine Veränderliche und jene Menge das Gebiet der Veränderlichen x.

Wenn in jeder Umgebung einer gewissen Stelle — von der letzteren selbst abgesehen — Werthe von x vorkommen, so heisst die Stelle (welche natürlich zur Strecke der Menge gehören muss) eine Grenze (Häufungsstelle) der Zahlenmenge. Z. B. $a_1 a_2 a_3 \ldots$ seien Zahlen in unendlicher Menge, der Grösse nach aufsteigend geordnet, mit der oberen Schranke a; dann ist a (die einzige) Grenze dieser Menge. Ueberhaupt: Sobald eine Schranke nicht zur Menge gehört, ist sie eine Grenze der Menge.

Hat x nur eine endliche Anzahl von Werthen zu durchlaufen, so ist überhaupt keine Grenzstelle vorhanden. *Dagegen besitzt jede Menge von unendlich vielen Zahlen x mindestens eine Grenzstelle;* oder: Eine Punktmenge ohne Grenzpunkt umfasst nur eine endliche Anzahl von Punkten. Denn ist a_1 die untere Schranke einer Menge ohne Grenzpunkt, so haben die übrigen Zahlen der Menge eine untere Schranke $a_2 > a_1$, die übrigen Zahlen ausser a_1 und a_2 eine untere Schranke $a_3 > a_2$ u. s. w., und die Reihe der Zahlen $a_1 a_2 a_3 \ldots$ muss abbrechen.

Wenn die Werthe von x eine stetige Folge bilden, d. h. wenn alle zwischen den beiden Schranken eingeschlossenen Zahlen als Werthe von x vorkommen, so heisst x eine stetige Variable mit dem Intervall (α, β), oder, wenn z. B. α nicht zu dem Werthgebiet gehören soll, genauer: $(\alpha + 0, \beta)$ u. s. w. Alle Punkte der Strecke $\alpha\beta$ sind dann Grenzpunkte.

2.**) Ist x in gegebenem Gebiet veränderlich, — gleichviel ob stetig oder nicht —, und wird durch irgend eine Vorschrift jedem Werthe von x eine bestimmte Zahl y zugeordnet, so wird y eine gewisse Function von x. Es gilt der Satz:

---

*) Vergl. hierzu: Cantor, Mathem. Ann. Bd. 5, 1872, S. 128 f.; Pasch, Einleitung in die Differential- und Integralrechnung 1882, S. 14 ff., S. 47. — Es schien zweckmässig: „untere und obere Schranke" statt, wie üblich: „untere und obere Grenze" zu sagen und das Wort „Grenze" ausschliesslich für die anderen Gelegenheiten vorzubehalten.

**) Vergl. hierzu: Pasch a. a. O. S. 47.

Besitzen die Werthe von y eine Grenze b, so besitzen die x mindestens eine Grenze a von der Beschaffenheit, dass in jeder Umgebung von a die Zahl b als Grenze der y auftritt.

Insbesondere: Ist b die untere (obere) Schranke der y, ohne Werth von y zu sein, so besitzen die x mindestens eine Grenze a von der Beschaffenheit, dass in jeder Umgebung von a die Zahl b untere (obere) Schranke der y ist (also im Sinne der folgenden Nummer: $b = \lim\inf$ [bezw. sup] y für $\lim x = a$).

3.*) Sei jetzt a irgend eine Grenze der x. Auf jeder den Punkt a umschliessenden Strecke s liegen unendlich viele x; für die zugehörigen y sei A_s die untere, B_s die obere Schranke, wobei jedoch, wenn a selbst zu den Werthen von x gehört, das zugehörige y als solches ausser Betracht bleiben soll; endlich sei A die obere Schranke aller A_s, B die untere Schranke aller B_s:

$$A_s \leqq A \leqq B \leqq B_s.$$

Dann werde ich die Zahlen A, B die dem Grenzpunkt a der (unabhängigen) Veränderlichen x entsprechende untere, bezw. obere Grenze der Function y nennen und schreiben:

$$A = \lim\inf y \quad \text{für} \quad \lim x = a,$$
$$B = \lim\sup y \quad \text{für} \quad \lim x = a.$$

Tritt in jeder Umgebung der Stelle a eine gewisse Zahl c als Grenze der y auf, so ist $A \leqq c \leqq B$.

4. Wenn es sich nun fügt, dass A und B einen und denselben Werth b annehmen, so heisst b die dem $\lim x = a$ entsprechende Grenze von y:

$$b = \lim y \quad \text{für} \quad \lim x = a.$$

Es bleibt dann y der Zahl b beliebig nahe, sobald x ($\doteqdot a$) sich der Zahl a hinreichend genähert hat. Umgekehrt: Wenn y einer Zahl b beliebig nahe bleibt, sobald x ($\doteqdot a$) sich der Zahl a hinreichend genähert hat, so ist $A = B = b$ u. s. w. In diesem Falle kann keine von b verschiedene Zahl in jeder Umgebung der Stelle a als Grenze der y auftreten.

Hieran schliesst sich der Satz „Einleitung in die Diff.- u. Int.-R." § 9, S. 45 und dessen Umkehrung (S. 45 f.), deren Beweis sich bei der jetzigen Anordnung sehr abkürzt.**).

Da a ein Grenzpunkt der Variablen x sein soll, so ist es möglich, aber nicht nothwendig, dass bei jeder Annäherung an die Stelle a auf

---

*) Vergl. hierzu: du Bois-Reymond, Freiburger Antrittsprogramm 1870 Art. III; Münchener Abhandlungen Bd. 12, I. Abth. 1876, S. 125; Functionentheorie I. 1882, S. 266. — Statt „untere und obere Unbestimmtheitsgrenze" glaubte ich hier kurz „untere und obere Grenze" sagen zu dürfen.

**) Dasselbe gilt von der Betrachtung auf S. 55 der „Einleitung."

beiden Seiten derselben sich Werthe von x vorfinden. Tritt dieser Fall ein, so kann man auf jeder Seite untere und obere Grenze der Function y einführen, auf der vorderen Seite: $\overset{-}{\lim} y$ und $\overset{+}{\lim} y$, auf der hinteren: $-\lim y$ und $+\lim y$. Bei der Gleichheit der beiden ersteren ist eine vordere Grenze $\overset{\pm}{\lim} y$, bei der Gleichheit der beiden letzteren eine hintere Grenze $\pm\lim y$ vorhanden.

5. Zur Benutzung in Nr. 7 findet hier der folgende Hülfssatz Platz, in welchem x eine von x_1 bis x_2 $(x_1 < x_2)$ stetig verlaufende Variable, y eine eindeutige Function von x bedeutet, welche bei x_1, x_2 die Werthe y_1, y_2 annimmt:

Wenn auf jedes $x < x_2$ eine Stelle folgt, wo der Functionswerth grösser (kleiner) als y ist, während bei keinem $x > x_1$ die hinteren Grenzen der Function grösser (kleiner) als y ausfallen, so ist $y_1 < y_2$ $(y_1 > y_2)$.

Beweis (des ersten Falles). Nimmt man einen Werth $x_0 > x_1$ von x derart, dass der zugehörige Functionswerth $y_0 > y_1$, so kann es sich nur um den Fall $x_0 < x_2$ handeln; in diesem Falle sei ξ die obere Schranke der auf x_0 folgenden Stellen mit Functionswerthen $> y_0$, η der Functionswerth bei ξ. Wäre $\eta < y_0$, also ξ eine Grenze jener Stellen, so gäbe es auf der hinteren Seite in jeder Nähe von ξ Stellen, wo die Function $> y_0$ ist, d. h. es wäre $+\lim y \geq y_0 > \eta$ für $\lim x = \xi$, gegen die Voraussetzung; folglich ist $\eta \geq y_0$. Wäre $\xi < x_2$, so wäre bei $x > \xi$ stets $y \leq y_0 \leq \eta$, gegen die Voraussetzung; folglich ist $\xi = x_2$, $y_2 > y_0 > y_1$. —

Wenn jedem $x > x_1$ eine Stelle vorangeht, wo der Functionswerth grösser (kleiner) als y ist, während bei keinem $x < x_2$ die vorderen Grenzen der Function grösser (kleiner) als y ausfallen, so ist $y_1 > y_2$ $(y_1 < y_2)$.

II. Die derivirten Functionen.

6. Indem wir im Verlaufe einer eindeutigen Function y der endlichen und stetigen Variablen x eine Stelle auffassen, wo y endlich ist, wird der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eine Function von Δx, welche für $\lim \Delta x = 0$ vier Grenzwerthe liefert:

$$\overset{-}{\lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = D^- y, \qquad \overset{+}{\lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = D^+ y,$$

$$-\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -D y, \qquad +\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = +Dy.$$

Diese Grenzen werden bezw. die vordere untere, vordere obere, hintere untere, hintere obere Derivirte von y in Bezug auf x

genannt*). Wird $D^- y = D^+ y$, so ist der gemeinschaftliche Werth $D^{\pm} y$ die vordere Derivirte u. s. w.**)

Sind an der betrachteten Stelle die vorderen Ableitungen positiv, so folgen auf einer gewissen, dort beginnenden Strecke nur Functionswerthe $> y$. Ist die vordere obere Ableitung positiv, so kommen auf jeder in x beginnenden vorderen Strecke Functionswerthe $> y$ vor, die vordere obere Grenze der Functionswerthe bei x ist $\geqq y$. U. s. w.

Ist D eine vordere (hintere) Derivirte an einer Stelle x, wo die Function vorn (hinten) stetig ist, so kommen, wie klein auch die positive Zahl δ angenommen wird, zwischen x und $x + \delta$ ($x - \delta$) Differenzenquotienten vor, welche von D beliebig wenig differiren (du Bois-Reymond, Mathem. Ann. Bd. 16, 1880, S. 123).

7. Im Folgenden wird ein endliches Intervall von x_1 bis x_2 ($x_1 < x_2$) betrachtet und vorausgesetzt, dass die Function in demselben endlich bleibt; ihre Werthe bei x_1, x_2 heissen y_1, y_2.

Sind auf (x_1, x_2) alle Derivirten***) von y positiv (negativ), so ist y_1 kleiner (grösser) als y_2, überhaupt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ durchweg positiv (negativ); Beweis mittels Nr. 5. — Indem man bei endlichem h dies auf die Function $y - hx$ anwendet, erkennt man weiter:

Sind auf (x_1, x_2) alle Derivirten grösser (kleiner) als h, so ist $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ grösser (kleiner) als h. Und daraus: Sind auf (x_1, x_2) alle Derivirten $\geqq h$ ($\leqq h$), so ist durchweg $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqq h$ ($\leqq h$)†). — Demnach ist es nicht möglich, dass alle Ableitungen in dem ganzen Intervall den Werth $+\infty$ (oder $-\infty$) besitzen. Wenn also alle Ableitungen beständig denselben Werth h haben, so ist h endlich und $y = hx +$ Const. von x_1 bis x_2.

Da auch umgekehrt in dem ganzen Intervall alle Derivirten $\geqq h$ ($\leqq h$) sein müssen, sofern alle Differenzenquotienten $\geqq h$ ($\leqq h$) sind, *so fällt die untere Schranke g (die obere Schranke G) aller dieser Deri-*

*) Nach Scheeffer, Acta Math. Bd. 5, 1884, S. 52; siehe auch Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali 1878, § 145. Die obige Bezeichnungsweise weicht von der Scheeffer'schen etwas ab.

**) Wenn in einem Intervall y endlich und $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen endlichen Schranken bleibt, so ist y daselbst gleichmässig stetig. — Wenn y in einem Intervall endlich bleibt, und für jede hinreichend kleine Strecke des Intervalls die Schwankung des Differenzenquotienten beliebig klein wird, so heisst y daselbst gleichmässig differentiirbar nach Herrn Kronecker (s. Scheeffer, a. a. O. S. 296). Die Derivirte ist dann gleichmässig stetig in dem Intervall, und umgekehrt.

***) Bei x_1 kommen nur die vorderen, bei x_2 nur die hinteren Derivirten in Betracht.

†) Scheeffer a. a. O. S. 63.

*virten mit der unteren (oberen) Schranke der Differenzenquotienten zusammen**). Im Falle $g = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ist $y_1 - gx_1 = y_2 - gx_2$ und mithin, da $\frac{\Delta(y - gx)}{\Delta x} \geqq 0$, $y - gx$ constant, $g = G$. Wenn also g von G verschieden ist, d. h. wenn y sich nicht auf eine ganze lineare Function von x oder eine Constante reducirt, so ist $g < \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < G$**).

Mittels des oben benutzten Hülfssatzes (Nr. 5) ergiebt sich noch die folgende Bemerkung: Ist y bei allen $x > x_1$ hinten [oder bei allen $x < x_2$ vorn] stetig, während bei allen $x < x_2$ die vordere [bezw. bei allen $x > x_1$ die hintere] obere (untere) Ableitung positive (negative) Werthe annimmt, so ist y_1 kleiner (grösser) als y_2.

8. Wir halten fest, dass y von x_1 bis x_2 endlich bleibt, machen aber für die Folge noch die weitere Voraussetzung, dass y von x_1 bis x_2 stetig verläuft; bei x_1 ist vordere, bei x_2 hintere Stetigkeit ausreichend.

Dann schliesst man sofort: Wenn zwischen x_1 und x_2 eine der vier Ableitungen bloss positive (negative) Werthe annimmt, so gilt dasselbe von allen Differenzenquotienten, und es bleibt mithin überhaupt von x_1 bis x_2 durchweg $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv (negativ). Und weiter, indem man bei endlichem h auf die Function $y - hx$ zurückgeht: Ist zwischen x_1 und x_2 eine der vier Derivirten beständig $> h$ $(< h)$, so ist $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} > h$ $(< h)$.

Ist zwischen x_1 und x_2 eine der vier Derivirten beständig $\geqq h (\leqq h)$, so ist von x_1 bis x_2 überall $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqq h (\leqq h)$***). Umgekehrt: Ist

---

*) Bei einer von x_1 bis x_2 monotonen Function können g und G nicht entgegengesetzte Vorzeichen haben, also insbesondere nicht gleichzeitig unendlich sein. Eine Function, welche, wenn das Intervall $x_1 x_2$ auf geeignete Weise in eine endliche Anzahl von Abschnitten zerlegt wird, in den einzelnen Abschnitten monoton ist, lässt sich in zwei von x_1 bis x_2 monotone „Componenten" zerlegen (welche stetig sind, wenn y stetig verläuft); fallen nun für die eine Componente die beiden Schranken des Differenzenquotienten endlich aus, so ist für y mindestens eine dieser Schranken endlich. Indem man schliesslich die Functionen $y - gx$ und $y - Gx$ betrachtet, ergiebt sich die Zerlegbarkeit von y in zwei monotone (bei stetigem y wieder stetige) Componenten für den Fall, dass mindestens eine der Grössen g, G endlich ist. Siehe Dini a. a. O. § 134; du Bois-Reymond, zur Geschichte der trigonometrischen Reihen 1880, S. 32; Camille Jordan, Comptes rendus T. 92, 1881, S. 228.

**) Vergl. Pasch a. a. O. S. 84. Für den Fall der Stetigkeit s. auch die Betrachtungen von du Bois-Reymond, Mathem. Ann. Bd. 16, 1880, S. 119 und Harnack ebds. Bd. 23, 1884, S. 249.

***) Demnach ist es im Falle der Stetigkeit von y nicht möglich, dass eine Derivirte beständig $= +\infty$ (oder $= -\infty$) wird; vergl. die Bemerkung von Dini a. a. O. § 135. Und wenn zwischen x_1 und x_2 eine Derivirte beständig $= h$ ist, also h endlich, so ist $y = hx +$ Const. von x_1 bis x_2.

zwischen x_1 und x_2 überall $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqq h \,(\leqq h)$, so ist zwischen x_1 und x_2 jede der vier Derivirten beständig $\geqq h \,(\leqq h)$. *Folglich ist**) *zwischen* x_1 *und* x_2 *die untere Schranke* g (*die obere Schranke* G) *der Differenzenquotienten zugleich untere* (*obere*) *Schranke für jede der vier Derivirten*; und diese Schranken bleiben ungeändert, wenn man x_1 und x_2 hinzunimmt (nur sind dann bei x_1 bloss die vorderen, bei x_2 bloss die hinteren Derivirten zu berücksichtigen).

9. An jeder Stelle $x < x_2$ $(x > x_1)$ haben, wie sich aus dem Vorstehenden leicht ergiebt, die vier Derivirten die obere und die untere vordere (hintere) Grenze mit einander gemein, und zwischen diesen Grenzen — oder doch nicht ausserhalb ihrer Strecke — liegen die der Stelle entsprechenden vorderen (hinteren) Derivirten selbst.

Wenn also**) an der betreffenden Stelle irgend eine Derivirte eine vordere (hintere) Grenze besitzt, so ist diese Grenze zugleich vordere (hintere) Grenze der drei übrigen Derivirten; ihr Werth stellt einfach die vordere (hintere) Derivirte der Function dar, und beide vorderen (hinteren) Derivirten sind bei x vorn (hinten) stetig. Und wenn schliesslich bei x eine der vier Derivirten einem Grenzwerth zustrebt, so wird dieser zugleich Grenzwerth der drei anderen Derivirten und stellt die Derivirte von y im gewöhnlichen Sinne dar; alle Derivirten sind dann stetig bei x.

10. Das Ergebniss der Nr. 8 führt — immer unter Festhaltung der dort geltend gemachten Voraussetzungen — in einfachster Weise zu gewissen Folgerungen betreffs des Zusammenhanges zwischen den vorderen bezw. hinteren Derivirten, welche den von Herrn Dini a. a. O. § 141 (1 — 3) und § 148 (1) gegebenen Sätzen entsprechen.

Zunächst bemerkt man, dass, wenn bei x_1 eine vordere Ableitung kleiner (grösser) als eine gewisse Zahl h ausfällt, jede Ableitung zwischen x_1 und x_2 — überhaupt in jeder Nähe bei x_1 auf der vorderen Seite — Werthe $< h \,(> h)$ annimmt; dass also, wenn auf der Strecke von x_1 bis x_2 eine der vier Ableitungen***) an irgend einer Stelle $< h \,(> h)$ ausfällt, jeder Ableitung zwischen x_1 und x_2 unendlich oft Werthe $< h \,(> h)$ zukommen.

Von den Schranken, zwischen denen die Ableitungen sich bewegen, kann jede endlich oder unendlich sein. Ist nun $g = -\infty$, so liegen zwischen x_1 und x_2 unendlich viele Stellen, wo die beiden vorderen (hinteren) Ableitungen hinter einer beliebig angenommenen

---

*) Satz von Dini a. a. O. § 147.

**) Vergl. hierzu: Dini a. a. O. § 148 (2, 3) und § 149 (2); Scheeffer a. a. O. S. 281; auch Harnack, Differential- und Integralrechnung 1881, §§ 21 und 100.

***) Bei x_1 kommen nur die vorderen, bei x_2 nur die hinteren Ableitungen in Betracht.

Zahl zurückbleiben; ist $G = +\infty$, so liegen zwischen x_1 und x_2 unendlich viele Stellen, wo die beiden vorderen (hinteren) Ableitungen eine beliebig angenommene Zahl übersteigen. Hat dagegen g einen endlichen Werth, so wird jede Ableitung zwischen x_1 und x_2 unendlich oft $< g + \varepsilon$, wo ε eine beliebige positive Zahl bedeutet, und es werden mithin unendlich oft zwischen x_1 und x_2 die beiden vorderen (hinteren) Ableitungen gleichzeitig $< g + \varepsilon$. Hat endlich G einen endlichen Werth, so wird jede Ableitung zwischen x_1 und x_2 unendlich oft $> G - \varepsilon$, und es werden unendlich oft zwischen x_1 und x_2 die beiden vorderen (hinteren) Ableitungen gleichzeitig $> G - \varepsilon$.

Wenn also von den Grössen g und G wenigstens eine endlich ist, so wird sowohl $D^+y - D^-y$, wie $^+Dy - {}^-Dy$, zwischen x_1 und x_2 unendlich oft $< \varepsilon$, und zwar in einer zwischen x_1 und x_2 überalldichten Punktmenge.

III. Sprünge und Schwingungen einer Function.

11. Es sei y eine eindeutige, zwischen endlichen Schranken verlaufende Function der stetigen Veränderlichen x in dem endlichen Intervall $a \leqq x \leqq b$. Auf jeder zu diesem Intervall gehörigen Strecke weist die Function eine gewisse Schwankung auf, bei deren Ermittelung die beiden Endpunkte der Strecke mit berücksichtigt werden sollen. Bleiben die Endpunkte ausser Betracht, so kommt eine unter Umständen kleinere Zahl heraus, welche die innere Schwankung heissen mag. Den auf eine Strecke bezüglichen Schwankungen stehen zunächst die auf einen bestimmten Werth x_0 von x bezüglichen Sprünge gegenüber, nämlich der Sprung der Function im Punkte x_0, d. h. die untere Schranke der Schwankungen auf allen den Punkt x_0 umschliessenden Strecken ($a < x_0 < b$), und die beiden einseitigen Sprünge im Punkte x_0 (der vordere und der hintere), d. h. die untere Schranke der Schwankungen auf allen in x_0 anfangenden, bezw. endigenden Strecken ($x_0 < b$, bezw. $> a$). Wenn endlich bei der Ermittelung dieser Schwankungen jedesmal die Stelle x_0 selbst ausgeschlossen wird, so erhalten wir drei Zahlen, welche die Schwingung bei x_0, bezw. die vordere, hintere Schwingung bei x_0 genannt werden mögen.

Diese Benennungen bedurften hier der Erklärung, weil sie nicht allgemein in gleichem Sinne angewendet werden.

Auf jeder Strecke stimmt die untere Schranke der Schwankungen aller Theilstrecken mit der unteren Schranke jeder Gattung von Sprüngen und Schwingungen überein.

12. Wenn σ eine Zahl bedeutet, welche die vordere Schwingung bei x_0 beliebig wenig übertrifft ($x_0 < b$), so giebt es hinreichend kleine

positive Werthe $\delta \leqq b - x_0$ derart, dass zwischen x_0 und $x_0 + \delta$ die innere Schwankung der Function (und mithin jeder Sprung und jede Schwingung) kleiner als σ ist. Die obere Schranke der Werthe von δ werde mit $V(x_0, \sigma)$ bezeichnet. Zwischen x_0 und $x_0 + V(x_0, \sigma)$ ist die innere Schwankung $\leqq \sigma$. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$x_0 + V(x_0, \sigma) = x_1$$

und bezeichnet mit g die untere, mit G die obere Schranke der Functionswerthe zwischen x_0 und x_1, mit ε eine beliebig kleine positive Zahl, so kann man zwischen x_0 und x_1 Stellen angeben, wo $y > G - \frac{1}{2}\varepsilon$ bezw. $y < g + \frac{1}{2}\varepsilon$, und mithin Stellen x von der Art, dass zwischen x_0 und x die innere Schwankung — welche jedenfalls $< \sigma$ ist — die Grösse $G - g - \varepsilon$ übertrifft, d. h. es ist

$$G - g - \varepsilon < \sigma, \quad G - g < \sigma + \varepsilon, \quad G - g \leqq \sigma.$$

Ist σ grösser, als die hintere Schwingung bei $x_0 (x_0 > a)$, so giebt es eine obere Schranke $H(x_0, \sigma)$ der positiven Werthe $\delta \leqq x_0 - a$ von der Beschaffenheit, dass zwischen x_0 und $x_0 - \delta$ die innere Schwankung der Function den Werth σ nicht erreicht. Zwischen x_0 und $x_0 - H(x_0, \sigma)$ ist die innere Schwankung $\leqq \sigma$.

Ist σ grösser, als die vordere und die hintere Schwingung bei x_0, so kommen in gewisser Nähe bei x_0 (von x_0 selbst abgesehen) keine Sprünge $\geqq \sigma$ vor. *Wenn also im Intervall ab alle einseitigen Schwingungen $< \sigma$ sind, so können darin Sprünge $\geqq \sigma$ nur in endlicher Anzahl vorkommen;* denn sonst gäbe es mindestens eine Stelle x_0, in deren beliebiger Nähe y (unendlich viele) Sprünge $\geqq \sigma$ macht. *Sind insbesondere im Intervall ab alle einseitigen Schwingungen $= 0$* (d. h. ist überall vorderer und hinterer Grenzwerth von y vorhanden), — z. B. wenn y von a bis b monoton ist, — *so macht die Function nicht unendlich viele Sprünge, welche eine gegebene positive Grösse übersteigen* (vergl. unten Nr. 24).

13. *Wenn im Intervall ab alle einseitigen Schwingungen $< \sigma$ sind, so kann man das Intervall in eine endliche Anzahl von Abschnitten zerlegen, auf deren jedem die innere Schwankung $< \sigma$ ist.*

Beweis (vergl. Heine, Crelle's Journal Bd. 74, 1872, S. 188). Bildet man die Werthe $a + V(a, \sigma) = x_1$, $x_1 + V(x_1, \sigma) = x_2, \ldots$, so ist in den Abschnitten $ax_1, x_1x_2, \ldots$ die innere Schwankung $\leqq \sigma$. Diese Reihe bricht aber ab, und zwar mit b; denn wäre die Anzahl der Punkte $x_1x_2\ldots$ unendlich, c ihre obere Schranke, so läge zwischen $c - H(c, \sigma)$ und c etwa x_m, und es wäre nicht bloss von x_m bis x_{m+1}, sondern mindestens bis c die innere Schwankung $< \sigma$. Schliesslich wird nöthigenfalls durch weitere geeignete Einschaltung zwischen a

und x_1, x_1 und x_2, ... bewirkt, dass in keinem Abschnitt die innere Schwankung den Werth σ erreicht. —

Ist im Punkte a der vordere und im Punkte x_1 der hintere Sprung $< \sigma$, so kann man ξ_1 zwischen a und x_1, und ξ' zwischen ξ_1 und x_1 so einschalten, dass auf den Strecken $a\xi_1$ und $\xi' x_1$ (selbstverständlich auch auf $\xi_1\xi'$) die Schwankung unter σ bleibt. Daraus folgt:

Wenn im Intervall ab alle Sprünge, oder wenigstens alle einseitigen Sprünge, kleiner als σ sind, so kann man das Intervall in eine endliche Anzahl von Abschnitten zerlegen, auf deren jedem die Schwankung $< \sigma$ ist.

14. *Wenn auf jeder Strecke des Intervalls ab die Schwankungen aller Theilstrecken eine untere Schranke $\leqq \sigma$ besitzen, so sind die Sprünge $\leqq \sigma$ in dem Intervall überalldicht verbreitet.* Z. B. wenn auf jeder Strecke des Intervalls beliebig kleine Schwankungen vorkommen (also insbesondere, wenn y von a bis b monoton ist), so sind in dem Intervall Stetigkeitsstellen in überalldichter Menge enthalten.

Beweis (vergl. Hankel, Tübinger Programm 1870, § 7, auch Mathem. Ann. Bd. 20, S. 90). Sind x und ξ Stellen im Intervall ab, s eine beliebige positive Zahl, so liegt auf der Strecke $x\xi$ eine Theilstrecke $x_0\xi_0$ $(x < x_0 < \xi_0 < \xi)$ mit Schwankung $< \sigma + s$. Ebenso kann ich aus der Strecke $x_0\xi_0$ eine Theilstrecke $x_1\xi_1$ mit Schwankung $< \sigma + \frac{1}{2}s$, aus $x_1\xi_1$ eine Theilstrecke $x_2\xi_2$ mit Schwankung $< \sigma + \frac{1}{4}s$ herausschneiden u. s. f. An der oberen Schranke der Punkte $x_0 x_1 x_2 \ldots$ ist der Sprung $\leqq \sigma$, denn er übersteigt keinen der Werthe $\sigma + s$, $\sigma + \frac{1}{2}s$, $\sigma + \frac{1}{4}\sigma, \cdots$.

Nach der Schlussbemerkung in Nr. 11 folgt hieraus: Wenn in dem Intervall ab die Stellen, wo eine einseitige Schwingung $\leqq \sigma$ ist, überalldicht liegen, so sind darin auch die Sprünge $\leqq \sigma$ überalldicht verbreitet. Insbesondere (Dini a. a. O. § 151): Eine Function, welche an einer überalldichten Menge von Stellen einen einseitigen Grenzwerth zulässt, besitzt auch eine überalldichte Menge von Stetigkeitsstellen.

15. In dem mehrfach angeführten Werke § 187(4) giebt Herr Dini einen Satz, wonach für eine Function, die an allen Stellen des Intervalls ab einen hinteren (vorderen) Grenzwerth zulässt, bei geeigneter Zerlegung des Intervalls in eine endliche Anzahl von Abschnitten, die Summe der Abschnitte, wo die innere Schwankung eine gegebene positive Zahl übersteigt, hinter einer ebenfalls gegebenen Grösse zurückbleibt. Auf demselben Wege ergiebt sich jetzt mittels Nr. 14 der allgemeinere Satz:

Wenn im Intervall ab alle hinteren (vorderen) Schwingungen $< \sigma$ sind, so zerfällt das Intervall in eine endliche Anzahl von Abschnitten,

von denen die mit innerer Schwankung $\geq \sigma$ eine hinter der beliebig kleinen Grösse ε zurückbleibende Summe geben.

Beweis (des ersten Falles). Nach Nr. 14 kommen Sprünge $< \sigma$ in dem Intervall überalldicht vor. Man bezeichne mit x_1 eine Stelle zwischen a und $a + \frac{1}{2}\varepsilon$ mit Sprung $< \sigma$, mit ξ_1 die Stelle $x_1 + V(x_1, \sigma)$, mit x_2 eine Stelle zwischen ξ_1 und $\xi_1 + \frac{1}{4}\varepsilon$ mit Sprung $< \sigma$, mit ξ_2 die Stelle $x_2 + V(x_2, \sigma)$ u. s. f. Dass die Reihe $x_1 \xi_1 x_2 \xi_2 \ldots$ abbricht, und zwar mit b, wird wie in Nr. 13 erkannt. In den Abschnitten $x_1 \xi_1, x_2 \xi_2, \ldots$ ist die innere Schwankung $\leq \sigma$; diese werden nöthigenfalls so zerlegt, dass die innere Schwankung überall unter σ fällt. Die übrigen Abschnitte sind kleiner als bez. $\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{4}\varepsilon, \ldots$, folglich ihre Summe $< \varepsilon$.

IV. Inhalt einer Punktmenge.

16. Es sei irgendwie eine auf der Strecke ab $(a < b)$ gelegene Punktmenge definirt. Sind x und ξ beliebige Punkte der Strecke ab, so werde der Strecke $x\xi$ eine Zahl $s(x\xi)$ zugeordnet, $= 1$ oder 0, je nachdem auf der Strecke $x\xi$ Punkte der betrachteten Menge liegen oder nicht. Wir zerlegen nun das Intervall ab auf beliebige Weise in eine endliche Anzahl von Abschnitten $aa_1, a_1a_2, \ldots, a_{n-1}b$ und bilden die Summe

$$S = (a_1 - a)s(aa_1) + (a_2 - a_1)s(a_1a_2) + \cdots + (b - a_{n-1})s(a_{n-1}b) \leq b - a,$$

d. h. die Summe der Abschnitte, welche Punkte der gegebenen Menge enthalten. Die untere Schranke aller Werthe S ist eine endliche Zahl $\Sigma \geq 0$; sie stellt gleichsam die von der Punktmenge bedeckte Länge dar und ist als Inhalt der Menge zu bezeichnen, da sie — wie aus dem Folgenden hervorgeht — der von Herrn G. Cantor Mathem. Ann. Bd. 23, 1884, S. 473 ff. gegebenen Definition entspricht.

Man kann nämlich Σ auch als den Grenzwerth auffassen, dem S zustrebt, wenn die Abschnitte $aa_1, a_1a_2, \ldots, a_{n-1}b$ unendlich klein werden; d. h. wenn die Veränderliche H alle positiven Werthe durchläuft und jedem Werthe alle diejenigen S zugeordnet werden, in denen jene Abschnitte sämmtlich kleiner als H sind, so ist $\lim S = \Sigma$ für $\lim H = 0$. Da diese Thatsache gewissen später (Nr. 19 und 24) zu besprechenden analog ist, so mag die gemeinschaftliche Quelle derselben hier dargelegt werden.

17. *Ist jeder Strecke $x\xi$ des Intervalls ab eine Zahl $s(x\xi)$ zugeordnet, welche zwischen festen endlichen Schranken $A < B$ eingeschlossen bleibt und nicht zunimmt (nicht abnimmt), wenn man $x\xi$ durch eine Theilstrecke ersetzt, so haben die Werthe der Summe*

$$S = (a_1 - a)\, s(a\, a_1) + (a_2 - a_1)\, s(a_1\, a_2) + \cdots + (b - a_{n-1})\, s(a_{n-1}\, b)$$

eine endliche untere (obere) Schranke Σ, *und es ist zugleich*

$$\Sigma = \lim S \quad \textit{für} \quad \lim H = 0.$$

Beweis (des ersten Falles). Wird $\varepsilon > 0$ beliebig angenommen, so kann ich eine Theilung — etwa in n' Abschnitte — herstellen, welche für die betrachtete Summe einen Werth $S' < \Sigma + \frac{1}{2}\varepsilon$ liefert. Man hat dann:

$$S < S' + n' H(B - A) < \Sigma + \tfrac{1}{2}\varepsilon + n' H(B - A);$$

denn eine Zunahme erfolgt bei dem Uebergang von S' zu S nur, so oft zwischen zwei bei S aufeinanderfolgend benutzten Theilpunkten ein oder mehrere bei S' benutzte fortfallen, und zwar ist jede solche Zunahme $< H(B - A)$. Nimmt man also H hinreichend klein, so wird $S < \Sigma + \varepsilon$. —

Für den Fall der Nr. 19 hat Herr Darboux in seinem Mémoire sur les fonctions discontinues, Ann. de l'Éc. Norm., 2e Série, T. 4, 1875 einen Beweis gegeben auf S. 65—70, für den Fall der Nr. 16 Herr Stolz, Mathem. Ann. Bd. 23, 1884, S. 152ff. Der letztere Fall erscheint auch als besondere Anwendung des ersteren, wenn man eine Function einführt, $= 1$ in jedem Punkte der obigen Punktmenge, sonst $= 0$. Vergl. noch die Citate in Nr. 19.

Da A und B ungleich angenommen sind, so wird Σ nicht $= B(b - a)$ bezw. $A(b - a)$.

18. Enthält die in Nr. 16 betrachtete Punktmenge nur eine endliche Anzahl von Punkten, so ist ihr Inhalt $\Sigma = 0$; aber auch bei unendlicher Anzahl kann $\Sigma = 0$ werden. Nennt man Σ auch die Ausdehnung der Punktmenge, so kann man diese Menge bei $\Sigma > 0$ als eine ausgedehnte, bei $\Sigma = 0$ als eine unausgedehnte bezeichnen. Der erste Versuch einer derartigen Eintheilung für die Zwecke der Functionentheorie findet sich bei Hankel a. a. O. § 7. Herr Harnack nennt die Punktmenge bei $\Sigma > 0$ linear, bei $\Sigma = 0$ discret: Differential- und Integralrechnung § 144, abweichend von der Bedeutung der „linearen Punktmenge" nach Herrn G. Cantor: Crelle's Journal Bd. 84, 1878, S. 248 und 257, Mathem. Ann. Bd. 15, 1879, S. 1. Herr du Bois-Reymond hat die Punktmenge bei $\Sigma = 0$ eine integrirbare genannt: Functionentheorie I, 1882, S. 189.

Bei $\Sigma = b - a$ ist die Punktmenge in dem Intervall überalldicht, und umgekehrt. Ueberhaupt ist jede auf einer Strecke des Intervalls überalldichte Menge ausgedehnt, und wenn man es also mit einer unausgedehnten Menge zu thun hat, so liegt auf jeder Strecke des Intervalls ein von Punkten der Menge freier Theil, d. h. *jede unaus-*

gedehnte Punktmenge ist (nach der Ausdrucksweise von Herrn du Bois-Reymond a. a. O. § 49) *apantachisch.* Aber die Umkehrung ist nicht richtig; vielmehr kann die Apantachie ebensowohl ausgedehnt, wie unausgedehnt sein (siehe Harnack, Mathem. Ann. Bd. 19, 1882, S. 239; du Bois-Reymond a. a. O. § 51).

Wenn auf der Strecke ab eine Apantachie gegeben ist, und man dehnt jede im Innern punktfreie Theilstrecke soweit als möglich aus, so bilden die Längen der freien Theilstrecken eine convergente Reihe, deren Summe $\leqq b - a$.

V. Das bestimmte Integral.

19. Bedeutet wieder, wie in III, y eine zwischen endlichen Schranken A, B verlaufende Function der Variablen x in dem endlichen Intervall $a \leqq x \leqq b$, so gehört zu jeder Strecke $x\xi$ des Intervalls eine Zahl $g(x\xi)$ als untere und eine Zahl $l(x\xi)$ als obere Schranke aller Functionswerthe auf der Strecke $x\xi$; die Differenz

$$s(x\xi) = l(x\xi) - g(x\xi) \geqq 0$$

ist die Schwankung auf $x\xi$. Zerlegt man das Intervall ab in eine endliche Anzahl von Abschnitten $aa_1, a_1a_2, \ldots, a_{n-1}b$ und bildet die Ausdrücke

$$G = (a_1 - a)\, g(aa_1) + (a_2 - a_1)\, g(a_1a_2) + \cdots + (b - a_{n-1})\, g(a_{n-1}b) < B(b-a),$$

$$L = (a_1 - a)\, l(aa_1) + (a_2 - a_1)\, l(a_1a_2) + \cdots + (b - a_{n-1})\, l(a_{n-1}b) > A(b-a),$$

$$S = (a_1 - a)\, s(aa_1) + (a_2 - a_1)\, s(a_1a_2) + \cdots + (b - a_{n-1})\, s(a_{n-1}b) = L - G,$$

so besitzen die sämmtlichen Werthe, deren G fähig ist, eine endliche obere Schranke Γ, die Werthe L eine endliche untere Schranke Λ, und die (nicht negative) Differenz $\Lambda - \Gamma = \Sigma$ ist die untere Schranke der S. Man hat:

$$A(b-a) \leqq G \leqq \Gamma \leqq \Lambda \leqq L \leqq B(b-a).$$

Die in Nr. 17 angestellte Betrachtung lehrt nun sofort, dass Γ, Λ, Σ zugleich die Grenzwerthe sind, denen resp. G, L, S zustreben, wenn die Abschnitte $aa_1, a_1a_2, \ldots$ unendlich klein werden; d. h. es ist

$$\lim G = \Gamma, \quad \lim L = \Lambda, \quad \lim S = \Sigma \text{ für } \lim H = 0,$$

wenn man H einführt wie in Nr. 16. (Darboux a. a. O. S. 70; Thomae, Bestimmte Integrale 1875, S. 12; du Bois-Reymond, Hist.-lit. Abth. der Zeitschr. f. Math. u. Phys., 20. Jahrgang 1875, S. 123.)

Diese Grenzwerthe bleiben erhalten, wenn man die Werthe von y bei $a a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b$ ganz oder theilweise ausser Betracht lässt. Denn wenn durch solche Fortlassung z. B. G in $G_1 (\geqq G)$ übergeht, so ist die obere Schranke Γ_1 der G_1 sicher nicht $< \Gamma$; bedeutet ferner h die Länge des kleinsten Abschnittes bei einer Theilung, welche $G_1 > \Gamma_1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ beliebig) liefert, Θ eine Zahl zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, und nimmt G dadurch, dass noch $a + \Theta h$, $a_1 \pm \Theta h$, $a_2 \pm \Theta h$, ..., $b - \Theta h$ eingeschoben werden, den Werth G' an, so ist

$$G_1 - G' \leqq 2n\Theta h(B-A) \leqq 2\Theta(b-a)(B-A)$$

und bei hinreichend kleinem Θ:

$$G_1 - G' < G_1 - (\Gamma_1 - \varepsilon), \quad \Gamma_1 - \varepsilon < G' \leqq \Gamma,$$

also Γ_1 nicht $> \Gamma$; mithin ist $\Gamma = \Gamma_1 = \lim G_1$ u. s. w.

20. Bisher war $a < b$ vorausgesetzt. Nimmt man jedoch $a > b$ und definirt G, L, S wie oben, aber Γ als untere Schranke der G, Λ als obere Schranke der L, so wird die (nicht positive) Differenz $\Lambda - \Gamma = \Sigma$ die obere Schranke der S, und Γ, Λ, Σ bleiben Grenzwerthe resp. von G, L, S für $\lim H = 0$. Schreibt man in beiden Fällen statt Γ, Λ, Σ auch resp. $\Gamma(ab)$, $\Lambda(ab)$, $\Sigma(ab)$, so dürfen wir überhaupt von den Grössen $\Gamma(x_0 x)$, $\Lambda(x_0 x)$, $\Sigma(x_0 x)$ sprechen, wo x_0 und x beliebige Stellen des Intervalls ab bedeuten. Dabei müssen freilich zunächst x_0 und x verschiedene Werthe haben; allein da z. B. $\Gamma(x_0 x)$ zwischen $A(x - x_0)$ und $B(x - x_0)$ liegt, so werden jene drei Ausdrücke mit $x - x_0$ unendlich klein, und wir definiren daher $\Gamma(xx) = \Lambda(xx) = \Sigma(xx) = 0$. Es ist dann immer:

$$\Sigma(x_0 x) = \Lambda(x_0 x) - \Gamma(x_0 x), \quad \Gamma(x_0 x) + \Gamma(x x_0) = 0 \text{ u. s. w.}$$

Wird c zwischen a und b eingeschoben, und werden nur solche Theilungen vorgenommen, bei denen c Theilpunkt ist, so zerfällt G in zwei Theile, welche für $\lim H = 0$ den Grenzwerthen $\Gamma(ac)$, $\Gamma(ab)$ zustreben, und die Summe dieser Grenzwerthe ist $\lim G$. Andrerseits führt aber auch die so eingeschränkte Werthmenge der G zu dem Grenzwerth $\Gamma(ab)$. Mithin ist

$$\Gamma(ab) = \Gamma(ac) + \Gamma(cb), \quad \Gamma(ab) + \Gamma(bc) + \Gamma(ca) = 0$$

und allgemein

$$\Gamma(x_0 x) + \Gamma(x x_1) + \Gamma(x_1 x_0) = 0,$$

wie immer $x_0 x x_1$ im Intervall ab ausgewählt werden. Analoges gilt für Λ und Σ.

Bei constantem x_0 sind demnach $\Gamma(x_0 x)$, $\Lambda(x_0 x)$, $\Sigma(x_0 x)$ *eindeutige, endliche und stetige* Functionen von x; denn bei dem Ueber-

gange von x zu x_1 wächst z. B. $\Gamma(x_0 x)$ um $\Gamma(x x_1)$, welches unendlich klein wird mit $x_1 - x$.

21. Versteht man unter $\eta(x\xi)$ eine beliebige Zahl aus der Folge von $g(x\xi)$ bis $l(x\xi)$ und bildet die Summe

$$w = (a_1 - a)\,\eta(a a_1) + (a_2 - a_1)\,\eta(a_1 a_2) + \cdots + (b - a_{n-1})\,\eta(a_{n-1} b),$$

deren Werthe bei fester Theilung genau die Strecke von G bis L (also bei jeder Theilung mindestens die Strecke von Γ bis Λ) stetig erfüllen, so ist zwar ein Grenzwerth von w für $\lim H = 0$ im Allgemeinen nicht vorhanden; aber immer kann man bei $a < b$, bezw. $a > b$ schreiben:

$$\Gamma, \text{ bezw. } \Lambda = \lim \inf w \text{ für } \lim H = 0,$$
$$\Lambda, \text{ bezw. } \Gamma = \lim \sup w \text{ für } \lim H = 0.$$

Demnach ist das Zusammenfallen von Γ und Λ, d. i. $\Sigma = 0$, die nothwendige und hinreichende Bedingung der Existenz eines $\lim w$ für $\lim H = 0$, dessen Werth $\Gamma = \Lambda$ jedoch nicht als untere oder obere Schranke der w erklärt werden kann.

Um zu prüfen, ob $\lim w$ existirt, genügt es, irgend eine Reihe von Theilungen des Intervalls ab zu verfolgen, bei denen schliesslich alle Abschnitte beliebig klein werden; denn jede solche Reihe führt zu $\lim G = \Gamma$ und $\lim L = \Lambda$. Dagegen ist es nicht hinreichend, jedesmal η aus der Strecke gl in bestimmter Weise zu entnehmen; vielmehr kann bei solcher Beschränkung ein Grenzwerth herauskommen, ohne dass die Gesammtheit der w einen Grenzwerth besitzt. Aber immer darf man sich auf die Werthe zwischen g und l beschränken, oder auf die Functionswerthe im Innern des betreffenden Abschnitts.

Im Fall $\Sigma = 0$ heisst Γ das (bestimmte) Integral der Function y von $x = a$ bis $x = b$. Aus dieser Integrabilitätsbedingung (Riemann, Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe 1854/67, § 5) folgt sofort:

Die Integrabilität bleibt bestehen, wenn man alle negativen (positiven) Functionswerthe durch Null, oder wenn man alle Functionswerthe durch ihre absoluten Beträge ersetzt.

22.*) Ist y integrirbar von a bis b, und von b bis c, so ist es auch integrirbar von a bis c. Denn dann ist

$$\Sigma(ac) = \Sigma(ab) + \Sigma(bc) \text{ u. s. w.}$$

Ist y integrirbar von a bis b, so ist es auch integrirbar in jedem Abschnitt $a'b'$ des Intervalls ab. Denn wenn etwa $a \leq a' < b' \leq b$, so enthält die Gleichung

*) Vergl. hierzu: Pasch a. a. O. S. 99f.

$$0 = \Sigma(ab) = \Sigma(aa') + \Sigma(a'b') + \Sigma(b'b)$$

keinen negativen Term, mithin ist $\Sigma(a'b') = 0$.

Ist y integrirbar von a bis zu jedem x zwischen a und b, so ist es integrirbar von a bis b. Denn für diese x ist dann $\Sigma(ax) = 0$; $\Sigma(ab)$ schliesst sich an die Werthe $\Sigma(ax)$ stetig an (Nr. 20) und ist also ebenfalls $= 0$.

23. Wenn daher y integrirbar ist auf jedem Abschnitt im Innern des Intervalls ab, so ist es integrirbar von a bis b. Allgemeiner: *Wenn bei beliebiger Wahl der positiven Grösse ε aus dem Intervall ab Abschnitte in endlicher Anzahl, aber mit einer Gesammtlänge $< \varepsilon$, sich derart ausscheiden lassen, dass y in den übrigen Abschnitten als integrabel erkannt wird, so ist y in dem ganzen Intervall integrabel.* Denn bei jeder derartigen Theilung ist ($a < b$ gedacht)

$$\Sigma(ab) = \Sigma(aa_1) + \Sigma(a_1a_2) + \cdots + \Sigma(a_{n-1}b),$$

wo $\Sigma(aa_1) \leqq (a_1 - a)\ (B - A)$ u. s. w. und mithin die Summe der nicht verschwindenden Addenden $< \varepsilon(B - A)$; folglich ist $\Sigma(ab) = 0$. — Insbesondere: Hat man y als integrabel erkannt in jedem Abschnitt des Intervalls ab, der keinen Punkt einer gewissen unausgedehnten Menge (Nr. 18) enthält, so ist y von a bis b integrabel.

Nimmt y zwischen a und b nirgends ab (oder nirgends zu), so ist y von a bis b integrabel*) (Riemann a. a. O. § 6). Dann ist nämlich in jedem Abschnitt die Schwankung gleich der Differenz zwischen Endwerth und Anfangswerth der Function, folglich die Summe der Schwankungen auf aa_1, a_1a_2, ... gleich $B - A$, abs $S < H(B - A)$, $\Sigma = 0$.

Ist y stetig von $x = a$ bis $x = b$, so kann man y von a bis b integriren. Ueberhaupt: Wenn im Intervall ab die Unstetigkeitsstellen der Function y keine ausgedehnte Menge bilden, so ist y von a bis b integrirbar. Aber die Umkehrung ist nicht richtig (s. unten Nr. 24; Riemann'sches Beispiel a. a. O. § 6); man kann nur behaupten:

Auf jeder Strecke eines Intervalls, in welchem y sich integriren lässt, müssen beliebig kleine Schwankungen vorkommen; und mithin wegen Nr. 14:

In jedem Intervall, in welchem y sich integriren lässt, müssen die Stetigkeitsstellen überalldicht liegen. (Siehe Hankel, Tübinger Programm § 7, auch Mathem. Ann. Bd. 20, S. 90; du Bois-Reymond, Crelle's Journal Bd. 79, 1875, S. 27).

24. Für andre Zwecke, namentlich für die Untersuchung von Functionen mit einer überalldichten Menge von Unstetigkeitsstellen,

*) Wenn also von a bis b die Differenzenquotienten der Function y mindestens eine endliche Schranke besitzen, so ist y von a bis b integrirbar (S. 137, erste Fussnote).

ist die — anscheinend complicirtere — Fassung vortheilhaft, in welche Riemann (a. a. O. § 5) die Integrabilitätsbedingung $\Sigma = 0$ umgesetzt hat.

Es sei σ irgend eine positive Zahl und $d_\sigma(x\xi) = 1$ oder 0, je nachdem $s(x\xi) > \sigma$ oder $\leqq \sigma$. Die Abschnitte, in denen die Schwankung von y die Grösse σ übersteigt, geben dann die Summe ($a < b$ gedacht)

$$D_\sigma = (a_1 - a) d_\sigma(a a_1) + (a_2 - a_1) d_\sigma(a_1 a_2) + \cdots + (b - a_{n-1}) d_\sigma(a_{n-1} b),$$

welche unter Umständen Null ist, z. B. immer bei $\sigma \geqq B - A$. Die untere Grenze Δ_σ aller Werthe, welche D_σ bei festem σ annimmt, ist zugleich (Nr. 17) Grenzwerth von D_σ bei unendlicher Verkleinerung der Abschnitte $a a_1$, $a_1 a_2$, ... und bleibt erhalten, wenn man die Werthe von y bei $a a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b$ ganz oder theilweise ausser Betracht lässt (Nr. 19). Da nun stets

$$\sigma D_\sigma < S \leqq (B - A) D_\sigma + \sigma(b - a - D_\sigma) \leqq (B - A) D_\sigma + \sigma(b - a),$$

so ist die Forderung $\Sigma = 0$ gleichwerthig mit der Forderung:

$$\Delta_\sigma = 0 \text{ für alle positiven } \sigma.$$

Mittels dieser Form der Integrabilitätsbedingung hat Herr Dini a. a. O. § 187 (4, 5) den merkwürdigen Satz abgeleitet:

Wenn im Intervall ab die Stellen, wo y keinen hinteren (keinen vorderen) Grenzwerth zulässt, nur eine unausgedehnte Menge bilden, so kann man y von a bis b integriren. — Zufolge einer in Nr. 23 gemachten Bemerkung wird dieser Satz auf den folgenden zurückgeführt, dessen Begründung in Nr. 15 enthalten ist: *Die Function y lässt sich integriren in jedem Intervall, wo sie durchweg einen hinteren (vorderen) Grenzwerth besitzt.* — Insbesondere (Darboux a. a. O. S. 90): Wenn an allen Stellen des Intervalls vorderer und hinterer Grenzwerth von y existiren, so gestattet y die Integration.*)

Mit denselben Hülfsmitteln erlangt man aber auch den umfassenderen Lehrsatz, dessen Umkehrung sofort einleuchtet:

Wenn im Intervall ab für jedes $\sigma > 0$ die Stellen, wo die hintere (vordere) Schwingung $> \sigma$ ist, eine unausgedehnte Menge bilden, so ist y von a bis b integrirbar. Denn bei beliebigem $\varepsilon > 0$ kann ich dann eine Theilung vornehmen, welche für die Abschnitte mit hinteren

*) Auch hierher kann man den schon durch eine Bemerkung in Nr. 23 erledigten Fall einer Function rechnen, für welche das Intervall in eine endliche Anzahl von Abschnitten derart zerfällt, dass y im Innern eines jeden sich nur in einerlei Sinn ändert (Riemann a. a. O. § 6); denn im Innern eines solchen Abschnitts ist überall vordere und hintere Grenze von y vorhanden. — Von den beiden Eigenschaften der Function $f(x)$, welche Riemann dort auseinanderhält, nämlich dass überall $f(x+0)$ und $f(x-0)$ existirt, und dass für jedes positive σ die Anzahl der Sprünge $> \sigma$ endlich bleibt, folgt die zweite aus der ersten (Nr. 12).

(vorderen) Schwingungen $> \sigma$ eine Gesammtlänge $< \frac{1}{2}\varepsilon$ ergiebt; die übrigen Abschnitte werden weiter zerlegt (Nr. 15) derart, dass die Gesammtlänge der Theile mit innerer Schwankung $> \sigma + s$ wieder $< \frac{1}{2}\varepsilon$ ausfällt, wobei $s > 0$ beliebig; da bei solcher Theilung $D_{\sigma+s} < \varepsilon$ wird, so ist $\Delta_{\sigma+s} = 0$. —

Zu den Anwendungen der zweiten Riemann'schen Integrabilitätsbedingung gehört noch der Satz von Herrn du Bois-Reymond (Math. Ann. Bd. 16, 1880, S. 112 und Bd. 20, 1882, S. 122): *Sind* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ *in dem Intervall* ab *integrirbare Functionen von* x, A_i *und* B_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *die Schranken von* φ_i, *und die Function* $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *endlich und stetig, so lange* $A_i \leqq x_i \leqq B_i$ *für alle* i, *dann ist die Function*

$$y = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$$

von $x = a$ *bis* $x = b$ *integrirbar.* Für jedes $s > 0$ geben die Abschnitte, wo eine der Functionen φ um mehr als s schwankt, eine beliebig kleine Summe D_s'; zu jedem $\sigma > 0$ gehört aber ein Werth $s > 0$ derart, dass in denjenigen Abschnitten, wo die Schwankungen der φ nicht über s steigen, die Schwankung von y höchstens σ betragen kann, dass also $D_\sigma \leqq D_s'$; folglich ist immer $\Delta_\sigma = 0$.

25. Im Vorstehenden hat sich der Uebergang von der Betrachtung der Schwankungen zu der der Sprünge und Schwingungen schon vollzogen. Hankel hat (Tübinger Programm §§ 7. 8, auch Mathem. Ann. Bd. 20, S. 87 ff.) die Ueberführung der Integrabilitätsbedingung in eine dritte, diesem Uebergang entsprechende Form angestrebt; in ihrer richtigen Fassung (siehe Harnack, Diff.- und Int.-Rechnung S. 262; du Bois-Reymond, Functionentheorie I, S. 189) lautet die dritte Form der Integrabilitätsbedingung:

> Damit die Function y von $x = a$ bis $x = b$ integrirt werden könne, ist nothwendig und hinreichend, dass für jede positive Zahl σ die Stellen mit Sprüngen $> \sigma$ in dem Intervall eine unausgedehnte Menge bilden.

Dass diese Forderung nothwendig ist, sieht man unmittelbar; dass sie hinreicht, bildet einen speciellen Fall des vorletzten Satzes der vorigen Nummer und würde direct in analoger Weise, aber mittels Nr. 13 statt 15, bewiesen werden.

26. Die in Nr. 19 eingeführten Grössen Γ und Λ sind vorhanden, gleichviel ob die Function y in dem Intervall ab integrabel ist oder nicht. Sie spielen bei der Frage nach dem Integral von y zwischen den Grenzen a und b die nämliche Rolle, wie untere und obere Grenze bei der Frage nach dem Grenzwerthe einer Function (Nr. 21). Man kann diese Analogie dadurch zum Ausdruck bringen, dass man Γ und Λ etwa das untere, bezw. obere Integral nennt und schreibt:

$$\Gamma = \overset{-}{\int_a^b} y\,dx, \quad \Lambda = \overset{+}{\int_a^b} y\,dx,$$

wobei allerdings im Falle $a > b$ die Analogie nicht genau befolgt ist.

Unter Anwendung dieser Benennungen erörtern wir die Frage: Welche Bedingung ist nothwendig und hinreichend, damit das von a bis x ($a \leqq x \leqq b$ oder $b \leqq x \leqq a$) erstreckte untere (obere) Integral der Function y identisch (d. h. für alle diese x) verschwindet? Das Vorhandensein von nicht identisch verschwindenden Functionen dieser Art folgt schon daraus, dass gewisse Functionen, die nicht überall Null sind, überhaupt oder in geeigneten Intervallen identisch verschwindende Integrale liefern, wie Herr Thomae a. a. O. § 20 gezeigt hat.

In dem ersten der zu behandelnden Fälle ist das auf irgend einen Theil der Strecke ab bezügliche untere Integral $= 0$, daher auf keiner Theilstrecke die untere Schranke der Functionswerthe positiv. Die etwa vorkommenden negativen Functionswerthe sind einer Beschränkung unterworfen. Für jedes postive σ ist nämlich ($a < b$ gedacht) $G \leqq -\sigma l_\sigma$, wenn l_σ bei der betreffenden Eintheilung der Strecke ab die Summe der Abschnitte bedeutet, wo $y < -\sigma$ werden kann; folglich ist $\lim l_\sigma = 0$ für $\lim H = 0$, d. h. die Stellen mit $y < -\sigma$ bilden eine unausgedehnte Menge. — Umgekehrt: Wenn auf ab durchweg $g(x\xi) \leqq 0$ und $\lim l_\sigma = 0$ für jedes positive σ, so ist $A \leqq 0$ und

$$0 \geqq G \geqq A l_\sigma - \sigma(b-a-l_\sigma) \geqq A l_\sigma - \sigma(b-a)$$

und mithin bei festem σ:

$$0 \geqq \Gamma \geqq -\sigma(b-a),$$

d. h. es ist $\Gamma = 0$, das untere Integral auf ab verschwindet, ebenso das auf der Strecke ax. Diese Voraussetzungen sind z. B. in beliebigem Intervall erfüllt, wenn man $y = 1$ nimmt für alle irrationalen x und für $x = 0$, dagegen $y = -\frac{1}{q}$ für jedes rationale $x = \frac{p}{q}$, wobei p und q relativ prim gedacht werden, und zwar q positiv; vergl. das erste der soeben angezogenen Beispiele des Herrn Thomae.

Die nothwendige und hinreichende *Bedingung dafür, dass das untere (obere) Integral auf jeder Strecke des Intervalls ab den Werth Null annimmt*, lautet demnach: Auf jeder Strecke muss die untere (obere) Schranke der Functionswerthe $\leqq 0$ ($\geqq 0$) ausfallen, zugleich müssen für jedes $\sigma > 0$ die Stellen mit $y < -\sigma$ ($y > \sigma$) eine unausgedehnte Menge bilden.

27. Wenn auf einer Strecke des Intervalls ab die obere Schranke der y negativ ausfällt, etwa $= -s$, so erscheinen für $0 < \sigma < s$ die Stellen mit $y < -\sigma$ in ausgedehnter Menge. Wenn also für jedes

$\sigma > 0$ die Stellen mit $y < -\sigma$ (mit $y > \sigma$) sich auf eine ausdehnungslose Menge beschränken, so ist die obere (untere) Schranke auf jeder Theilstrecke ≥ 0 (≤ 0).

Bei den vorhin betrachteten Functionen, für welche entweder

$$-\int_a^x y\,dx \quad \text{oder} \quad +\int_a^x y\,dx$$

identisch verschwindet, ist daher

$$g(x\xi) \leq 0 \leq l(x\xi)$$

auf jeder Strecke $x\xi$ des Intervalls ab und mithin

$$\overline{\lim}\, y \leq 0 \leq \underline{\lim}\, y \quad \text{und} \quad -\lim y \leq 0 \leq +\lim y$$

an jeder Stelle des Intervalls. Daraus folgt: Ueberall, wo bei einer derartigen Function eine Grenze oder eine einseitige Grenze auftritt, ist der Grenzwerth $= 0$; und insbesondere: Ueberall, wo die Function stetig oder einseitig stetig ist, besitzt sie den Werth Null.

28. Aus der Bemerkung am Anfang der vorigen Nummer ergiebt sich die nothwendige und hinreichende *Bedingung dafür, dass die Function y von a bis b integrabel ist und*

$$\int_a^x y\,dx \equiv 0, \quad d.\ i. \quad -\int_a^x y\,dx \equiv +\int_a^x y\,dx \equiv 0,$$

nämlich: Für jedes $\sigma > 0$ müssen die Stellen mit $\operatorname{abs} y > \sigma$ eine unausgedehnte Menge bilden.*)

Eine derartige Function besitzt Stetigkeitsstellen in überalldichter Menge (Nr. 23) und wird jedenfalls an diesen Stellen $= 0$ (Nr. 27); sie verschwindet demnach in einer überalldichten Menge von Punkten des Intervalls und kann auch definirt werden als eine Function, welche auf ab Integration zulässt und in überalldichten Punkten verschwindet.**) Im Anschluss an eine von Herrn Harnack (Mathem. Ann. Bd. 24, 1884, S. 218) angewendete Ausdrucksweise kann man die Function eine auf der Strecke ab im Allgemeinen verschwindende nennen.

Die Function behält diesen Charakter, wenn man ihre Werthe durch die absoluten Beträge, oder wenn man die negativen (positiven)

---

*) Dass zwei integrirbare Functionen, welche für jedes $\sigma > 0$ nur in einer unausgedehnten Punktmenge um mehr als σ differiren, dasselbe Integral liefern, hat Herr Harnack ausgesprochen: Mathem. Ann. Bd. 19, 1882, S. 243.

**) S. die Bemerkung von Herrn Dini a. a. O. S. 261 f., wonach zwei integrirbare Functionen, welche in einer überalldichten Punktmenge übereinstimmen, dasselbe Integral liefern, und die Umkehrung daselbst S. 264.

Werthe durch Null ersetzt; sie ist die Differenz zweier im Allgemeinen verschwindenden, nirgends negativen Functionen. Bei einer im Allgemeinen verschwindenden, aber nirgends negativen Function sind an jeder Stelle die einseitigen unteren Grenzen $= 0$.

Verschwindet das von a bis b erstreckte obere (untere) Integral einer dort nirgends negativen (positiven) Function, so ist die Function eine auf ab im Allgemeinen verschwindende. Denn z. B. im ersten Falle ist auch $\Lambda(x\xi) = 0$, weiter $g(x\xi) = 0$, $\Gamma(x\xi) = 0$.

29.*) Wenn man die Function y von a bis b integriren kann, so entsteht von $x = a$ bis $x = b$ eine nach Nr. 20 endliche und stetige Integralfunction

$$\int_a^x y\,dx = u.$$

Aber y braucht schon deshalb keineswegs aus u durch Differentiation hervorzugehen, weil man zu y irgend eine von a bis b im Allgemeinen verschwindende Function addiren darf, ohne u zu ändern. Nur die Beziehungen:

$$\underline{\lim}\, y \leqq D^- u \leqq D^+ u \leqq \overline{\lim}\, y,$$
$$-\lim y \leqq {}^-Du \leqq {}^+D u \leqq {}^+\lim y$$

gelten jedenfalls in dem ganzen Intervall; aus ihnen folgt: Ueberall, wo $\overset{\pm}{\lim}\, y$ oder $\pm\lim y$ oder $\lim y$ existirt, ist auch $D^{\pm} u$, bezw. $\pm Du$ oder Du vorhanden und zwar

$$D^{\pm} u = \overset{\pm}{\lim}\, y, \text{ bezw. } \pm Du = \pm\lim y, \text{ oder } Du = \lim y.$$

Insbesondere ist u an den überalldicht vertheilten Stetigkeitsstellen von y differentiirbar und giebt dort: $Du = y$.

Folglich existirt jedenfalls eine überalldichte Punktmenge, wo u differentiirbar und $Du = y$ ist. Daneben aber kann in einer überalldichten Punktmenge die Derivirte fehlen; so sind schon bei dem Riemann'schen Beispiel (a. a. O. § 6) für alle rationalen x mit geradem Nenner vordere und hintere Ableitung zwar vorhanden, aber von verschiedener Grösse.

Alle Differenzenquotienten der Function u in dem Intervall ab liegen zwischen endlichen Schranken, nämlich in dem Intervall AB oder in einem Theile desselben. Alle Differenzenquotienten und mithin (vergl. Nr. 7) alle Derivirten von u auf einer Strecke $x\xi$ sind Werthe

*) Vergl. hierzu Thomae a. a. O. § 23; Dini a. a. O. §§ 192, 193, 197; Harnack, Diff.- und Int.-Rechn. § 147, Mathem. Ann. Bd. 19, 1882, S. 243 f.; Pasch a. a. O. S. 101.

$\eta(x\xi)$ im Sinne von Nr. 21. Folglich *lässt jede der vier Derivirten von u sich auf ab integriren* und liefert zwischen den Grenzen a und x dieselbe Integralfunction u, wie y; *sie differirt also von y nur um eine im Allgemeinen verschwindende Function.*

Da beständig $y - A \geqq 0$ und $y - B \leqq 0$, so sind die Functionen $u - Ax$, $u - Bx$ wachsend, bezw. abnehmend monoton; die Integralfunction zerlegt sich daher in monotone Componenten: Ax und $u - Ax$, oder Bx und $u - Bx$, in Uebereinstimmung mit Nr. 7 (dritte Fussnote).

30. Im Vorstehenden hatte sich die endliche und stetige Function u durch Integration einer Function ergeben. Nehmen wir aber jetzt in dem Intervall ab irgend eine endliche Function $F(x)$, deren Differenzenquotienten sich zwischen endlichen Schranken bewegen, und die mithin durchweg Stetigkeit besitzt (Nr. 6). Welche der vier Derivirten von $F(x)$ man auch unter y verstehen mag, immer wird nach Nr. 8:

$$g(x\xi) \leqq \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} \leqq h(x\xi).$$

Da nun die Differenz $F(b) - F(a)$ in der Form

$$(a_1 - a)\frac{F(a_1) - F(a)}{a_1 - a} + (a_2 - a_1)\frac{F(a_2) - F(a_1)}{a_2 - a_1} + \cdots + (b - a_{n-1})\frac{F(b) - F(a_{n-1})}{b - a_{n-1}}$$

geschrieben werden kann, so kommt für $a < b$:

$$G \leqq F(b) - F(a) \leqq L, \qquad \Gamma \leqq F(b) - F(a) \leqq \Lambda.$$

Nach Nr. 8 ist aber der Werth von $g(x\xi)$ für alle vier Ableitungen derselbe, ebenso der von $h(x\xi)$; folglich führt jede Ableitung zu den nämlichen beiden Werthen von Γ und Λ, d. h.:

Wenn in dem Intervall ab die Differenzenquotienten der Function $F(x)$ sich zwischen endliche Schranken einschliessen lassen, so liefern die vier Derivirten auf ab dasselbe untere und dasselbe obere Integral; zwischen diesen beiden Werthen liegt die Differenz $F(b) - F(a)$ oder fällt mit einem derselben zusammen.

Die Voraussetzung bezüglich der Differenzenquotienten ist erfüllt, wenn $F(x)$ endlich und stetig und eine der vier Ableitungen in dem hier festgehaltenen Sinne integrirbar ist (also nach der vorigen Nummer insbesondere dann, wenn $F(x)$ als Integralfunction entstanden ist). Dann aber wird

$$\Gamma = \Lambda = F(b) - F(a), \text{ d. h.:}$$

Wenn auf ab die Function $F(x)$ endlich und stetig und eine ihrer Ableitungen integrirbar ist, so sind alle Ableitungen von $F(x)$ auf ab

integrirbar und liefern einen und denselben Integralwerth, nämlich $F(b) - F(a)$; und es entsteht daher $F(x) - F(a)$, wenn man irgend eine Ableitung von a bis x integrirt. Diesen „Fundamentalsatz der Integralrechnung" hat du Bois-Reymond zuerst in den Münchener Abhandlungen Bd. 12, I. Abth., 1876, S. 161 ff., dann in den Mathem. Ann. Bd. 16, 1880, S. 115 ff., ferner Dini a. a. O. § 198 bewiesen. Vergl. auch Harnack: Mathem. Ann. Bd. 19, 1882, S. 244 f. und die Erweiterungen in Bd. 24, 1884, S. 232–237.

Giessen, März 1887.

Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes.

Par

P. Appell à Paris.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein.)

Dans une conversation que nous avons eue récemment à Paris, vous m'avez parlé de l'intention où vous étiez d'étudier les fonctions de trois variables réelles x, y, z vérifiant l'équation $\Delta V = 0$ et analogues à la partie réelle d'une fonction algébrique de $x + yi$; ces fonctions ont, en un point de l'espace, plusieurs déterminations qui s'échangent entre elles lorsque le point (x, y, z) décrit des courbes fermées entourant certaines lignes singulières. J'espère que vous verrez avec intérêt l'exemple suivant qui me paraît le plus simple après ceux qui se tirent immédiatement de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

La fonction

$$F(x,y,z) = \frac{A}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}} + \frac{A'}{\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2}}$$

vérifie l'équation

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

quelles que soient les constantes A, A', α, β, γ, α', β', γ'. Si ces constantes sont *réelles*, cette fonction est uniforme et devient infinie aux deux pôles (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$. Si, au contraire, on donne aux constantes A, α, β, γ des valeurs imaginaires

$$A = \lambda + \mu i, \quad \alpha = a + a'i, \quad \beta = b + b'i, \quad \gamma = c + c'i$$

et aux constantes A', α', β', γ' les valeurs imaginaires conjuguées, la fonction $F(x, y, z)$ reste réelle mais cesse d'être uniforme et admet pour ligne singulière un cercle.

En effet, si l'on pose

$$S = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - a'^2 - b'^2 - c'^2,$$
$$P = 2a'(x-a) + 2b'(y-b) + 2c'(z-c),$$

on a

$$F(x, y, z) = \frac{\lambda + \mu i}{\sqrt{S - Pi}} + \frac{\lambda - \mu i}{\sqrt{S + Pi}}$$

ce qui montre que la fonction F a pour ligne singulière le cercle représenté par les deux équations

$$S = 0, \quad P = 0$$

dont la première représente une sphère et la deuxième un plan passant par le centre de la sphère.

Soit M_0 un point de l'espace et F_0 une des déterminations de la fonction F en ce point: imaginons une courbe fermée C partant de M_0 et revenant à M_0 et suivons par continuité la variation de F le long de cette courbe: alors

1°. Si la courbe C peut *par déformation continue et sans rencontre avec le cercle singulier* être réduite à une courbe infiniment petite allant de M_0 à M_0, la valeur finale de la fonction F en M_0 sera égale à la valeur initiale F_0;

2°. Dans le cas contraire cette valeur finale sera $\pm F_0$; par exemple, si la courbe C traverse une première fois le plan $P = 0$ dans l'intérieur du cercle singulier, puis une seconde fois à l'extérieur de ce cercle, la valeur finale de F sera $-F_0$.

Pour démontrer ces propositions, il suffit de remarquer que, lorsque le point $M(x, y, z)$ décrit la courbe C, le point représentatif de la quantité imaginaire $S + Pi$ par rapport à deux axes rectangulaires ΩS et ΩP décrit une courbe fermée qui, dans le premier cas, ne contient pas l'origine Ω et qui, dans le second cas, tourne une ou plusieurs fois autour de cette origine.

Remarque. On peut, par un procédé analogue au précédent, déduire de toute fonction réelle $\Phi(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta\Phi = 0$, d'autres fonctions réelles vérifiant la même équation. Pour cela, si la fonction Φ contient certains paramètres constants, on attribuera à ces paramètres des valeurs imaginaires et on formera la combinaison

$$A\Phi(x, y, z) + A_1\Phi_1(x, y, z)$$

Φ_1 étant la fonction conjuguée de Φ et A_1 une constante imaginaire conjuguée de A. On pourra, par exemple, appliquer ces considérations à la fonction $Z(x, y, z)$ que nous avons définie dans le Tome IV des Acta Mathematica.

Paris le 26. avril 1887.

Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral.

Von

Paul Schafheitlin in Berlin.

Schon seit Euler ist es bekannt, dass die hypergeometrische Reihe bis auf einen constanten Factor dargestellt werden kann durch das Integral

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du.$$

Es dürfte vielleicht nicht ohne Interesse sein, eine von dieser völlig verschiedene Integraldarstellung mitzutheilen. Diese neue Darstellung enthält unter dem Integrationszeichen Bessel'sche Functionen und während obige Darstellung giltig ist für alle Werthe von x mit Ausnahme der auf der reellen Axe zwischen 1 und ∞ liegenden, wird die neue Darstellung sich beschränken auf Punkte der reellen Axe.

Um nachher den Gang der Entwickelungen nicht zu unterbrechen, soll zuerst ein Hilfsintegral abgeleitet werden.

Bezeichnet man die Bessel'sche Function n^{ter} Ordnung mit $J^n(x)$, so ist:

$$(1)\qquad J^n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x^n}{2^{n-1}\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\omega)\sin^{2n}\omega\,d\omega,$$

sobald $n > -\frac{1}{2}$. Durch partielle Integration folgt:

$$J^n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x^{n-1}}{2^{n-2}\Pi\left(n-\frac{3}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\omega)\sin^{2n-2}\omega\cos\omega\,d\omega.$$

Dividirt man diese Gleichung durch x^{n-s+1} und integrirt alsdann nach x von 0 bis ∞, so wird das entstehende Integral

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx$$

einen endlichen Werth besitzen, sobald $\varkappa > 0$ (wegen der unteren Grenze) und $\varkappa < \frac{3}{2} + n$ (wegen der oberen Grenze); die Ermittelung des Integrales geschieht durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite. Es ist:

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Pi\left(n-\frac{3}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\omega\,d\omega \int_0^\infty \frac{\cos\omega\sin(x\cos\omega)}{x^{2-\varkappa}}\,dx.$$

Das innere Integral hat nur dann einen endlichen Werth, wenn $0 < \varkappa < 2$ mit Ausschluss der Grenzen. Unter dieser Annahme behält es auch für $\omega = \frac{\pi}{2}$ eine Bedeutung; denn es ist, wie aus der Theorie der Euler'schen Integrale bekannt ist:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega\sin(x\cos\omega)}{x^{2-\varkappa}}\,dx = \Pi(\varkappa-2)\cdot\sin\frac{\varkappa-1}{2}\pi\cdot\cos^{2-\varkappa}\omega.$$

Somit geht (2) über in:

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi(\varkappa-2)\sin\frac{\varkappa-1}{2}\pi}{2^{n-2}\sqrt{\pi}\,\Pi\left(n-\frac{3}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\omega\cos^{2-\varkappa}\omega\,d\omega.$$

Das in (3) vorkommende Integral ist ein Euler'sches erster Gattung und man erhält, sobald $n > \frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi(\varkappa-2)\,\Pi\left(\frac{1-\varkappa}{2}\right)\sin\frac{\varkappa-1}{2}\pi}{2^{n-1}\sqrt{\pi}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad (0 < \varkappa < 2).$$

Nun ist:

$$\frac{\sin\frac{\varkappa-1}{2}\pi}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Pi\left(\frac{1-\varkappa}{2}\right)\Pi\left(\frac{\varkappa-3}{2}\right)};$$

Also:

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n+\varkappa-1}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(\varkappa-2)}{2^{n-1}\,\Pi\left(\frac{\varkappa-3}{2}\right)\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}.$$

Ferner ist nach einem bekannten Gauss'schen Theorem:

$$\sqrt{\pi} = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\varkappa-3}{2}\right)}{2^{2-\varkappa}\,\Pi(\varkappa-2)}.$$

Somit ergiebt sich schliesslich:

$$(4)\qquad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \qquad \begin{pmatrix} n > \frac{1}{2} \\ 0 < \varkappa < 2 \end{pmatrix}.$$

Die untere Grenze von n kann hierin bis auf $-\frac{3}{2}$ herabgesetzt werden. Nämlich aus den bekannten Formeln:

$$(5a)\qquad \frac{2n}{x}\,J^n(x) = J^{n-1}(x) + J^{n+1}(x),$$

$$(5b)\qquad 2\,\frac{dJ^n(x)}{dx} = J^{n-1}(x) - J^{n+1}(x)$$

folgen die beiden anderen:

$$(6a)\qquad \frac{d(x^n J^n(x))}{dx} = x^n J^{n-1}(x),$$

$$(6b)\qquad \frac{d(x^{-n} J^n(x))}{dx} = -x^{-n} J^{n+1}(x).$$

Vermöge (6a) erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{J^{n-1}(x)}{x^{n-\varkappa}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^n J^{n-1}(x)}{x^{2n-\varkappa}}\,dx$$

$$= \left[\frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa}}\right]_0^\infty + (2n-\varkappa)\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx.$$

Ist $0 < \varkappa < n + \frac{1}{2}$, so verschwindet die Klammer und man erhält vermittelst (4):

$$\int_0^\infty \frac{J^{n-1}(x)}{x^{n-\varkappa}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}-1\right)}, \qquad \begin{pmatrix} n > \frac{1}{2} \\ 0 < \varkappa < 2 \text{ resp. } n+\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

oder bei Vertauschung von $n-1$ mit n:

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \begin{pmatrix} n>-\frac{1}{2} \\ 0<\varkappa<2 \text{ resp. } n+\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Durch nochmalige Anwendung dieses Verfahrens ergiebt sich:

$$(7)\quad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \begin{pmatrix} n>-\frac{3}{2} \\ 0<\varkappa<2 \text{ resp. } n+\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Kleiner darf, wegen der Beschränkung von $\varkappa$, n nicht sein. Auch die obere Grenze von $\varkappa$ lässt sich genauer feststellen. Durch Anwendung von (6b) folgt:

$$\int_0^\infty \frac{J^{n+1}(x)}{x^{n-\varkappa}}\,dx = -\left[\frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa}}\right]_0^\infty + \varkappa \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx.$$

Die Klammer verschwindet, sobald $0<\varkappa<n+\frac{1}{2}$; folglich:

$$\int_0^\infty \frac{J^{n+1}(x)}{x^{n-\varkappa}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}\right)}{2^{n-\varkappa}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \begin{pmatrix} n>-\frac{3}{2} \\ 0<\varkappa<2 \text{ resp. } n+\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Setzt man n an Stelle von $n+1$ und $\varkappa-2$ an Stelle von $\varkappa$, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \begin{pmatrix} n>-\frac{1}{2} \\ 2<\varkappa<4 \text{ resp. } n+\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Da nun (4) auch für $\varkappa=2$ giltig ist, wie unmittelbar aus (6b) erhellt, so folgt:

$$(8)\quad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \quad \begin{pmatrix} n>-\frac{3}{2} \\ 0<\varkappa\leqq 4 \text{ resp. } n+\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens erhält man schliesslich die Formel:

$$(9)\qquad \int_0^\infty \frac{J^n(x)}{x^{n-\varkappa+1}}\,dx = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\,\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)}, \qquad \begin{pmatrix} n > -\frac{3}{2} \\ 0 < \varkappa < n+\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Diese Formel ist für ein ganzes n schon von Herrn H. Weber*) gefunden worden.

Nunmehr schreiten wir zur eigentlichen Aufgabe dieser Arbeit. Es sei:

$$(10)\qquad \varphi(z) = \int_0^\infty \frac{J^\mu(x)\,J^\nu(xz)}{x^\lambda}\,dx,$$

so ist:

$$(11)\qquad \begin{cases} \varphi'(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{J^\mu(x)}{x^{\lambda-1}}\,\frac{\partial J^\nu(xz)}{\partial x}\,dx, \\ \varphi''(z) = \frac{1}{z^2}\int_0^\infty \frac{J^\mu(x)}{x^{\lambda-2}}\,\frac{\partial^2 J^\nu(xz)}{\partial x^2}\,dx. \end{cases}$$

Damit die Integrale in (10) und (11) nicht sinnlos sind, müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$(11a)\qquad 1 < \lambda < \mu + \nu + 1.$$

Bei Benutzung der bekannten Bessel'schen Differentialgleichung erhält man aus (10) und (11):

$$(12)\qquad \varphi''(z) + \frac{1}{z}\varphi'(z) - \frac{\nu^2}{z^2}\varphi(z) = -\int_0^\infty \frac{J^\mu(x)\,J^\nu(xz)}{x^{\lambda-2}}\,dx.$$

Aus (11) ergiebt sich ferner durch partielle Integration:

$$(13)\qquad \varphi'(z) = \frac{\lambda-1}{z}\varphi(z) - \frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{J^\nu(xz)}{x^{\lambda-1}}\cdot\frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x}\,dx,$$

$$(14)\qquad \varphi''(z) = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{z^2}\varphi(z) + \frac{1}{z^2}\int_0^\infty \frac{J^\nu(xz)}{x^{\lambda-2}}\left\{\frac{\partial^2 J^\mu(x)}{\partial x^2} - \frac{2(\lambda-2)}{x}\,\frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x}\right\}dx.$$

Aus (13) und (14) folgt:

*) Crelle, Journal f. M. Bd. 69, pag. 231.

$$(15)\qquad z^2\varphi''(z) - (2\lambda - 3)z\varphi'(z) + \{(\lambda - 1)^2 - \mu^2\}\,\varphi(z) = -\int_0^\infty \frac{J^\mu(x)\,J^\nu(xz)}{x^{\lambda-2}}\,dx.$$

Aus (12) und (15) erhält man nun:

$$(16)\qquad z^2(z^2-1)\,\varphi''(z) - z\{(2\lambda - 3)\,z^2 + 1\}\,\varphi'(z) + \{[(\lambda-1)^2 - \mu^2]\,z^2 + \nu^2\}\,\varphi(z) = 0.$$

Setzt man:

$$(17)\qquad \varphi(z) = z^\nu\psi(z),$$

so ergiebt sich aus (16):

$$(18)\qquad z^2(z^2-1)\,\psi''(z) + z\{(2\nu - 2\lambda + 3)\,z^2 - (2\nu + 1)\}\,\psi'(z) + \{\nu(\nu - 2\lambda + 2) + (\lambda - 1)^2 - \mu^2\}\,z^2\psi(z) = 0.$$

Setzt man ferner:

$$(19)\qquad z^2 = \zeta,$$

so folgt aus (18):

$$(20)\qquad \zeta(\zeta-1)\,\psi''(\zeta) + \{(\nu - \lambda + 2)\,\zeta - (\nu + 1)\}\,\psi'(\zeta) - \frac{(\mu - \nu + \lambda - 1)(\mu + \nu - \lambda + 1)}{4}\,\psi(\zeta) = 0.$$

Setzt man:

$$\mu = \alpha - \beta,$$
$$\nu = \gamma - 1,$$
$$\lambda = \gamma - \alpha - \beta,$$

so geht (20) über in die bekannte hypergeometrische Differentialgleichung. Bezeichnet man somit:

$$(21)\qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx$$

mit $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, so erhält man mit Rücksicht auf (17), (19) und (20):

$$(22)\qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = Az^{\gamma-1}F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) + Bz^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ z^2);$$

hierin bedeuten A und B noch näher zu bestimmende Constanten. Die Bedingungsgleichung (11a) geht über in

$$(23)\qquad \gamma - \alpha - \beta - 1 > 0 \quad \text{und} \quad \alpha > 0.$$

Ausserdem darf weder $\alpha - \beta$ noch $\gamma - 1$ eine negative ganze Zahl sein. Um zur Bestimmung von A und B zu gelangen, gelte folgendes:

In der Reihenentwickelung von $J^n(x)$ bezeichne man die nach Abtrennung des ersten Gliedes verbleibende Reihe mit $H^n(x)$; es wird alsdann $H^n(x)$ mit der $(n+2)^{\text{ten}}$ Potenz von x beginnen.

Dann ist

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{z^{\gamma-1}}{2^{\gamma-1}\Pi(\gamma-1)} \int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1} J^{\alpha-\beta}(x)\, dx + \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, H^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx,$$

vorausgesetzt, dass das erste Integral einen endlichen Werth besitzt. Unter dieser Annahme ist nach (9):

$$(24) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{z^{\gamma-1}\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\Pi(-\beta)\Pi(\gamma-1)} + \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, H^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx.$$

Setzt man für die linke Seite dieser Gleichung den aus (22) folgenden Werth, dividirt dann durch $z^{\gamma-1}$ und setzt alsdann $z = 0$, so verschwindet wegen der obigen Bemerkung über $H^n(x)$ das Integral auf der rechten Seite. Ist $\gamma > 1$, so sieht man, dass dann B den Werth Null hat; auch für $\gamma = 1$ muss B Null gesetzt werden, weil dann die zweite Lösung der Differentialgleichung logarithmisch unendlich wird. Somit ergiebt sich für kleine Werthe von z:

$$(25) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\Pi(-\beta)\Pi(\gamma-1)} z^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma, z^2),$$

vorausgesetzt dass (nach (9)):

$$(26) \quad \alpha + \beta < \tfrac{3}{2}, \quad \beta - \alpha < \tfrac{3}{2} \quad \text{und} \quad \gamma \geqq 1.$$

Von diesen beschränkenden Bedingungen kann man sich indess befreien. Es ist:

$$(27) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx,$$

$$(28) \quad \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma) = \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta+1}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\, dx.$$

Hieraus folgt mit Hilfe von (5a):

$$(29) \quad 2(\alpha+\beta)\varphi - \varphi(\alpha+1) = \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta-1}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\, dx.$$

Aehnlich folgt:

$$(30) \qquad 2(\gamma-1)\,\varphi - z\varphi(\gamma-1) = z\int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\,dx.$$

Aus (30) folgt vermöge (5b):

$$(\gamma-1)\,\varphi - z\,\varphi(\gamma-1) = -\int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left\{J^{\gamma-1}(xz)\right\}dx$$

$$= \left[-\frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{(\gamma-\alpha-\beta-1)\,J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J^{\gamma-1}(xz)\left\{J^{\alpha-\beta-1}(x) - J^{\alpha-\beta+1}(x)\right\}}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\,dx.$$

Da wegen (23) die Klammer verschwindet, so erhält man mit Rücksicht von (27), (28), (29):

$$(31) \quad 2(\gamma-\alpha-1)\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma) + \varphi(\alpha+1,\beta,\gamma) - z\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1) = 0.$$

Analog ergiebt sich:

$$(32) \quad 2(\gamma-\beta-1)\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma) - \varphi(\alpha,\beta+1,\gamma) - z\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1) = 0.$$

Denselben beiden Gleichungen genügt die Function

$$\frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\,z^{\gamma-1}\,F(\alpha,\beta,\gamma,z^2),$$

wie aus zwei bekannten Gauss'schen Formeln*) sich ergiebt. In (25) kann α, das positiv sein muss, willkürlich gewählt werden. Dann werden β und γ beschränkt wie aus (26) folgt, durch die Bedingungen:

$$\beta < \frac{3}{2} - \alpha, \quad \gamma \geqq 1.$$

Formel (31) hebt aber die Beschränkung von γ und (32) die von β auf.

Ferner musste im Verlauf des Beweises angenommen werden, dass $\gamma - \alpha - \beta - 1 > 0$; sonst lässt sich nämlich φ nicht zweimal nach z differenziren. Das Integral φ selbst bleibt aber endlich, sobald nur $\gamma - \alpha - \beta + 1 > 0$; es lässt sich zeigen, dass auch hierfür noch (25) bestehen bleibt.

Man dividire (25) durch $z^{\gamma-1}$ und differenzire unter Anwendung von (6b), so folgt:

---

*) Gauss, Disq. circa ser. inf. etc. formula 5, 12. Werke III, pag. 130.

$$\int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\,dx = \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\,z^{\gamma-1}\,\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,z^2)}{dz},$$

$$(\gamma-\alpha-\beta-1>0).$$

Nach der Formel

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\,F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ z)$$

ergiebt sich aus obiger Formel:

$$\int \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta-1}}\,dx$$

$$= \frac{\Pi(\alpha)}{2^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,\Pi(-\beta-1)\,\Pi(\gamma)}\,z^{\gamma}\,F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ z^2),$$

$$(\gamma-\alpha-\beta-1>0),$$

oder wenn α, β, γ an Stelle von $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$ gesetzt wird:

$$\int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx$$

$$= \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\,z^{\gamma-1}\,F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z^2), \qquad (\gamma-\alpha-\beta>0).$$

Durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens erhält man schliesslich für kleine Werthe von z:

$$(33)\quad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx = \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\,z^{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma,z^2),$$

($\alpha>0$; $\gamma-\alpha-\beta+1>0$; weder $\alpha-\beta$ noch $\gamma-1$ negativ ganzzahlig).

Für $z=0$ und $\gamma=1$ bleibt (33) nur giltig, sofern $\alpha+\beta<\frac{3}{2}$.

Wie schon erwähnt gilt (33) in der Umgebung des Nullpunktes; es ist noch zu untersuchen, wie der Werth des betrachteten Integrales sich über den Punkt $z=1$ hinaus fortsetzt.

Ist $z>1$, so setze man

$$z=\frac{1}{\zeta}$$

und man erhält:

$$\varphi(z) = \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}\left(\frac{x}{\zeta}\right)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx. \quad (\zeta<1).$$

Man substituire unter der Voraussetzung $\zeta > 0$,

$$\xi = \frac{x}{\zeta},$$

so folgt:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\zeta^{\gamma-\alpha-\beta-1}} \int_0^\infty \frac{J^{\gamma-1}(\xi)\, J^{\alpha-\beta}(\xi\zeta)}{\xi^{\gamma-\alpha-\beta}}\, d\xi$$

oder

$$\frac{\varphi(z)}{z^{\gamma-\alpha-\beta-1}} = \int_0^\infty \frac{J^{\gamma-1}(\xi)\, J^{\alpha-\beta}(\xi\zeta)}{\xi^{\gamma-\alpha-\beta}}\, d\xi. \quad (\zeta < 1). \tag{34}$$

Mit Hilfe von (33) ergiebt sich hieraus:

$$\int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx \tag{35}$$

$$= \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\alpha-\beta)}\, z^{\gamma-2\alpha-1} F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z^2}\right)$$

$$(z > 1).$$

Es geht somit das Integral an der Stelle $z = 1$ in eine andere Function über, da die in (35) vorkommende Function nicht die reguläre Fortsetzung der in (33) vorkommenden ist.

Man sieht leicht ein, dass $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ für $z = 1$ endlich und stetig bleibt, sobald $\gamma - \alpha - \beta > 0$; bezeichnet man die in der Zahl n enthaltene grösste ganze Zahl mit $E(n)$, so bleiben auch die Ableitungen von φ bis zur Ordnung $E(\gamma - \alpha - \beta)$ endlich und stetig. Die höheren Ableitungen dagegen sind für $z = 1$ unstetig. Es folgt dies daraus, dass φ selbst an der betreffenden Stelle unstetig wird, sobald $\gamma - \alpha - \beta \leqq 0$. Setzt man nämlich in diesem Falle

$$\alpha + \beta - \gamma = 1 - \lambda,$$

wo

$$0 < \lambda \leqq 1,$$

so ist:

$$\varphi(1) = \int_0^\infty x^{1-\lambda} J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}(x)\, dx. \tag{36}$$

Für die obere Grenze ist die zu integrirende Function gleich:

$$\frac{2}{\pi} \frac{\cos\left\{\frac{2(\alpha-\beta)+1}{4}\pi - x\right\} \cos\left\{\frac{2\gamma-1}{4}\pi - x\right\}}{x^\lambda}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\cos\left\{\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\pi - 2x\right\} + \cos\frac{\gamma-\alpha+\beta-1}{2}\pi}{x^\lambda}.$$

Wegen des zweiten Summanden wird $\varphi(1)$ im allgemeinen unendlich werden; nur in dem Falle, dass $\gamma - \alpha + \beta$ eine gerade Zahl ist, wird $\varphi(1)$ endlich bleiben. Dieser Grenzwerth ist noch zu ermitteln.

Es sei

$$\gamma - \alpha + \beta = 2m \tag{37}$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Aus der Ungleichheit

$$0 < \gamma - \alpha - \beta + 1 \leqq 1$$

folgt alsdann:

$$m \leqq \beta < m + \tfrac{1}{2} \tag{38}$$

und es ist zu ermitteln das Integral:

$$\int_0^\infty x^{2(\beta-m)} J^{\alpha-\beta}(x) J^{\alpha-\beta+2m-1}(x)\, dx = \psi(m). \tag{39}$$

Für $m = 0$ und 1 lässt sich der Werth von (39) leicht finden. Nämlich aus (5a) und (5b) folgt:

$$\frac{n}{x} J^{(n)}(x) + \frac{dJ^n(x)}{dx} = J^{n-1}(x). \tag{40}$$

Setzt man $n = \alpha - \beta$ und multiplicirt (40) mit $x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x)$ so folgt:

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta) x^{2\beta-1} [J^{\alpha-\beta}(x)]^2 + x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x) \frac{dJ^{\alpha-\beta}(x)}{dx} \\ = x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x) J^{\alpha-\beta-1}(x).\end{aligned} \tag{41}$$

Nun ist:

$$x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x) \frac{dJ^{\alpha-\beta}(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [x^\beta J^{\alpha-\beta}(x)]^2 - \beta x^{2\beta-1} [J^{\alpha-\beta}(x)]^2,$$

somit erhält man aus (41):

$$\begin{aligned}(\alpha - 2\beta) x^{2\beta-1} [J^{\alpha-\beta}(x)]^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [x^\beta J^{\alpha-\beta}(x)]^2 \\ = x^{2\beta} J^{\alpha-\beta}(x) J^{\alpha-\beta-1}(x).\end{aligned} \tag{42}$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen 0 und ∞, so verschwindet das Integral aus dem zweiten Gliede, da $\alpha > 0$ und $\beta < \frac{1}{2}$ (nach (38)) und man erhält:

$$(\alpha - 2\beta) \int_0^\infty x^{2\beta-1} J^{\alpha-\beta}(x) J^{\alpha-\beta}(x)\, dx = \psi(0). \tag{43}$$

Auf das Integral in (43) lässt sich (33) anwenden, da $1 - 2\beta > 0$, und es folgt, wenn man in (33) $\gamma = \alpha - \beta + 1$ setzt:

$$(44)\qquad \psi(0) = \frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(-2\beta)}{2^{1-2\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\alpha-2\beta-1)}, \quad \left(0 \leqq \beta < \tfrac{1}{2}\right).$$

Successive lässt sich aus (44) der Werth von ψ für kleinere und grössere m finden. Durch Induction findet man so:

$$(45)\qquad \psi(m) = \frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi 2(m-\beta)}{2^{1+2m-2\beta}(m-\beta)\,\Pi(-\beta)\,\Pi(2m-\beta-1)\,\Pi(\alpha+2m-2\beta-1)},$$
$$\left(m \leqq \beta < m+\tfrac{1}{2}\right).$$

Um die Richtigkeit von (45) zu erweisen, setze man:

$$(46)\qquad \psi_1(m) = \int_0^\infty x^{2(\beta-m)}\, J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\alpha-\beta+2m+1}(x)\, dx,$$

so ergiebt sich vermöge (5a) aus (39) und (46):

$$(47)\quad \psi(m)+\psi_1(m) = 2(\alpha-\beta+2m)\int_0^\infty x^{2(\beta-m)-1}\, J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\alpha-\beta+2m}(x)\, dx.$$

Das Integral in (47) lässt sich wieder durch (33) finden und man erhält unter der Annahme der Richtigkeit von (45):

$$(48)\qquad \psi_1(m) = \frac{\Pi(\alpha)\,\Pi 2(m-\beta)}{2^{1+2m-2\beta}(m-\beta)\,\Pi(-\beta-1)\,\Pi(2m-\beta)\,\Pi(\alpha+2m-2\beta)},$$
$$\left(m \leqq \beta < m+\tfrac{1}{2}\right).$$

Nun sieht man aus (46) dass

$$(49)\qquad \psi_1(\alpha, \beta\, m) = \psi(\alpha+1, \beta+1, m+1).$$

Mit Hülfe von (49) folgt aus (48):

$$(50)\quad \psi(\alpha,\beta,m+1) = \frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi 2(m-\beta+1)}{2^{2+2m-2\beta}(m-\beta+1)\,\Pi(-\beta)\,\Pi(2m-\beta+1)\,\Pi(\alpha+2m-2\beta+1)},$$
$$\left(m+1 \leqq \beta < m+\tfrac{3}{2}\right).$$

Setzt man aber in (45) $m+1$ an Stelle von m, so folgt auch (50). Nach der bekannten Kästner'schen Schlussweise folgt somit die Richtigkeit von (45).

Das Resultat der bisherigen Untersuchungen lässt sich nun folgendermassen zusammenfassen:

Ist weder $\alpha-\beta$ noch $\gamma-1$ eine negative ganze Zahl und sowohl α als auch $\gamma-\alpha-\beta+1$ grösser als Null, so ist:

$$(51)\qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\, J^{\gamma-1}(xz)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\, dx$$
$$= \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\; z^{\gamma-1}\; F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) \qquad (z<1),$$

$$(52)\qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(xs)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx$$

$$= \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\alpha-\beta)}\,s^{\gamma-2\alpha-1}\,F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1\,\frac{1}{s^2}\right)\,(s>1)$$

mit Ausnahme der drei singulären Punkte $s = 0,\ 1,\ \infty$.

Für $s = 0$ bleibt (51) giltig, mit Ausnahme des Falles

$$\gamma = 1$$

und gleichzeitig

$$\alpha + \beta > \frac{3}{2}.$$

Für $s = \infty$ hat in jedem Fall das Integral den Werth Null.

Für $s = 1$ bleiben (51) und (52) giltig und gehen in einander über, sobald

$$\gamma - \alpha - \beta > 0.$$

Ist

$$\gamma - \alpha - \beta \leqq 0$$

so wird im allgemeinen das Integral für $s = 1$ unendlich gross; nur wenn alsdann

$$\gamma - \alpha + \beta = 2m,$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl mit Einschluss der Null bedeutet, ist

$$(53)\qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(x)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx = \frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)},$$

$$(\gamma - \alpha - \beta < 0)$$

und

$$(54)\qquad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha-\beta}(x)\,J^{\gamma-1}(x)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx \begin{cases} = (-1)^{\beta-1}\cdot\frac{1}{2}, & (\beta>0,\ \gamma-\alpha-\beta=0), \\ = (-1)^{-\beta}\cdot\frac{1}{2}, & (\beta\leqq 0,\ \gamma-\alpha-\beta=0). \end{cases}$$

Durch Specialisirung von α, β und γ ergeben sich aus den Formeln (51)—(54) viele theils schon bekannte Integralformeln.

Setzt man:

$$\alpha = \frac{n+m}{2},\quad \beta = \frac{n-m}{2},\quad \gamma = n+1$$

so erhält man:

(55)
$$\int_0^\infty \frac{J^m(x)\,J^n(xz)}{x}\,dx$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\dfrac{\Pi\left(\frac{m+n}{2}-1\right)}{\Pi\frac{m-n}{2}\,\Pi n}\,z^n\,F\left(\frac{m+n}{2},\ \frac{n-m}{2},\ n+1,\ z^2\right), & (z<1), \\ \dfrac{1}{(m+n)\,\Pi\frac{m-n}{2}\,\Pi\frac{n-m}{2}} = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\sin\frac{m-n}{2}\,\pi}{m^2-n^2}, & (z=1), \\ \frac{1}{2}\cdot\dfrac{\Pi\left(\frac{m+n}{2}-1\right)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\Pi m}\,z^{-m}\,F\left(\frac{m+n}{2},\ \frac{m-n}{2},\ m+1,\ \frac{1}{z^2}\right), & (z>1), \end{cases}$$

unter der Voraussetzung $m+n>0$. Ist speciell $m-n$ eine positive gerade Zahl, so ist:

(56)
$$\int_0^\infty \frac{J^m(x)\,J^n(xz)}{x}\,dx$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\dfrac{\Pi\left(\frac{m+n}{2}-1\right)}{\Pi\left(\frac{m-n}{2}\right)\Pi n}\,z^n\cdot F\left(\frac{m+n}{2},\ \frac{n-m}{2},\ n+1,\ z^2\right), & (z<1), \\ 0, & (z\geqq 1), \end{cases}$$

und ist $m=n$, so folgt

(57)
$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)\,J^n(xz)}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2n}\cdot z^n, & (z\leqq 1), \\ \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{z^n}, & (z\geqq 1). \end{cases}$$

Setzt man:
$$\alpha=\frac{n}{2},\quad \beta=-\frac{n}{2},\quad \gamma=\frac{1}{2},$$

so folgt, bei Berücksichtigung von

(58)
$$J^{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos x,$$

(59)
$$J^{+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x,$$

aus (51) und (52):

$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)\cos(xz)}{x}\,dx$$
$$(n>0)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{n}\,F\left(\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2},\ \frac{1}{2},\ z^2\right), & (z\leqq 1), \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Pi\frac{n}{2}}{n\,\Pi\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\Pi n}\cdot\frac{1}{z^n}\cdot F\left(\frac{n}{2},\ \frac{n+1}{2},\ n+1,\ \frac{1}{z^2}\right), & (z\geqq 1). \end{cases}$$

Es ist

$$\Pi\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}}$$

und

$$\frac{\Pi\frac{n}{2}\,\Pi\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\Pi n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n},$$

folglich

(60)
$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)\cos(xz)}{x}\,dx \qquad (n>0)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{n}\,F\left(\frac{n}{2},-\frac{n}{2},\frac{1}{2},z^2\right), & (z^2\leqq 1),\\ \frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\cdot\frac{1}{(2z)^n}F\left(\frac{n}{2},\frac{n+1}{2},n+1,\frac{1}{z^2}\right), & (z\geqq 1).\end{cases}$$

Ist n eine ungerade ganze Zahl, so verschwindet das Integral für $z\geqq 1$. Setzt man für $z^2\leqq 1$:

$$z=\sin w \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq w\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

so folgt aus (60) mit Rücksicht auf eine bekannte Gauss'sche Formel*):

(61)
$$\int_0^\infty J^n(x)\cos(x\sin w)\frac{dx}{x}=\frac{\cos nw}{n},\quad \begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2}\leqq w\leqq\frac{\pi}{2}\\ n>0\end{pmatrix}.$$

Vermittelst (59) ergiebt sich entsprechend für

$$\alpha=\frac{n+1}{2},\quad \beta=-\frac{n-1}{2},\quad \gamma=\frac{3}{2}:$$

(62)
$$\int_0^\infty \frac{J^n(x)\sin xz}{x}\,dx \qquad (n>-1)$$
$$=\begin{cases}z\,F\left(\frac{n+1}{2},-\frac{n-1}{2},\frac{3}{2},z^2\right) & (z^2\leqq 1),\\ \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\cdot\frac{1}{(2z)^n}\cdot F\left(\frac{n}{2},\frac{n+1}{2},n+1,\frac{1}{z^2}\right), & (z\geqq 1).\end{cases}$$

Ist n eine gerade ganze Zahl, so verschwindet das Integral für $z\geqq 1$. Macht man für $z^2\leqq 1$ dieselbe Substitution wie oben, so folgt:

(63)
$$\int_0^\infty J^n(x)\sin(x\sin w)\frac{dx}{x}=\frac{\sin nw}{n},\quad \begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2}\leqq w\leqq\frac{\pi}{2}\\ n>-1\end{pmatrix}.$$

*) Gauss' Werke, Bd. III, pag. 127. Form. XX.

Mit Rücksicht auf die Kummer'sche Gleichung:*)

$$F(\alpha,\beta,2\beta,x)=2^{2\alpha}(1+\sqrt{1-x})^{-2\alpha}F\left\{\alpha,\ \alpha-\beta+\tfrac{1}{2},\ \beta+\tfrac{1}{2},\ \left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2\right\}$$

ist:

$$(64)\quad F\left(\tfrac{n}{2},\ \tfrac{n+1}{2},\ n+1,\ \tfrac{1}{z^2}\right)=\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}\right)^{-n}=\{2z(z-\sqrt{z^2-1}\}^n,$$

$$(z\geq 1).$$

Somit ergiebt sich aus (60) und (62):

$$(65)\quad \int_0^\infty J^n(x)\cos xz\,\frac{dx}{x}=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\cdot(z-\sqrt{z^2-1})^n,\quad \begin{pmatrix} z\geq 1\\ n>0\end{pmatrix},$$

$$(66)\quad \int_0^\infty J^n(x)\sin xz\,\frac{dx}{x}=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot(z-\sqrt{z^2-1})^n,\quad \begin{pmatrix} z\geq 1\\ n>-1\end{pmatrix}.$$

Setzt man:

$$\gamma=\alpha;\quad \beta=1-\mu$$

so ist:

$$(67)\quad \int_0^\infty \frac{J^{\alpha+\mu-1}(x)\,J^{\alpha}(xz)}{x^{\mu-1}}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\mu-1}\Pi(\mu-1)}\cdot z^{\alpha-1}\cdot(1-z^2)^{\mu-1}, & (z<1),\\ 0, & (z>1).\end{cases}$$

$$(\alpha>0;\ \mu>0)$$

Ist speciell

$$\alpha=1,\quad \mu=\tfrac{1}{2},$$

so folgt:

$$(68)\quad \int_0^\infty \sin x\,J^0(xz)\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}, & (z^2<1),\\ 0, & (z^2>1),\end{cases}$$

und ist

$$\alpha=\tfrac{1}{2},\quad \mu=\tfrac{1}{2},$$

so erhält man:

---

*) Crelle Journ. f. M. Bd. 15, pag. 77, Formel 43. (NB) In der Formel ist ein Druckfehler; statt $\beta+\frac{1}{2}$ steht dort $\alpha-\beta+\frac{1}{2}$.

$$(69)\qquad \int_0^\infty J^0(x)\cos(xz)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, & (z^2<1), \\ 0\ , & (z^2>1). \end{cases}$$

Diese Formeln lassen sich auch schreiben:

$$(70)\qquad \left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \cos(ax)\,J^0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \\ &\int_0^\infty \sin(ax)\,J^0(bx)\,dx = 0 \end{aligned}\right\} b^2>a^2,$$

und

$$(71)\qquad \left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \cos(ax)\,J^0(bx)\,dx = 0 \\ &\int_0^\infty \sin(ax)\,J^0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \end{aligned}\right\} a^2>b^2.$$

Diese vier Formeln sind zuerst von Herrn H. Weber*) aufgestellt worden.

Aus (51)–(54) lassen sich auch einige auf die Kugelfunctionen P und Q bezügliche Integralformeln ableiten.

Es ist:**)

$$P^{2n}(x) = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} F\left(n+\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}, x^2\right),$$

$$P^{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n} x\cdot F\left(n+\tfrac{3}{2}, -n, \tfrac{3}{2}, x^2\right),$$

$$P^n(\cos\vartheta) = F\left(n+1, -n, 1, \sin^2\tfrac{\vartheta}{2}\right),$$

$$P^n(\cos\vartheta) = (-1)^n F\left(n+1, -n, 1, \cos^2\tfrac{\vartheta}{2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$(72)\qquad \int_0^\infty J^{2n+\frac{1}{2}}(x)\cos xz\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = \begin{cases} (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot P^{2n}(z), & (z^2<1), \\ (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\ , & (z^2=1), \\ 0\ , & (z^2>1); \end{cases}$$

*) Crelle, Journ. f. M. Bd. 75, pag. 77.

**) Heine, Handbuch d. Kugelfunct. I, §§ 4, 5.

$$\int_0^{\infty} \frac{J^{2n+1}(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \begin{cases} (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot P^{2n+1}(\varepsilon), & (\varepsilon^2 < 1), \\ (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}, & (\varepsilon^2 = 1), \\ 0, & (\varepsilon^2 > 1); \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} J^{2n+1}(x) J^0\left(x \sin \frac{\vartheta}{2}\right) dx = \begin{cases} P^n(\cos\vartheta), & \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} < 1\right), \\ (-1)^n \cdot \frac{1}{2}, & (\vartheta^2 = \pi), \\ 0, & \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} > 1\right), \end{cases}$$

$$(75) \quad \int_0^{\infty} J^{2n+1}(x) J^0\left(x \cos \frac{\vartheta}{2}\right) dx = \begin{cases} (-1)^n P^n(\cos\vartheta), & \left(\cos^2 \frac{\vartheta}{2} < 1\right), \\ (-1)^n \cdot \frac{1}{2}, & (\vartheta = 0), \\ 0, & \left(\cos^2 \frac{\vartheta}{2} > 1\right). \end{cases}$$

Aus (74) und (75) lassen sich auf einfache Weise die von Dirichlet und Mehler angegebenen Integralformeln der Kugelfunctionen ableiten. Setzt man in (74) für $J^0\left(x \sin \frac{\vartheta}{2}\right)$ den bekannten Integralausdruck und kehrt die Integrationsordnung um, so folgt:

$$(76) \quad \int_0^{\infty} J^{2n+1}(x) J^0\left(x \sin \frac{\vartheta}{2}\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dw \int_0^{\infty} J^{2n+1}(x) \cos\left(x \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \omega\right) dx.$$

Auf das innere Integral wird man geführt, wenn man in (51) setzt:

$$\alpha = n + 1, \quad \beta = -n, \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Man erkennt hieraus, dass dasselbe endlich ist, sobald

$$\sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \omega < 1;$$

dagegen unendlich wird für

$$\sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \omega = 1.$$

Damit also die Umkehrung der Integrationsordnung in (76) zulässig sei, muss sein

$$\vartheta < \pi.$$

Unter dieser Voraussetzung ist, wie sich sofort durch Differentiation aus (63) ergiebt:

$$(77)\qquad \int_0^\infty J^{2n+1}(x)\cos\left(x\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\omega\right)dx = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi},$$

wenn man setzt

$$(78)\qquad \sin\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin\omega = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Somit erhält man aus (76):

$$(79)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\ \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Führt man φ als Integrationsvariabele ein, so erhält man:

$$P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{2\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}},$$

$$(80)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}. \qquad (0<\vartheta<\pi)$$

Setzt man

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin\omega = \sin\frac{\varphi}{2},$$

so folgt auf demselben Wege aus (75):

$$(-1)^n P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi-\vartheta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{2\sqrt{\cos^2\frac{\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}},$$

$$(81)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}, \quad (0<\vartheta<\pi).$$

Die Formeln (80) und (81) rühren von Mehler*) her. Addirt man

*) Mathem. Annalen Bd. V, pag. 141.

(80) und (81) und subtrahirt man dieselben, nachdem man n mit $n-1$ vertauscht hat, so ergeben sich die Formeln:

$$\pi P^n(\cos\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}} + \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}},$$

$$(n>1)\quad 0 = \int_0^{\vartheta} \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}} - \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}.$$

Durch Addition und Subtraction folgen hieraus die beiden Dirichlet'schen Formeln:*)

$$(82)\quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} P^n(\cos\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{\cos n\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}} + \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\cos n\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}, \\ \frac{\pi}{2} P^n(\cos\vartheta) = -\int_0^{\vartheta} \frac{\sin n\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}} + \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin n\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}. \end{cases}$$

Die Formeln (82) verlieren für $n=0$ ihre Giltigkeit, während (80) und (81) für diesen Fall auch giltig sind.

Für ein reelles $x<1$ bestehen die Gleichungen:

$$Q^{2n}(x) = (-1)^n \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)} \cdot x \cdot F\left(n+1,\ \frac{1}{2}-n,\ \frac{3}{2},\ x^2\right),$$

$$Q^{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\ F\left(n+1,\ -\frac{1}{2}-n,\ \frac{1}{2},\ x^2\right),$$

ferner für $x>1$

$$Q^n(x) = \frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} F\left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{x^2}\right),^{**})$$

während für $x=1$ Q^n unendlich wird.

Setzt man demgemäss in (51) und (52)

$$\alpha = n+1,\quad \beta = \frac{1}{2}-n,\quad \gamma = \frac{3}{2},$$

resp.

$$\alpha = n+1,\quad \beta = -\frac{1}{2}-n,\quad \gamma = \frac{1}{2},$$

*) Crelle, Journal f. Math. Bd. 17, pag. 41.

**) Heine, Handbuch der Kugelf. I, §§ 17, 29.

so ergiebt sich nach einigen einfachen Reductionen:

$$(83)\qquad \int_0^\infty J^{2n+\frac{1}{2}}(x)\sin x z\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Q^{2n}(z),$$

$$(84)\qquad \int_0^\infty J^{2n+\frac{3}{2}}(x)\cos x z\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Q^{2n+1}(z).$$

Diese Formeln gelten für jedes reelle z und sind eine Ergänzung der Formeln (72) und (73).

Als letzte Anwendung der allgemeinen Formeln setze man

$$s = -m, \qquad \gamma = \alpha - m,$$

wo m eine positive ganze Zahl mit Einschluss der Null bedeutet. Aus (51), (52) und (54) folgt alsdann:

$$(85)\qquad \int_0^\infty J^{\alpha+m}(x)\,J^{\alpha-m-1}(xz)\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Pi(\alpha-1)}{\Pi m\,\Pi(\alpha-m-1)}\,z^{\alpha-m-1}F(\alpha,-m,\alpha-m,z^2), & (z<1),\\ (-1^m\,\dfrac{1}{2} & ,\quad (z=1),\\ 0 & ,\quad (z>1). \end{cases}$$

Setzt man in (85) $m = 0$ und dividirt durch $z^{\alpha-1}$, so erhält man den discontinuirlichen Factor

$$(86)\qquad z^{\frac{1}{\alpha-1}}\int_0^\infty J^{\alpha}(x)\,J^{\alpha-1}(xz)\,dx = \begin{cases} 1, & (z^2<1),\\ \frac{1}{2}, & (z^2=1),\\ 0, & (z^2>1). \end{cases}$$

Setzt man hierin im speciellen $\alpha = 1$, so erhält man den Weber'schen discontinuirlichen Factor:*)

$$(87)\qquad \int_0^\infty J^1(x)\,J^0(xz)\,dx = \begin{cases} 1, & (z^2<1),\\ \frac{1}{2}, & (z^2=1),\\ 0, & (z^2>1). \end{cases}$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}$, ergiebt sich der bekannte Dirichlet'sche discontinuirliche Factor:

*) Crelle, Journal f. Math. Bd. 75, pag. 80.

$$(88) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x \cos xz}{x}\,dx = \begin{cases} 1, & (z^2<1), \\ \frac{1}{2}, & (z^2=1), \\ 0, & (z^2>1), \end{cases}$$

Als Ergänzung des Integrales in (88) sei noch erwähnt der Fall

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}.$$

Diese Substitution ergiebt aus (51) und (52):

$$(89) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x \sin xz}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\log\frac{1+z}{1-z}, & (z<1), \\ \frac{1}{2}\cdot\log\frac{z+1}{z-1}, & (z>1). \end{cases}$$

Für $z = 1$ wird das Integral unendlich.

Berlin, im Februar 1887.

Ueber die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher gegebene Gattungen algebraischer Grössen enthalten sind.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

Ein bekannter und wichtiger Satz der Algebra sagt aus, dass beliebig viele algebraische Irrationalitäten $\xi, \xi', \ldots$ stets durch eine mit unbestimmten Coefficienten gebildete lineare Verbindung

$$\eta = u\xi + u'\xi' + \cdots$$

rational ausgedrückt werden können. Dieser Satz ist zuerst von Abel in seinem „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques," (Oeuvres [1881] t. I, p. 547) ausgesprochen worden; indessen scheint weder Abel noch irgend einer der späteren Algebraiker, welche sich mit dem Beweise des angeführten Satzes beschäftigten, genauer untersucht zu haben, in welcher Weise der algebraische Charakter der Grösse η durch denjenigen der Grössen $\xi, \xi', \ldots$ bestimmt wird. In dieser Richtung liegt offenbar die Frage zunächst, von welchem Grade die in einem gegebenen Rationalitätsbereich irreducibele Gleichung ist, welcher die Grösse η genügt. Dieser Grad soll in der vorliegenden Untersuchung bestimmt und das erhaltene Resultat zur Ableitung verschiedener algebraischer und gruppentheoretischer Sätze benutzt werden.

Bedient man sich der Bezeichnungsweise, welche Herr Kronecker in § 2 seiner „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" (Crelle's Journal Bd. XCII, S. 6) eingeführt hat, so sind die Gattungen $\xi, \xi', \ldots$ unter der Gattung η enthalten. Da nun offenbar, wenn alle Grössen $\xi, \xi', \ldots$ durch eine Grösse ζ rational ausdrückbar sind, dasselbe auch von η gilt, so ist die Gattung η unter der Gattung ζ enthalten oder mit ihr identisch, ist also die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher die Gattungen $\xi, \xi', \ldots$ enthalten sind; der Grad der irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse η genügt, kann also auch definirt werden als die Ordnungszahl der Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher die Gattungen $\xi, \xi', \ldots$ enthalten sind.

Die einfachen Entwicklungen, welche zur Bestimmung dieser

Ordnungszahl führen, stehen in enger Verbindung mit der von Herrn Kronecker in § 4 der citirten Schrift gegebenen Methode, in einem Gattungsbereich die irreducibeln Factoren einer gegebenen ganzen Function zu finden. Aus dieser Methode kann ein Theil der hier abzuleitenden Resultate mit Leichtigkeit abgelesen werden, während sich andrerseits aus den vorliegenden Untersuchungen eine neue arithmetische Ableitung jener Methode ergiebt.

Betreffs der Bezeichnungen werde festgesetzt, dass jedes Functionszeichen eine ganze rationale Function der beigefügten Argumente bedeuten soll, deren Coefficienten einem beliebig gegebenen Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ angehören. Auf diesen Bereich sind auch die Ausdrücke reducibel und irreducibel überall da zu beziehen, wo nicht ausdrücklich Irrationalitäten, welche dem Bereich $\mathfrak{R}$ nicht angehören, adjungirt werden.

§ 1.

Hülfssätze betreffend die Normen ganzer Functionen.

1. Eine beliebige irreducibele Gleichung m^{ten} Grades

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

habe die Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$; bildet man dann mit einem beliebigen Polynom $f(y, x)$ das Product

$$N(y) = \prod_{\nu=1}^{m} f(y, \xi_\nu)$$

und versteht unter $H(y)$ einen beliebigen Theiler von $N(y)$, so müssen die Functionen $H(y)$ und $f(y, \xi_\varrho)$ einen gemeinsamen Theiler besitzen, der in y vom mindestens ersten Grade ist. Denn andernfalls könnte man vermittelst des Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers eine Gleichung

$$H(y)\,h(y, \xi_\varrho) + f(y, \xi_\varrho)\,\varphi(y, \xi_\varrho) = 1 \tag{2}$$

herleiten, und da die Gleichung (1) irreducibel ist, so bliebe die Gleichung (2) richtig, wenn man für ξ_ϱ eine beliebige Wurzel der Gleichung (1), also für ϱ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots m$ setzt. Ist nun η eine beliebige Wurzel der Gleichung $H(y) = 0$, so ist offenbar $N(\eta) = 0$, oder

$$0 = \prod_{\nu=1}^{m} f(\eta, \xi_\nu);$$

und besteht demnach mindestens eine Gleichung $f(\eta, \xi_\sigma) = 0$. Dann verschwindet aber die linke Seite der Gleichung (2), wenn man ϱ durch σ und y durch η ersetzt; die Annahme dieser Gleichung führt

somit auf einen Widerspruch; die Functionen $H(y)$ und $f(y, \xi_\varrho)$ können also nicht relativ prim sein.

2. Jetzt sei speciell $H(y)$ ein beliebiger irreducibeler Factor von $N(y)$ und $g(y, \xi_\varrho)$ der grösste gemeinsame Theiler von $H(y)$ und $f(y, \xi_\varrho)$; dann kann man setzen, indem unter a eine Grösse des Bereichs $\mathfrak{R}$ verstanden wird,

$$\prod_{\nu=1}^{m} g(y, \xi_\nu) = a(H(y))^r. \tag{3}$$

Denn wäre die linke Seite dieser Gleichung durch eine von $H(y)$ verschiedene irreducibele Function $H_0(y)$ theilbar, so müssten nach 1. die Functionen $H_0(y)$ und $g(y, \xi_\varrho)$, also auch $H_0(y)$ und $H(y)$ einen gemeinsamen Theiler besitzen, der in y vom mindestens ersten Grade ist, was der Irreducibilität der Functionen $H(y)$ und $H_0(y)$ widerspricht.

Nimmt man nun an, die Function $f(y, \xi_\varrho)$ sei in dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \xi_\varrho)$ irreducibel, so muss der grösste gemeinsame Theiler von $H(y)$ und $f(y, \xi_\varrho)$ entweder $= 1$, oder $= f(y, \xi_\varrho)$ sein; da der erstere Fall aber nach 1. ausgeschlossen ist, so folgt

$$f(y, \xi_\varrho) = g(y, \xi_\varrho),$$

und die Gleichung (3) ergiebt den folgenden Satz.

Ist das Polynom $f(y, \xi_\varrho)$ im Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \xi_\varrho)$ irreducibel, so ist seine Norm Potenz einer irreducibeln ganzen Function von y.

3. Wenn speciell die Norm von $f(y, \xi_\varrho)$ die erste Potenz einer irreducibeln Function ist, so können keine zwei Gleichungen $f(y, \xi_\nu) = 0$ eine Wurzel y gemein haben; ist also z. B. $f(\eta, \xi_1) = 0$, so haben die Gleichungen

$$f(\eta, x) = 0, \qquad F(x) = 0 \tag{4}$$

nur die einzige Wurzel ξ_1 gemein; diese Grösse kann also rational durch die Coefficienten der Gleichungen (4) ausgedrückt werden, sodass man setzen kann

$$\xi_1 = \Theta(\eta). \tag{5}$$

Geht man umgekehrt von der Relation (5) aus, ohne die Norm von $f(y, \xi_1)$ als irreducibel vorauszusetzen, und versteht unter $\eta, \eta', \eta'', \ldots \eta^{(p-1)}$ die Wurzeln der Gleichung

$$f(y, \xi_1) = 0, \tag{6}$$

so folgt aus der Irreducibilität dieser Gleichung im Bereich $(\mathfrak{R}, \xi_1)$ und der Relation (5)

$$\xi_1 = \Theta(\eta) = \Theta(\eta') = \cdots = \Theta(\eta^{(p-1)}). \tag{7}$$

Ist nun, wie oben

$$H(y) = 0 \tag{8}$$

die im Bereich $\mathfrak{R}$ irreducibele Gleichung, welcher die Grösse η genügt, und $\eta^{(p)}$ eine Wurzel der Gleichung (8), welche der Gleichung (6) nicht genügt, so kann nicht

$$\xi_1 = \Theta(\eta^{(p)}) \tag{9}$$

sein. Denn nach (7) ist

$$f(\eta,\ \Theta(\eta)) = 0, \tag{10}$$

also wegen der Irreducibilität der Gleichung (8) auch

$$f(\eta^{(p)},\ \Theta(\eta^{(p)})) = 0;$$

die Gleichung (9) ergäbe also das Resultat

$$f(\eta^{(p)},\ \xi_1) = 0$$

was der Annahme, dass $\eta^{(p)}$ keine Wurzel der Gleichung (6) sein sollte, widerspricht. Hieraus folgt, dass die Gleichung

$$P(x) = \prod_{\nu=0}^{h-1}(x - \Theta(\eta^{(\nu)})) = 0, \tag{11}$$

wenn $\eta, \eta', \ldots \eta^{(h-1)}$ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (8) bedeuten, die genau p-fache Wurzel $x = \xi_1$ besitzt. Nun ist die lineare Function $x - \Theta(\eta)$ im Bereich $(\mathfrak{R}, \eta)$ offenbar unzerlegbar, die Norm $P(x)$ also nach 2. Potenz einer irreducibeln Function. Diese muss für $x = \xi_1$ verschwinden, also bis auf einen constanten Factor mit $F(x)$ identisch sein, und wegen der angegebenen Vielfachheit der Wurzel ξ_1 in der Gleichung (11) ist der Exponent jener Potenz $= p$, also $h = mp$ und bis auf einen constanten Factor

$$P(x) = (F(x))^p.$$

Bei passender Anordnung der Indices besteht demnach ein Gleichungssystem

$$\xi_\nu = \Theta(\eta^{(\lambda+(\nu-1)p)}). \quad \lambda=0,1,\ldots p-1;\ \nu=1,2,\ldots m$$

Hieraus ergiebt sich mit Berücksichtigung der aus (10) folgenden h Gleichungen

$$f(\eta^{(\alpha)},\ \Theta(\eta^{(\alpha)})) = 0, \quad \alpha=0,1,\ldots h-1$$

dass die Gleichung p^{ten} Grades $f(y, \xi_\nu) = 0$ durch die p Werthe

$$\eta^{((\nu-1)p)},\ \eta^{((\nu-1)p+1)}, \ldots \eta^{(\nu p-1)}$$

befriedigt wird, dass also keine zwei Gleichungen $f(y, \xi_\nu) = 0$ und $f(y, \xi_\varrho) = 0$, in welchen $\varrho \gtrless \nu$ ist, eine Wurzel gemein haben, und deshalb die Norm der Function $f(y, \xi_1)$ von mehrfachen Factoren frei ist. Diese Norm ist aber nach 2. Potenz einer irreducibeln Function, also selbst irreducibel. Damit ist folgender Satz bewiesen.

Ist das Polynom $f(y, \xi_1)$ im Bereich $(\mathfrak{R}, \xi_1)$ irreducibel, so ist

seine Norm dann und nur dann irreducibel, wenn man ξ_1 durch eine Wurzel der Gleichung $f(y, \xi_1) = 0$ im Bereich $\mathfrak{R}$ rational ausdrücken kann.

4. Von diesem Satze kann man eine Anwendung auf die Theorie der imprimitiven Gruppen machen. Es bilden nämlich irgend p Wurzeln $\eta, \eta', \ldots \eta^{(p-1)}$ der irreducibeln Gleichung $H(x) = 0$ ein System der Imprimitivität in der Gruppe dieser Gleichung, wenn man $H(x)$ als Norm des Ausdruckes

$$(x-\eta)(x-\eta')\ldots(x-\eta^{(p-1)}) \tag{12}$$

darstellen kann; wie z. B. in § 222 der „Substitutionentheorie" von Herrn Netto bewiesen ist. Nun hat der Ausdruck (12) nach 3. eine irreducibele Norm, wenn er erstens bei alleiniger Adjunction der symmetrischen Functionen von $\eta, \eta', \ldots \eta^{(p-1)}$ irreducibel bleibt, und zweitens diese symmetrischen Functionen durch irgend eine jener p Wurzeln rational ausdrückbar sind. Die Norm des Ausdruckes (12) verschwindet aber für $x = \eta$, muss also mit $H(x)$ identisch sein, wenn sie irreducibel ist. Unter den beiden obigen Voraussetzungen kann also die Function $H(x)$ selbst als Norm des Ausdruckes (12) dargestellt werden, sodass nach dem angeführten Satze der Substitutionentheorie die p Wurzeln $\eta, \eta', \ldots \eta^{(p-1)}$ ein System der Imprimitivität bilden. Man kann demnach folgenden Satz aufstellen.

Irgend p Wurzeln einer irreducibeln Gleichung bilden ein System der Imprimitivität, wenn sie nach Adjunction ihrer symmetrischen Functionen transitiv verbunden bleiben, und diese symmetrischen Functionen nach Adjunction einer einzigen der p Wurzeln rational werden.

Dass übrigens auch die Umkehrung dieses Satzes richtig ist, liegt auf der Hand.

§ 2.

Arithmetische Ableitung einiger der erhaltenen Resultate.

1. Um die wichtigsten der erhaltenen Sätze nach rein arithmetischen Methoden begründen zu können, schicke ich, auf die Gefahr hin, bekanntes zu wiederholen, einige elementare Hülfsbetrachtungen voraus.

Irgend zwei ganze Functionen $\varphi(x, y, z, \ldots)$ und $\psi(x, y, z, \ldots)$ sollen nach einem Modul $\mathsf{M}(x, y, z, \ldots)$ congruent heissen, wenn eine Gleichung

$$\varphi(x, y, \ldots) - \psi(x, y, \ldots) = \mathsf{M}_0(x, y, \ldots)\,\mathsf{M}(x, y, \ldots)$$

besteht, sodass beim Gebrauch des Congruenzzeichens von Nennern, welche dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehören, abgesehen werden soll.

Versteht man nun zunächst unter $\mathsf{M}(y)$ eine beliebige irreducibele Function, so kann eine Congruenz

$$f(x, y)\, g(x, y) \equiv 1 \pmod{\mathsf{M}(y)}$$

nur bestehen, wenn gleichzeitig

$$f(x, y) \equiv \varphi(y), \quad g(x, y) \equiv \psi(y) \pmod{\mathsf{M}(y)},$$

wenn also die Functionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ von x frei werden, sobald man sie nach Potenzen von x ordnet und alle durch $\mathsf{M}(y)$ theilbaren Glieder fortlässt. Denn sind etwa x^m und x^n die höchsten in f und g vorkommenden Potenzen von x, welche einen durch $\mathsf{M}(y)$ nicht theilbaren Coefficienten besitzen, und setzt man demgemäss

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} f(x, y) &\equiv x^m f_0(y) + x^{m-1} f_1(y) + \cdots \\ g(x, y) &\equiv x^n g_0(y) + x^{n-1} g_1(y) + \cdots \end{aligned}\right\} \pmod{\mathsf{M}(y)},$$

so ist offenbar

$$f(x, y)\, g(x, y) \equiv x^{m+n} f_0(y)\, g_0(y) + h(x, y) \pmod{\mathsf{M}(y)};$$

dabei kommen in $h(x, y)$ keine höheren als die $(m+n-1)^{\text{te}}$ Potenz von x vor, und das Product $f_0(y)\, g_0(y)$, dessen Factoren durch $\mathsf{M}(y)$ nicht theilbar sind, ist selbst durch $\mathsf{M}(y)$ nicht theilbar, weil dieser Modul als irreducibel vorausgesetzt worden ist. Da nun allgemein eine Congruenz

$$A_0(y) x^r + A_1(y) x^{r-1} + \cdots + A_r(y) \equiv 0 \pmod{\mathsf{M}(y)}$$

nur dann bestehen kann, wenn alle Coefficienten $A_\nu(y)$ durch $\mathsf{M}(y)$ theilbar sind, so folgt aus der Congruenz

$$x^{m+n} f_0(y)\, g_0(y) + h(x, y) \equiv 1 \pmod{\mathsf{M}(y)}$$

dass $m + n = 0$, also $m = n = 0$ sein muss, dass ferner das Polynom $h(x, y)$ identisch verschwindet; d. h. es bestehen Congruenzen (1).

2. Eine zweite Vorerinnerung ist folgende. Zwei beliebige Functionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ haben, nach dem irreducibeln Modul $\mathsf{M}(y)$ betrachtet, oder kurz mod. $\mathsf{M}(y)$ einen Theiler $T(x, y)$ gemein, wenn Congruenzen von folgender Gestalt bestehen:

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} P(x, y) &\equiv T(x, y)\, P_0(x, y) \\ Q(x, y) &\equiv T(x, y)\, Q_0(x, y) \end{aligned}\right\} \pmod{\mathsf{M}(y)}$$

und man kann den grössten Theiler, welchen die beiden Functionen mod. $\mathsf{M}(y)$ gemein haben, durch genau denselben Algorithmus erhalten, welcher zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzer Functionen von einer Variabeln dient. Dieser Algorithmus lehrt zugleich, dass entweder eine Congruenz

$$(3) \qquad P(x, y)\, \Phi(x, y) + Q(x, y)\, \Psi(x, y) \equiv 1 \pmod{\mathsf{M}(y)}$$

besteht, oder eine den Congruenzen (2) genügende Function T gefunden werden kann, welche auch „mod. $\mathsf{M}(y)$ betrachtet," d. h. wenn man sie nach Potenzen von x ordnet und die durch $\mathsf{M}(y)$ theilbaren

Glieder fortlässt, in x vom mindestens ersten Grade ist. Der letztere Fall tritt ein, so dass die Congruenz (3) unmöglich wird, wenn die „mod. $\mathsf{M}(y)$ genommene Resultante" der beiden Functionen P und Q durch $\mathsf{M}(y)$ theilbar wird. Diese Resultante wird in folgender Weise rein arithmetisch definirt. Offenbar kann man setzen

$$\left.\begin{aligned} P(x, y) &\equiv p_0(y)x^m + p_1(y)x^{m-1} + \cdots + p_m(y) \\ Q(x, y) &\equiv q_0(y)x^n + q_1(y)x^{n-1} + \cdots + q_n(y) \end{aligned}\right\} \pmod{\mathsf{M}(y)},$$

wo die Functionen p_0 und q_0 durch $\mathsf{M}(y)$ nicht theilbar sind. Bildet man dann mit den Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_m$ das Product

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(x) &= (x-u_1)(x-u_2)\cdots(x-u_m) \\ &= x^m + g_1x^{m-1} + \cdots + g_m \end{aligned}$$

und setzt

$$\prod_{\nu=1}^{m} Q(u_\nu, y) = R_0(y, g_1, g_2, \cdots g_m)$$

so wird die erwähnte Resultante durch den Ausdruck

$$R(y) = (p_0(y))^n R_0\left\{y, \frac{p_1(y)}{p_0(y)}, \frac{p_2(y)}{p_0)y)}, \cdots \frac{p_m(y)}{p_0(y)}\right\}$$

definirt, welcher offenbar eine ganze Function von y darstellt. Zum Beweis der obigen Behauptung verweise ich auf die Abhandlung von Herrn Molk, „Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité etc.", Acta mathematica Bd. VI, S. 59—64. Die dort benutzte Beweismethode ist dieselbe, nach welcher Herr Kronecker die Haupteigenschaften der Resultante zweier Gleichungen arithmetisch abgeleitet hat, und welche Herr Molk in der genannten Abhandlung S. 21 ff. reproducirt hat.

3. Versteht man nun wie in § 1 unter $f(y, x)$ eine beliebige, unter

$$F(x) = x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_m$$

eine irreducibele ganze Function, und setzt

$$\prod_{\nu=1}^{m} f(y, u_\nu) = N(y, g_1, g_2, \cdots g_m),$$

so ist nach 2. die nach einem beliebigen Modul $\mathsf{M}(y)$ genommene Resultante von $F(x)$ und $f(y, x)$

$$N(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = N(y).$$

Wenn also $H(y)$ ein beliebiger irreducibeler Divisor dieser Grösse ist, so dass die Congruenz

$$N(y) \equiv 0 \pmod{H(y)}$$

besteht, so haben die Functionen $f(y, x)$ und $F(x)$ einen Theiler

mod. $H(y)$ gemein, der mod. $H(y)$ betrachtet in x vom mindestens ersten Grade ist, und durch $f_0(y, x)$ bezeichnet werden möge. Wären nun mod. $F(x)$ betrachtet die Functionen $H(y)$ und $f(y, x)$ relativ prim, so könnte man eine Congruenz

$$H(y)h(y, x) + f(y, x)\,\varphi(y, x) \equiv 1 \pmod{F(x)} \tag{4}$$

ableiten; daraus ergäbe sich aber eine Gleichung von folgender Gestalt:

$$H(y)\,h_0(y, x) + f_0(y, x)\,\varphi_0(y, x) = 1$$

oder

$$f_0(y, x)\,\varphi_0(y, x) \equiv 1 \pmod{H(y)},$$

was bei der angegebenen Beschaffenheit der Function $f_0(y, x)$ nach 1. unmöglich ist. Die Congruenz (4) führt also auf einen Widerspruch; die Functionen $f(y, x)$ und $H(y)$ haben also nach dem Modul $F(x)$ einen Theiler gemein, der mod. $F(x)$ betrachtet in y vom mindestens ersten Grade ist, womit das in § 1, 1. erhaltene Resultat in arithmetischer Fassung bewiesen ist.

4. Ebenso kann man jetzt die Entwicklungen von § 1, 2. in arithmetischer Form reproduciren. Ist nämlich $g(y, x)$ der mod. $F(x)$ genommene grösste gemeinsame Theiler von $f(y, x)$ und $H(y)$, und setzt man

$$\prod_{\nu=1}^{m} g(y, u_\nu) = G(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m)$$

so kann die Norm $G(y, a_1, a_2, \ldots a_m)$ durch keine von $H(y)$ verschiedenen irreducibeln Functionen $H_0(y)$ theilbar sein. Denn dann könnte eine Gleichung

$$H(y)\,h(y) + H_0(x)\,h_0(y) = 1$$

also, wenn durch $g_0(y, x)$ der mod. $F(x)$ genommene grösste gemeinsame Theiler von $g(y, x)$ und $H_0(y)$ bezeichnet wird, eine Congruenz

$$g_0(y, x) \cdot \chi(y, x) \equiv 1 \pmod{F(x)} \tag{5}$$

abgeleitet werden; da nun aber nach 3. die Function $g_0(y, x)$, mod. $F(x)$ betrachtet, in y vom mindestens ersten Grade ist, so ist die Congruenz (5) nach 1. unmöglich. Somit folgt, dass die Functionen $H(y)$ und $H_0(y)$ sich höchstens um einen constanten, d. h. dem Bereich R angehörigen Factor unterscheiden, dass also, von solchen Factoren abgesehen,

$$G(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = (H(y))^r$$

gesetzt werden kann, wie schon in § 1, 2. bewiesen worden ist.

§ 3.

Die Zerlegung ganzer Functionen in ihre irreducibeln Factoren nach Adjunction irrationaler Grössen.

1. Führt man betreffs des bisher ganz willkürlichen Rationalitätsbereichs $\mathfrak{R}$ die besondere Annahme ein, dass er unter seinen Elementen keinerlei irrationale Grössen enthalten, also ein natürlicher Rationalitätsbereich sein soll, so setzen die Entwicklungen des § 2 nur die Zerlegung ganzer Functionen und den Begriff der Irreducibilität in einem natürlichen Rationalitätsbereich als bekannt voraus. Man darf diese Entwicklungen also benutzen, wenn man das Problem, die irreducibeln Factoren einer ganzen Function in einem Gattungsbereich zu finden, nach rein arithmetischen Methoden, d. h. ohne Benutzung irrationaler Grössen lösen will. Eine solche arithmetische Behandlung erscheint vom methodischen Gesichtspunkte aus bei der genannten Aufgabe wünschenswerth, weil dieselbe rein arithmetisch formulirt werden kann; hat man nämlich in dem Gattungsbereich $(\mathfrak{R}, \xi_1)$ eine Zerlegung

$$G(y, \xi_1) = G'(y, \xi_1)\, G''(y, \xi_1)$$

so folgt aus derselben, wenn ξ_1 wie oben Wurzel der irreducibeln Gleichung $F(x) = 0$ ist, die Congruenz

$$G(y, x) \equiv G'(y, x)\, G''(y, x) \pmod{F(x)};$$

das Problem, die irreducibeln Factoren der Function $G(y, \xi_1)$ in dem Gattungsbereich $(\mathfrak{R}, \xi_1)$ zu finden, ist also im Wesentlichen identisch mit der Aufgabe, die Function $G(y, x)$ in ihre nach dem Modul $F(x)$ irreducibeln Factoren zu zerlegen. Zu einer arithmetischen Lösung der letzteren Aufgabe gelangt man auf Grund der folgenden einfachen Hülfsbetrachtung.

Man bezeichne die Discriminanten der Gleichungen

$$\mathfrak{G}(x) = \prod_{\nu=1}^{m}(x - u_\nu) = x^m + \mathfrak{g}_1 x^{m-1} + \cdots + \mathfrak{g}_m = 0,$$

$$\mathfrak{H}(y) = \prod_{\nu=1}^{n}(y - v_\nu) = y^n + \mathfrak{h}_1 y^{n-1} + \cdots + \mathfrak{h}_n = 0$$

in welchen unter $u_1, u_2, \ldots u_m, v_1, v_2, \ldots v_n$ Unbestimmte zu verstehen sind, durch $\Delta_1(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m)$ und $\Delta_2(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_n)$, und die Discriminante der mit einer weiteren Unbestimmten u gebildeten Gleichung

$$\mathfrak{R}(z, \mathfrak{g}_1, \ldots \mathfrak{g}_m, \mathfrak{h}_1, \ldots \mathfrak{h}_n, u) = \prod_{\mu=1}^{m}\prod_{\nu=1}^{n}(z - u u_\mu - v_\nu) = 0$$

$\ldots \mathfrak{g}_m, \mathfrak{h}_1, \ldots \mathfrak{h}_n, u)$; letztere ist offenbar das Product

$$u(u_\mu - u_{\mu_1}) + v_\nu - v_{\nu_1},$$

man erhält, wenn man die Indices μ und μ_1 unabhängig von einander die Werthe $1, 2, \ldots m$ und ebenso die Indices ν und ν_1 die Werthe $1, 2, \ldots n$ durchlaufen lässt, dabei aber diejenigen Combinationen ausschliesst, in welchen gleichzeitig $\mu = \mu_1$ und $\nu = \nu_1$ ist. Aus dieser Form der Discriminante Δ ist ersichtlich, dass sie eine ganze Function von u ist, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von u als Product von Potenzen der Discriminanten Δ_1 und Δ_2 dargestellt werden kann. Versteht man also unter a_μ, b_ν beliebige Grössen, so ist der Ausdruck

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_n, u) \tag{1}$$

eine nicht identisch verschwindende ganze Function von u, so lange keiner der Ausdrücke

$$\Delta_1(a_1, a_2, \ldots a_m), \quad \Delta_2(b_1, b_2, \ldots b_n) \tag{2}$$

verschwindet. Sind ferner a_μ und b_ν ganze Functionen von x, so ist der Ausdruck (1) durch irgend einen irreducibeln Modul $F(x)$ nicht theilbar, solange keiner der Ausdrücke (2) durch diesen Modul theilbar ist. Unter dieser Voraussetzung kann man also die Unbestimmte u durch eine derartige Grösse des Bereichs $\mathfrak{R}$, z. B. eine ganze Zahl c ersetzen, dass auch der Ausdruck $\Delta(a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_n, c)$ durch $F(x)$ nicht theilbar ist.

2. Jetzt sei ausser dem irreducibeln Polynom

$$F(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

irgend ein Ausdruck

$$G(y, x) = y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n$$

gegeben, dessen Zerlegbarkeit mod. $F(x)$ untersucht werden soll. Setzt man dann

$$f(y, x) = G(y - cx, x)$$

so ist der Ausdruck $\Delta_2(b_1, b_2, \ldots b_n)$ offenbar die Discriminante der Gleichung $f(y, x) = 0$ ebenso wie der Gleichung $G(y, x) = 0$ mit der Unbekannten y. Bildet man ferner das Product

$$\prod_{\nu=1}^{m} f(y, u_\nu) = N(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m)$$

so folgt mit Berücksichtigung der offenbaren Identität

$$\mathfrak{N}(z, \mathfrak{g}_1, \ldots \mathfrak{g}_m, \mathfrak{h}_1, \ldots \mathfrak{h}_n, c) = \prod_{\nu=1}^{m} \mathfrak{H}(z - u_\nu c)$$

die Gleichung

$$N(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = N(y) = \mathfrak{R}(y, a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_n, c);$$

also ist $\Delta(a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_n, c)$ die Discriminante der Gleichung

$$N(y) = 0. \tag{3}$$

Nun ist die Discriminante der irreducibeln Gleichung $F(x) = 0$, d. h. $\Delta_1(a_1, a_2, \ldots a_m)$ eine von Null verschiedene Grösse des Bereichs $\mathfrak{R}$; nimmt man also an, dass die Discriminante $\Delta_2(b_1, b_2, \ldots b_n)$ durch $F(x)$ nicht theilbar ist, so gilt nach 1. dasselbe von der Discriminante der Gleichung (3); diese Discriminante kann also insbesondere auch nicht $= 0$ sein.

Eine andere arithmetische Ableitung dieses Resultats hat Herr Molk in der citirten Abhandlung S. 67—75 durchgeführt.

3. Für den Fall, dass die Grösse $\Delta_2(b_1, b_2, \ldots b_n)$ durch $F(x)$ nicht theilbar ist, kann man demnach

$$N(y) = H_1(y)\, H_2(y) \ldots H_k(y) \tag{4}$$

setzen, indem man unter $H_1, H_2, \ldots$ irreducibele und von einander verschiedene ganze Functionen versteht, in welchen die höchsten Potenzen von y den Coefficienten 1 besitzen. Dann muss nach § 2, 3. das Polynom $f(y, x)$ nach dem Modul $F(x)$ mit jeder der Functionen $H_\nu(y)$ einen Theiler gemein haben, der mod. $F(x)$ betrachtet in y vom mindestens ersten Grade ist. Bezeichnet man ferner durch $g_\nu(y, x)$ den mod. $F(x)$ genommenen grössten gemeinsamen Theiler von $H_\nu(y)$ und $f(y, x)$, und setzt

$$\prod_{\nu=1}^{m} g_\varrho(y, u_\nu) = G_\varrho(y, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_m),$$

so ist nach § 2, 4., da die Coefficienten der höchsten Potenzen von y in H_ν und f, also auch in g_ϱ und G_ϱ den Werth 1 haben,

$$G_\varrho(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = (H_\varrho(y))^{r_\varrho}.$$

Nun kann man nach der Definition der Functionen g_ϱ setzen:

$$f(y, u_\nu) \equiv g_\varrho(y, u_\nu) f_\varrho(y, u_\nu) \pmod{F(u_\nu)}$$

oder auch, da $\mathfrak{G}(u_\nu) = 0$ ist,

$$f(y, u_\nu) \equiv g_\varrho(y, u_\nu) f_\varrho(y, u_\nu) \pmod{F(u_\nu) - \mathfrak{G}(u_\nu)}$$

oder

$$f(y, u_\nu) = g_\varrho(y, u_\nu) f_\varrho(y, u_\nu) + \sum_{\mu=1}^{m} (a_\mu - \mathfrak{z}_\mu)\, \varphi_\mu(y, u_\nu).$$

Setzt man hierin successive $\nu = 1, 2, \ldots m$, multiplicirt die erhaltenen

Gleichungen und drückt die symmetrischen Functionen der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_m$ durch die Coefficienten $g_1, g_2, \ldots g_m$ aus, so ergiebt sich:

$$(5)\quad N(y, g_1, g_2, \ldots g_m) = G_\varrho(y, g_1, \ldots g_m)\, F_\varrho(y, g_1, g_2, \ldots g_m) + \sum_{\mu=1}^{m} (a_\mu - g_\mu)\, \Phi_\mu(y, g_1, \ldots g_m),$$

wobei gesetzt ist

$$F_\varrho(y, g_1, \ldots g_m) = \prod_{\mu=1}^{m} f_\varrho(y, u_\mu).$$

Auf die Gleichung (5) wenden wir einen wichtigen Satz an, welchen Gauss in Art. 5 der Abhandlung „Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem etc." (Werke Bd. III, S. 37) aufgestellt hat, den Satz nämlich, dass jede ganze Function von $g_1, g_2, \ldots g_m$, welche für unbestimmte Werthe der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_m$ verschwindet, auch identisch verschwinden muss, wenn für g_ν eine Unbestimmte w_ν substituirt wird. Setzt man dann speciell $w_\nu = a_\nu$, so ergiebt sich aus (5)

$$N(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = G_\varrho(y, a_1, a_2, \ldots a_m)\, F_\varrho(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = (H_\varrho(y))^{r_\varrho}\, F_\varrho(y, a_1, a_2, \ldots a_m);$$

berücksichtigt man also die Gleichung (4), so folgt, $r_\varrho = 1$,

$$(6)\quad G_\varrho(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = H_\varrho(y).$$

4. Hieraus kann man leicht ableiten, dass mod. $F(x)$ betrachtet keiner der Ausdrücke $g_\varrho(y, x)$ in Factoren zerfallen kann. Denn wäre etwa

$$g_\varrho(y, x) \equiv g_\varrho'(y, x)\, g_\varrho''(y, x) \pmod{F(x)},$$

so wäre auch, da $\mathfrak{G}(u_\nu) = 0$ ist,

$$g_\varrho(y, u_\nu) \equiv g_\varrho'(y, u_\nu)\, g_\varrho''(y, u_\nu) \pmod{F(u_\nu) - \mathfrak{G}(u_\nu)}$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$g_\varrho(y, u_\nu) = g_\varrho'(y, u_\nu)\, g_\varrho''(y, u_\nu) + \sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(y, u_\nu)\, (a_\mu - g_\mu),$$

also, wenn man $\nu = 1, 2, \ldots m$ setzt, die erhaltenen Gleichungen multiplicirt und die Bezeichnungen

$$G_\varrho'(y, g_1, g_2, \ldots g_m) = \prod_{\mu=1}^{m} g_\varrho'(y, u_\mu),$$

$$G_\varrho''(y, g_1, g_2, \ldots g_m) = \prod_{\mu=1}^{m} g_\varrho''(y, u_\mu)$$

einführt,

$$G_\varrho(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m) = G_\varrho'(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_m)\, G_\varrho''(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m) + \sum_{\mu=1}^{m} \Psi_\mu(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m)\,(a_\mu - \mathfrak{g}_\mu).$$

Wendet man nun abermals den citirten Satz von Gauss an und ersetzt $\mathfrak{g}_\nu$ durch a_ν, so folgt

$$G_\varrho(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = G_\varrho'(y, a_1, a_2, \ldots a_m)\, G_\varrho''(y, a_1, a_2, \ldots a_m),$$

was wegen der Gleichung (6) und der Irreducibilität der Function $H_\varrho(y)$ unmöglich ist. *Die Polynome $g_\nu(y, x)$ sind also mod. $F(x)$ irreducibel.* Zwischen irgend zweien derselben, z. B. $g_1(y, x)$ und $g_2(y, x)$ besteht also nach § 2, 2. eine Congruenz

$$(7) \qquad g_1(y, x)\,\gamma_1(y, x) + g_2(y, x)\,\gamma_2(y, x) \equiv 1 \pmod{F(x)};$$

setzt man also wie oben

$$f(y, x) \equiv g_\nu(y, x)\, f_\nu(y, x) \pmod{F(x)},$$

so ergiebt sich aus (7)

$$f(y, x)\,\gamma_1(y, x) + g_2(y, x)\,\gamma_2(y, x)\, f_1(y, x) \equiv f_1(y, x) \pmod{F(x)}$$
$$f_1(y, x) \equiv g_2(y, x)\,\{f_2(y, x)\,\gamma_1(y, x) + f_1(y, x)\,\gamma_2(y, x)\}.$$

Demnach ist die Function $f(y, x)$ nach dem Modul $F(x)$ durch das Product $g_1(y, x)\, g_2(y, x)$ theilbar, und durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens findet man, dass

$$(8) \qquad f(y, x) \equiv g_0(y, x) \prod_{\nu=1}^{k} g_\nu(y, x) \pmod{F(x)}$$

gesetzt werden kann. Hieraus folgt unmittelbar

$$f(y, u_\nu) \equiv g_0(y, u_\nu) \prod_{\nu=1}^{k} g_\nu(y, u_\nu) \pmod{F(u_\nu) - \mathfrak{G}(u_\nu)},$$

oder

$$f(y, u_\nu) = g_0(y, u_\nu) \prod_{\nu=1}^{k} g_\nu(y, u_\nu) + \sum_{\mu=1}^{m} \vartheta_\mu(y, u_\nu)\,(a_\mu - \mathfrak{g}_\mu);$$

setzt man also noch

$$\prod_{\nu=1}^{m} g_0(y, u_\nu) = G_0(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m),$$

so ergiebt sich

$$N(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m) = \prod_{\nu=0}^{k} G_\nu(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m) + \sum_{\mu=1}^{m} \Theta_\mu(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \ldots \mathfrak{g}_m)\,(a_\mu - \mathfrak{g}_\mu)$$

also nach dem mehrfach benutzten Satze von Gauss

$$N(y) = \prod_{\nu=0}^{k} G_\nu(y, a_1, a_2, \ldots a_m),$$

also nach (4) und (6)

$$G_0(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = 1. \tag{9}$$

Nun haben in den Functionen $f, g_1, \ldots g_k$ die höchsten Potenzen von y den Coefficienten 1, also gilt wegen der Congruenz (8) dasselbe von $g_0(y, x)$ nach dem Modul $F(x)$, d. h. der Coefficient der höchsten Potenz von y in $g_0(y, x)$ ist $\equiv 1 \pmod{F(x)}$. Dasselbe gilt also von dem Coefficienten der höchsten Potenz von y in $G_0(y, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_m)$, mithin auch in $G_0(y, a_1, a_2, \ldots a_m)$. Letzteres ist aber wegen der Gleichung (9) nur dann möglich, wenn in g_0 die höchste Potenz von y die nullte, also $g_0(y, x) \equiv g_0(x) \pmod{F(x)}$ ist. Dann lehrt schliesslich die Congruenz (8), dass $g_0(x) \equiv 1$, also

$$f(y, x) \equiv \prod_{\nu=1}^{k} g_\nu(y, x) \pmod{F(x)}$$

ist, oder, was dasselbe bedeutet

$$G(y, x) \equiv \prod_{\nu=1}^{k} g_\nu(y + cx, x) \pmod{F(x)},$$

womit die gesuchte Zerlegung geliefert, und das von Hrn. Kronecker angegebene Verfahren, die irreducibeln Factoren einer ganzen Function in einem Gattungsbereich zu finden, von neuem abgeleitet ist.

Der bisher ausgeschlossene Fall, dass die Discriminante

$$\Delta_2(b_1, b_2, \ldots b_m)$$

durch $F(x)$ theilbar ist, kann auf den hier behandelten Fall zurückgeführt werden, hat aber für die folgenden Entwicklungen kein Interesse.

§ 4.

Die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher zwei gegebene Gattungen enthalten sind.

1. Sind zwei beliebige, im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ irreducibele Gleichungen

$$F(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0,$$
$$G(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

gegeben, die auch mit einander identisch sein können, so seien $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ die Wurzeln der ersten, und $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ diejenigen der zweiten. Setzt man dann, wie früher

$$f(y, x) = G(y - cx),$$

indem man unter c eine Grösse des Bereichs $\mathfrak{R}$ versteht, deren Bestimmung vorbehalten bleibt, so hat die Gleichung $f(y, \xi_\mu) = 0$ offenbar die Wurzeln

$$\eta_1 + c\xi_\mu,\ \eta_2 + c\xi_\mu, \ldots y_n + c\xi_\mu;$$

die sämmtlichen mn Grössen $\xi_\mu + c\eta_\nu$ sind also die Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad \prod_{\nu=1}^{m} f(y, \xi_\nu) = N(y) = 0.$$

Nun kann man, da die Discriminante der Gleichung $G(x) = 0$ eine von Null verschiedene Grösse des Bereichs $\mathfrak{R}$, also sicher durch $F(x)$ nicht theilbar ist, nach § 3, 2. die Constante c so wählen, dass die Discriminante der Gleichung (1) von Null verschieden ist, sodass man setzen kann

$$N(y) = H_1(y)\, H_2(y) \ldots H_k(y),$$

wo die Functionen H_ν irreducibel und von einander verschieden sind. Zerlegt man ferner die Function $f(y, x)$ in ihre mod. $F(x)$ irreducibeln Factoren, oder was dasselbe bedeutet, die Function $f(y, \xi_1)$ in ihre im Bereich $(\mathfrak{R}, \xi_1)$ irreducibeln Factoren,

$$f(y, \xi_1) = g_1(y, \xi_1)\, g_2(y, \xi_1) \ldots g_k(y, \xi_1),$$
$$f(y, x) = g_1(y, x)\, g_2(y, x) \ldots g_k(y, x) \pmod{F(x)}$$

so ist nach § 3, 3. bei passender Wahl der Indices

$$H_\varrho(y) = G_\varrho(y, a_1, a_2, \ldots a_m) = \prod_{\nu=1}^{m} g_\varrho(y, \xi_\nu).$$

Wenn also z. B. die Gleichung $g_1(\eta_1, \xi_1) = 0$ besteht, und die Function $g_1(y, \xi_1)$ ist in y vom Grade r, sodass die Grösse η_1 nach Adjunction von ξ_1 Wurzel einer irreducibeln Gleichung r^{ten} Grades ist, so genügt das Binom $\eta_1 + c\xi_1$ einer irreducibeln Gleichung mr^{ten} Grades:

$$H_1(y) = \prod_{\nu=1}^{m} g_1(y, \xi_\nu) = 0.$$

2. Das hiermit erhaltene Resultat kann aber auch ohne Benutzung der §§ 2 und 3 allein aus den Sätzen des § 1 abgeleitet werden.

Bei Adjunction von ξ_1 zerfalle das Polynom $G(x)$ folgendermassen in irreducibele Factoren:

$$G(x) = \prod_{\nu=1}^{k} G_\nu(x, \xi_1)$$

und es seien etwa $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$ die Wurzeln der Gleichung $G_1(y, \xi_1) = 0$; dann hat die Gleichung $G_1(y - u\xi_1, \xi_1) = 0$ die Wurzeln

$$\eta_1 + u\xi_1, \ \eta_2 + u\xi_1, \ldots \eta_r + u\xi_1;$$

ebenso hat, wenn ν irgend einen Zahlwerth aus der Reihe $1, 2, \ldots m$ bedeutet, die Gleichung $G_1(y - u\xi_\nu, \xi_\nu) = 0$ die Wurzeln

$$\eta_1 + u\xi_\nu, \ \eta_2 + u\xi_\nu, \ldots \eta_r + u\xi_\nu.$$

Daraus folgt, dass für unbestimmte Werthe von u keine Gleichung $G_1(y - u\xi_\nu, \xi_\nu) = 0$ mehrfache Wurzeln besitzt und keine zwei dieser Gleichungen eine Wurzel gemein haben. In Folge dessen hat die Gleichung

$$H_1(y, u) = \prod_{\nu=1}^{m} G_1(y - u\xi_\nu, \xi_\nu) = 0$$

für unbestimmte Werthe von u lauter verschiedene Wurzeln; man kann also der Grösse u einen solchen speciellen Werth c beilegen, dass alle Wurzeln der Gleichung

$$H_1(y) = H_1(y, c) = \prod_{\nu=1}^{m} G_1(y - c\xi_\nu, \xi_\nu) = 0$$

von einander verschieden sind. Nun ist die Function $G_1(y - c\xi_1, \xi_1)$ im Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \xi_1)$ ebenso wie die Function $G_1(y, \xi_1)$ irreducibel; also ist die Norm des erstern Ausdruckes d. h. $H_1(y)$ nach § 1, 2. Potenz einer irreducibeln Function; diese Norm ist aber von mehrfachen Factoren frei, also selbst irreducibel. Ebenso muss das Polynom $H_1(y, u)$ irreducibel sein, da es für $u = c$ in $H_1(y)$ übergeht. Der Grad beider Functionen in Bezug auf y ist offenbar mr; somit ergiebt sich der folgende

Lehrsatz.

Ist in einem beliebigen Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ die Grösse ξ_1^* Wurzel einer irreducibeln Gleichung m^{ten} Grades, und nach Adjunction von ξ_1 die Grösse η_1 Wurzel einer irreducibeln Gleichung r^{ten} Grades, so ist das mit der Unbestimmten u gebildete Binom $u\xi_1 + \eta_1$ Wurzel einer im Bereich $\mathfrak{R}$ irreducibeln Gleichung vom Grade mr.

Ein weiteres Resultat ergiebt sich durch Anwendung des Satzes § 1, 3., welcher lehrt, dass die Grösse ξ_1, wenn die Norm der Function $G_1(y - c\xi_1, \xi_1)$ irreducibel ist, durch eine beliebige Wurzel der Gleichung $G_1(y - c\xi_1, \xi_1) = 0$ z. B. durch $c\xi_1 + \eta_1$ im Bereich $\mathfrak{R}$ rational ausgedrückt werden kann. Damit ist der bekannte Satz bewiesen, dass die Grösse $u\xi_1 + \eta_1$ die Gattung niedrigster Ordnung repräsentirt, unter welcher die Gattungen ξ_1 und η_1 enthalten sind, und kann demgemäss der obige Lehrsatz auch in folgender Form dargestellt werden:

Reducirt sich die Ordnung einer beliebigen Gattung durch Adjunction einer Gattung m^{ter} Ordnung auf r, so sind beide Gattungen unter einer Gattung von der Ordnung mr und unter keiner von niedrigerer Ordnung enthalten.

3. Aus diesem Lehrsatz kann man weitere Schlüsse ziehen, indem man ξ_1 und η_1 vertauscht. Die Grössen $c\xi_1 + \eta_1$ und $c\eta_1 + \xi_1$ sind nämlich offenbar rational durch einander ausdrückbar, also Grössen derselben Gattung und Wurzeln irreducibeler Gleichungen desselben Grades. Nach 2. ist nun der Grad der irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse $c\eta_1 + \xi_1$ genügt, $= nq$, wenn unter q der Grad der nach Adjunction von η_1 irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse ξ_1 genügt, verstanden wird; also ist $nq = mr$ und es ergiebt sich das folgende Corollar:

Sind ξ_1 und η_1 Wurzeln beliebiger irreducibeler Gleichungen vom m^{ten} bezw. n^{ten} Grade, und sind die Grade der irreducibeln Gleichungen, welchen ξ_1 nach Adjunction von η_1 und η_1 nach Adjunction von ξ_1 genügt, bezw. q und r, so besteht die Proportion $m : n = q : r$.

4. Durch Vertauschung von ξ_1 und η_1 erhält man noch ein zweites Corollar, indem man die Gradzahlen der sämmtlichen irreducibeln Factoren von

$$N(y, u) = \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\nu=1}^{n} (y - u\xi_\mu - \eta_\nu) = H_1(y, u)\, H_2(y, u) \ldots H_k(y, u)$$

auf doppelte Weise bestimmt. Ist nämlich l_ν der Grad des irreducibeln Factors H_ν in Bezug auf y, so ist auch die homogene Function

$$\overline{H}_\nu(y, u, v) = v^{l_\nu} H_\nu\left(\frac{y}{v}, \frac{u}{v}\right)$$

irreducibel, da sie für $r = 1$ in $H_\nu(y, u)$ übergeht. Setzt man ferner

$$\overline{H}_\nu(y, 1, v) = H_\nu'(y, v)$$

so ist

$$\overline{H}_\nu(y, u, v) = u^{l_\nu} H_\nu'\left(\frac{y}{u}, \frac{v}{u}\right),$$

also muss auch die Function $H_\nu'(y, v)$ irreducibel sein. Nun ist offenbar

$$\prod_{\nu=1}^{k} \overline{H}_\nu(y, u, v) = \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\nu=1}^{n} (y - u\xi_\mu - v\eta_\nu);$$

also hat man zur Zerlegung des Ausdruckes

$$N'(y, v) = \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\nu=1}^{n} (y - \xi_\mu - v\eta_\nu)$$

in seine irreducibeln Factoren die Formel

$$N'(y, v) = H_1'(y, v)\, H_2'(y, v) \ldots H_k'(y, v).$$

Der Ausdruck $N'(y, v)$, welcher aus $F(x)$ und $G(x)$ in derselben Weise gebildet ist wie der Ausdruck $N(y, u)$ aus $G(x)$ und $F(x)$, zerfällt also in ebenso viele irreducibele Factoren wie letzterer, deren Gradzahlen in Bezug auf y dieselben sind wie bei $N(y, u)$.

Zerlegt man nun $G(x)$ nach Adjunction von ξ_1 in irreducibele Factoren

$$G(x) = G_1(x, \xi_1)\, G_2(x, \xi_1) \ldots G_k(x, \xi_1),$$

so erhält man nach 2. aus einem beliebigen dieser Factoren einen irreducibelen Factor des Ausdruckes $N(y, u)$ durch die Formel

$$(2) \qquad H_\varrho(y, u) = \prod_{\nu=1}^{m} G_\varrho(y - u\xi_\nu, \xi_\nu);$$

und da offenbar die Gleichung

$$N(y, u) = \prod_{\varrho=1}^{k} \prod_{\nu=1}^{m} G_\varrho(y - u\xi_\nu, \xi_\nu)$$

besteht, so wird *jeder* irreducibele Factor von $N(y, u)$ durch eine bestimmte Formel (2) erhalten. Nimmt man ferner an, nach Adjunction von η_1 zerfalle die Function $F(x)$ in die irreducibeln Factoren

$$F(x) = F_1(x, \eta_1)\, F_2(x, \eta_1) \ldots F_i(x, \eta_1)$$

und vertauscht in den unter 2. gegebenen Entwicklungen die Gleichungen $F(x) = 0$ und $G(x) = 0$, so tritt der Ausdruck $N_1'(y, u)$ an die Stelle von $N(y, u)$ und jeder irreducibele Factor H_ϱ' von N' wird durch eine der Gleichung (2) analoge Formel von folgender Gestalt erhalten:

$$(3) \qquad H_\varrho'(y, u) = \prod_{\nu=1}^{n} F_\varrho(y - u\eta_\nu, \eta_\nu).$$

Nun ist bewiesen, dass jedem Factor H_ϱ' ein einziger bestimmter Factor H_ϱ entspricht, welcher in y von demselben Grade ist, und umgekehrt; die Anzahl der Factoren H_ϱ' ist also $= k$. Andrerseits ist diese Anzahl infolge der Gleichungen (3) auch $= i$; also folgt $i = k$. Ferner sind die Grade der Functionen H_ϱ und H_ϱ' in Bezug auf y nach (2) und (3) beziehentlich mn_ϱ und nm_ϱ, wenn durch m_ϱ und n_ϱ die Grade der Functionen $F_\varrho(y, \eta_1)$ und $G_\varrho(y, \xi_1)$ bezeichnet werden; also folgt für jeden irreducibeln Factor von $N(y, u)$ analog der unter 3. erhaltenen Gleichung $mr = nq$ eine Gleichung

$$mn_\varrho = nm_\varrho = l_\varrho.$$

Diese Resultate kann man in folgendem Satze zusammenfassen.

Zerlegt man irgend zwei irreducibele Polynome $F(x)$ und $G(x)$, das erste nach Adjunction einer Wurzel η_1 der Gleichung $G(x) = 0$,

das zweite nach Adjunction einer Wurzel ξ_1 *der Gleichung* $F(x) = 0$ *in ihre irreducibeln Factoren*

$$F(x) = F_1(x, \eta_1)\, F_2(x, \eta_1) \ldots F_i(x, \eta_1),$$
$$G(x) = G_1(x, \xi_1)\, G_2(x, \xi_1) \ldots G_k(x, \xi_1),$$

und bezeichnet die Grade der Functionen $F(x)$, $G(x)$, $F_\nu(x, \eta_1)$, $G_\nu(x, \xi_1)$ *beziehentlich durch* m, n, m_ν, n_ν, *so ist die Anzahl der Factoren in beiden Zerlegungen dieselbe,* $i = k$, *und der Inbegriff der Zahlen* $mn_1, mn_2, \ldots, mn_k$ *mit dem Inbegriff der Zahlen* $nm_1, nm_2, \ldots, nm_k$ *identisch.*

Dieser Satz kann übrigens offenbar rein arithmetisch formulirt werden, indem man die beiden Gleichungen, welche die Irrationalitäten ξ_1 und η_1 enthalten, durch die Congruenzen

$$F(x) \equiv F_1(x, y)\, F_2(x, y) \ldots F_i(x, y) \pmod{G(y)},$$
$$G(x) \equiv G_1(x, y)\, G_2(x, y) \ldots G_k(x, y) \pmod{F(y)}$$

ersetzt, und die Zahlen m_ν und n_ν als die Grade der mod. $G(y)$ bezw. mod. $F(y)$ betrachteten Functionen $F_\nu(x, y)$ und $G_\nu(x, y)$ in Bezug auf x erklärt. Der Beweis des Satzes könnte dann unter Berufung auf 1. und §§ 2 und 3 leicht rein arithmetisch formulirt werden.

§ 5.

Der allgemeine Fall beliebig vieler Gattungen.

1. Mit Hülfe der in § 4 erhaltenen Resultate kann nun auch die allgemeine Aufgabe leicht gelöst werden, den Grad der irreducibeln Gleichung zu bestimmen, welcher der mit unbestimmten Coefficienten u gebildete Ausdruck

$$\eta = \xi_1^{(1)} + u_2 \xi_1^{(2)} + u_3 \xi_1^{(3)} + \cdots + u_h \xi_1^{(h)}$$

genügt, wenn unter $\xi_1^{(\nu)}$ eine beliebige Wurzel der irreducibeln Gleichung

$$F_\nu(x) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h$$

verstanden wird; dabei ist der Fall, dass einige dieser Gleichungen miteinander identisch sind, keineswegs auszuschliessen. Wenn nämlich allgemein nach Adjunction von $\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_1^{(\nu-1)}$ die Grösse $\xi_1^{(\nu)}$ Wurzel einer irreducibeln Gleichung vom Grade r_ν ist, sodass speciell durch r_1 der Grad der Gleichung $F_1(x) = 0$ bezeichnet wird, so folgt zunächst aus § 4, 2., dass der Ausdruck $\zeta^{(1)} = \xi_1^{(1)} + u_2 \xi_1^{(2)}$ Wurzel einer im Bereich $\mathfrak{R}$ irreducibeln Gleichung vom Grade $r_1 r_2$ ist. Nach Adjunction dieser Grösse $\zeta^{(1)}$, durch welche man $\xi_1^{(1)}$ und $\xi_1^{(2)}$ rational ausdrücken kann, genügt die Grösse $\xi_1^{(3)}$ einer irreducibeln Gleichung vom Grade r_3; das Binom $\zeta^{(1)} + u_3 \xi_1^{(3)} = \zeta^{(2)}$ ist also nach § 4, 2.

Wurzel einer im Bereich $\mathfrak{R}$ irreducibeln Gleichung vom Grade $r_1 r_2 r_3$. Ebenso erschliesst man, dass die Grösse $\zeta^{(3)} = \zeta^{(2)} + u_4 \xi_1^{(4)}$ Wurzel einer irreducibeln Gleichung vom Grade $r_1 r_2 r_3 r_4$ ist, und gelangt durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens endlich zu dem Resultat, dass der Ausdruck

$$\zeta^{(k-1)} = \zeta^{(k-2)} + u_k \xi_1^{(k)} = \eta$$

einer irreducibeln Gleichung vom Grade $r_1 r_2 \ldots r_k$ genügt. Man kann also den in § 4, 2. aufgestellten Lehrsatz folgendermassen verallgemeinern:

Versteht man unter $\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)} \ldots \xi_1^{(k)}$ Wurzeln beliebiger im Bereich $\mathfrak{R}$ irreducibeler Gleichungen, und genügt die Grösse $\xi_1^{(\nu)}$ einer im Bereich $(\mathfrak{R}, \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_1^{(\nu-1)})$ irreducibeln Gleichung vom Grade r_ν, so genügt die mit unbestimmten Coefficienten gebildete lineare Verbindung $\xi_1^{(1)} + u_2 \xi_1^{(2)} + u_3 \xi_1^{(3)} + \cdots + u_k \xi_1^{(k)}$ einer im Bereich $\mathfrak{R}$ irreducibeln Gleichung vom Grade $r_1 r_2 r_3 \ldots r_k$.

2. Um nun die Constitution der irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse η genügt, genauer zu untersuchen, bezeichne man durch k_ν den Grad und durch $\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \ldots, \xi_{k_\nu}^{(\nu)}$ die Wurzeln der Gleichung $F_\nu(x) = 0$, und ersetze, was offenbar möglich ist, die Unbestimmte u_ν durch eine derartige Constante c_ν, z. B. eine ganze Zahl, dass keine zwei der $k_1 k_2 \ldots k_k$ Ausdrücke

$$\xi_{\alpha_1}^{(1)} + c_2 \xi_{\alpha_2}^{(2)} + \cdots + c_k \xi_{\alpha_k}^{(k)}, \qquad \alpha_\nu = 1, 2, \cdots, k_\nu,$$

welche formell verschieden sind, dem Werthe nach gleich werden; man bezeichne ferner durch $\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \ldots, \xi_{r_\nu}^{(\nu)}$ die Wurzeln der im Rationalitätsbereich

$$\mathfrak{R}_{\nu-1} = (\mathfrak{R}, \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_1^{(\nu-1)})$$

irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse $\xi_1^{(\nu)}$ genügt. Dann ist der Ausdruck

$$f_0(x, \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \cdots, \xi_1^{(k-1)}, \xi_1^{(k)})$$
$$= x - \xi_1^{(1)} - c_2 \xi_1^{(2)} - \cdots - c_k \xi_1^{(k)} = x - \eta'$$

offenbar im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_k = (\mathfrak{R}_{k-1}, \xi_1^{(k)})$ eine irreducibele ganze Function von x; ersetzt man also in § 1, 2. den Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{R}_{k-1}$, so ergiebt sich, dass die Norm

$$f_1(x, \xi_1^{(1)}, \cdots, \xi_1^{(k-1)})$$
$$= \prod_{\nu=1}^{r_k} (x - \xi_1^{(1)} - c_2 \xi_1^{(2)} - \cdots - c_{k-1} \xi_1^{(k-1)} - c_k \xi_\nu^{(k)})$$

Potenz einer im Bereich $\mathfrak{R}_{k-1}$ irreducibeln Function, also, da sie offenbar keine mehrfachen Factoren besitzt, selbst irreducibel sein muss. Daraus folgt nach § 1, 3., dass man im Bereich $\mathfrak{R}_{k-1}$ die Grösse $\xi_1^{(k)}$ durch eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$f_1(x, \xi_1^{(1)}, \cdots, \xi_1^{(h-1)}) = 0,$$

z. B. durch η' rational ausdrücken, also setzen kann

$$\xi_1^{(h)} = \Phi_1(\eta', \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \cdots, \xi_1^{(h-1)}).$$

Bildet man nun, ebenso wie f_1 aus f_0 abgeleitet wurde, aus f_1 einen neuen Ausdruck f_2 und setzt dies Verfahren nach der allgemeinen Formel

(1)
$$f_{\varrho+1}(x, \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \cdots, \xi_1^{(h-\varrho-1)}) = \prod_{\nu=1}^{r_{h-\varrho}} f_\varrho(x, \xi_1^{(1)}, \cdots, \xi_1^{(h-\varrho-1)}, \xi_\nu^{(h-\varrho)})$$

fort, so sei bewiesen, dass die Function

$$f_\varrho(x, \xi_1^{(1)}, \cdots, \xi_1^{(h-\varrho)})$$

im Bereich $\mathfrak{R}_{h-\varrho} = (\mathfrak{R}_{h-\varrho-1}, \xi_1^{(h-\varrho)})$ irreducibel ist; dann folgt, da der Ausdruck (1) offenbar von mehrfachen Factoren frei ist, nach § 1, 2., dass derselbe im Bereich $\mathfrak{R}_{h-(\varrho+1)}$ irreducibel sein muss; ausserdem ergiebt sich aus § 1, 3., dass man die Grösse $\xi_1^{(h-\varrho)}$ im Bereich $\mathfrak{R}_{h-\varrho-1}$ durch eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$f_{\varrho+1}(x, \xi_1^{(1)}, \cdots, \xi_1^{(h-\varrho-1)}) = 0$$

z. B. durch η' rational ausdrücken kann:

(2)
$$\xi_1^{(h-\varrho)} = \Phi_\varrho(\eta', \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \cdots, \xi_1^{(h-\varrho-1)}).$$

Die letzte der Formeln (1) ergiebt das Resultat, dass der Ausdruck

(3)
$$f_h(x) = \prod_{\nu=1}^{r_1} f_{h-1}(x, \xi_\nu^{(1)}) = \prod_{\nu_1=1}^{r_1} \prod_{\nu_2=1}^{r_2} \cdots \prod_{\nu_h=1}^{r_h} (x - \xi_{\nu_1}^{(1)} - c_2 \xi_{\nu_2}^{(2)} - \cdots - c_h \xi_{\nu_h}^{(h)})$$

im Bereich $\mathfrak{R}$ irreducibel ist; der Grad desselben ist offenbar $r_1 r_2 \cdots r_h$, wie ja schon unter 1. bewiesen ist, dass dies der Grad der irreducibeln Gleichung sein muss, welcher die Grösse η genügt. Das Neue an der Formel (3) besteht nur darin, dass sie die sämmtlichen Wurzeln der irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse η' genügt, in Evidenz setzt.

Die letzte Formel (2) ergiebt das bekannte Resultat

$$\xi_1^{(1)} = \Phi_{h-1}(\eta');$$

d. h. die Gattung $\xi_1^{(1)}$ ist unter der Gattung η' enthalten, und dasselbe gilt offenbar von allen Gattungen $\xi_1^{(2)}, \xi_1^{(3)}, \cdots, \xi_1^{(h)}$. Mit Rücksicht hierauf kann der unter 1. abgeleitete Satz auch folgendermassen formulirt werden.

Sind irgend h Gattungen algebraischer Grössen, welche einem beliebigen Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ entstammen, gegeben, und reducirt sich

die Ordnung der ν^{ten} unter ihnen nach Adjunction der $(\nu-1)$ vorhergehenden auf r_ν, so sind die sämmtlichen h Gattungen unter einer Gattung von der Ordnung $r_1 r_2 \cdots r_h$ und unter keiner von geringerer Ordnung enthalten.

3 Aus diesem Satze kann man leicht ein Corollar ableiten, welches die Verallgemeinerung der in § 4, 3. gegebenen Entwicklungen bildet, indem man davon ausgeht, dass die Gattung η' von der Reihenfolge der Grössen $\xi_1^{(\nu)}$ ganz unabhängig ist, während die Zahlen r_ν, deren Product die Ordnung der Gattung η' ist, bei veränderter Anordnung der Grössen $\xi_1^{(\nu)}$ sich offenbar im Allgemeinen ändern. Man kann also folgendes Corollar aufstellen.

Wenn von h beliebigen algebraischen Irrationalitäten bei irgend einer Anordnung die ν^{te} nach Adjunction der $\nu-1$ ersten einer irreducibeln Gleichung vom Grade r_ν genügt, so ist der Werth des Products $r_1 r_2 \cdots r_h$ bei allen Anordnungen derselbe.

In ähnlicher Weise könnte man den in § 4, 4. aufgestellten Satz verallgemeinern; das Resultat, welches sich ergiebt, ist aber keiner so einfachen Formulirung fähig.

§ 6.

Gruppentheoretische Anwendungen.

1. Die nächstliegende gruppentheoretische Anwendung der in § 4 bewiesenen Sätze ergiebt sich aus der Betrachtung der reducibeln Gleichung $F(x) \cdot G(x) = 0$ für den Fall, dass die Functionen $F(x)$ und $G(x)$ nicht mit einander identisch sind. Dann ist die Gruppe dieser Gleichung, welche durch Γ bezeichnet werden und von der Ordnung N sein möge, nach einem bekannten Satze intransitiv und verbindet die Grössen $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ unter einander transitiv und ebenso die Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$; berücksichtigt man also, dass eine rationale Function der $m+n$ Grössen ξ und η Wurzel einer irreducibeln Gleichung vom p^{ten} Grade ist, wenn sie bei genau $N:p$ Substitutionen der Gruppe Γ ungeändert bleibt, so ergiebt sich aus § 4, 2. das folgende Resultat. Wenn diejenigen $N:m$ Substitutionen von Γ, welche ξ_1 nicht versetzen, η_1 mit genau $r-1$ andern Wurzeln η transitiv verbinden, so enthält die Gruppe Γ genau $N:mr$ Substitutionen, welche weder ξ_1 noch η_1 versetzen. Sodann folgt aus § 4, 3., dass die Proportion $m:n = q:r$ besteht, wenn die Wurzel ξ_1 mit genau $q-1$ andern Wurzeln ξ transitiv verbunden wird durch diejenigen Substitutionen von Γ, welche η_1 nicht versetzen. Endlich kann man den in § 4, 4. bewiesenen Satz gruppentheoretisch dahin formuliren, dass die Wurzeln ξ bei den η_1 nicht versetzenden Substitutionen von Γ in ebenso viele Systeme transitiv verbundener Wurzeln zerfallen, wie die

Wurzeln η bei den ξ_1 nicht versetzenden Substitutionen. Sind die Gliederzahlen der ersteren Systeme $m_1, m_2, \cdots, m_k$, diejenigen der letzteren $n_1, n_2, \cdots, n_k$, so ist der Inbegriff der Zahlen $mn_1, mn_2, \cdots, mn_k$ mit dem Inbegriff der Zahlen $nm_1, nm_2, \cdots, nm_k$ identisch. Aehnliche Sätze noch allgemeineren Inhalts könnten leicht aus § 5 abgeleitet werden.

2. Interessanter sind die Anwendungen, welche sich bei passender Specialisirung der Gleichungen $F(x) = 0$ und $G(x) = 0$ ergeben. Wenn z. B. letztere Gleichung die Galois'sche Resolvente einer beliebigen Gleichung $g(x) = 0$ ist, so kann die Function $G(x)$, wenn sie bei Adjunction von ξ_1 reducibel wird, stets nur in irreducibele Factoren gleichen Grades zerfallen; die Anzahl dieser Factoren sei μ. Ebenso kann die Function $F(x)$ im Rationalitätsbereich $(\Re, \eta_1)$ nur in ν irreducibele Factoren gleichen Grades zerfallen, da die Adjunction von η_1 dasselbe bedeutet wie die Adjunction aller Wurzeln der Gleichung $g(x) = 0$. Dann muss nach § 4, 4. die Gleichung $\mu = \nu$, also folgender Satz bestehen.

Reducirt sich die Gruppe der Gleichung $g(x) = 0$ bei Adjunction einer Wurzel der irreducibeln Gleichung $F(x) = 0$ auf den ν^{ten} Theil ihrer Substitutionen, so zerfällt die Gleichung $F(x) = 0$ nach Adjunction aller Wurzeln der Gleichung $g(x) = 0$ in ν irreducibele Gleichungen gleichen Grades.

Nimmt man speciell an, dass auch die Gleichung $F(x) = 0$ die Galois'sche Resolvente einer Gleichung $f(x) = 0$ sei, so ergiebt sich der bekannte Satz, dass wenn die Gruppe einer Gleichung durch Adjunction aller Wurzeln einer zweiten auf den ν^{ten} Theil ihrer Substitutionen reducirt wird, auch umgekehrt die Gruppe der zweiten Gleichung durch Adjunction aller Wurzeln der ersten sich auf ihren ν^{ten} Theil reducirt. Vgl. Netto, Substitutionentheorie, § 231, S. 271.

3. Endlich kann man noch aus § 5 einen gruppentheoretischen Satz ableiten, indem man unter $\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \cdots, \xi_1^{(k)}$ die Wurzeln einer beliebig gegebenen irreducibeln Gleichung versteht. Diese Specialisirung ist erlaubt, weil in § 5 nirgends die Verschiedenheit der irreducibeln Function $F_\nu(x)$ von einander vorausgesetzt und benutzt wird. Dann ist die irreducibele Gleichung, welcher die Grösse

$$\eta = \xi_1^{(1)} + u_2 \xi_1^{(2)} + \cdots + u_k \xi_1^{(k)}$$

genügt, die Galois'sche Resolvente der gegebenen Gleichung; die Gruppe der letzteren hat also eine Ordnungszahl, welche dem Grade der ersteren gleich ist. Somit ergiebt sich aus § 5, 1. das folgende Resultat:

Bezeichnet man die Wurzeln einer irreducibeln Gleichung durch $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(k)}$, und genügt die Wurzel $\xi^{(\nu)}$ nach Adjunction von

$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(\nu-1)}$ *einer irreducibeln Gleichung vom Grade* r_ν, *sodass speciell* $r_1 = h$ *und* $r_h = 1$ *ist, so ist die Gruppe der gegebenen Gleichung von der Ordnung* $r_1 r_2 \cdots r_h$.

Will man diesen Satz rein gruppentheoretisch formuliren, so braucht man offenbar nur die Zahl $r_\nu - 1$ als die Anzahl derjenigen Grössen ξ zu definiren, mit welchen die Grösse $\xi^{(\nu)}$ durch diejenigen Substitutionen der gegebenen Gruppe transitiv verbunden wird, welche $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(\nu-1)}$ nicht versetzen.

Breslau, April 1887.

Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques.

Par

CORRADO SEGRE à Turin.

Des résultats sur les surfaces réglées d'ordre n quelconque et de genre p égal à 0, 1 ou 2*) donnaient lieu à penser qu'il arrive aussi pour p quelconque qu'il y ait un certain espace**) tel que celles parmi ces surfaces qui appartiennent à des espaces inférieurs soient des projections de celles qui appartiennent à cet espace. On verra dans la 2e Partie de ce mémoire que pour n assez grand il en est réellement ainsi et que l'espace dont il s'agit est S_{n-2p+1}. De là une méthode importante pour étudier les surfaces réglées des espaces inférieurs, par exemple celles de l'espace ordinaire: je me borne à en faire l'application à des questions relatives à la géométrie des courbes tracées sur une surface réglée, et en particulier à celle des courbes *minimae* de celle-ci. Quant aux surfaces réglées de genre p et ordre n appartenant à des espaces supérieurs à S_{n-2p+1}, elles jouissent de particularités remarquables qu'on verra établies complètement. On rencontrera aussi d'autres espèces particulières de surfaces réglées***).

Mais pour pouvoir faire sur les surfaces réglées les recherches que j'avais en vue, il était indispensable d'établir certaines propriétés rela-

*) Voir pour $p = 0$, Veronese: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*, (Math. Ann. XIX); et pour ce cas et les deux autres mes deux travaux: *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti della R. Acc. di Torino, XIX), *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (mêmes Atti, XXI).

**) J'entends par *espace* S_r une variété linéaire à r dimensions et je dis qu'une variété quelconque *appartient* à un S_r qui la *contient* lorsqu'elle n'est pas contenue dans un espace inférieur (c. à. d. à un nombre de dimensions $< r$).

***) J'ai énoncé une partie des résultats sur les surfaces réglées que l'on trouvera ici dans la Note *Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque* (Atti di Torino, XXII).

tives aux courbes algébriques d'un espace quelconque. C'est ce que j'ai fait dans la 1e Partie du travail. On y verra en outre résolues d'autres questions intéressantes sur les courbes algébriques, et établies d'une façon synthétique simple des propositions que l'on est accoutumé à prouver analytiquement (par exemple certains cas du *Restsatz*). Cependant je ne me suis pas arrêté sur plusieurs autres questions relatives aux courbes algébriques qui se présentaient naturellement et que l'on peut traiter par les mêmes méthodes; car elles n'entraient pas dans le cadre de ce travail.

Ie Partie.

Courbes algébriques.

Sur les deux espèces de courbes algébriques dans un espace quelconque*).

1. Soit donnée une courbe algébrique quelconque γ_p^n, c'est-à-dire de genre p et ordre n, *appartenant* à un S_r. Imaginons dans un plan une courbe d'ordre ν convenable f_p^ν, $f = 0$, de même genre p et mêmes modules et qui soit en correspondance uniforme avec γ. En indiquant par $x_0, x_1 \ldots x_r$ les coordonnées d'un point de γ dans S_r, il est évident que cette correspondance sera exprimée analytiquement par les équations

$$x_0 : x_1 : \cdots : x_r = \psi_0 : \psi_1 : \cdots : \psi_r \tag{1}$$

où les $\psi_0, \psi_1 \ldots \psi_r$ sont dans le plan $r+1$ courbes *indépendantes***) d'une ∞^r linéaire de courbes *adjointes* à f, coupant celle-ci, en dehors de points fixes, en une série *linéaire* r fois infinie de groupes de n points, c'est-à-dire en une g_n^r. Cette g_n^r est l'image sur f de la ∞^r de groupes de n points determinés sur γ par les S_{r-1} de S_r.

---

*) La méthode dont nous faisons usage dans ce § pour obtenir les courbes algébriques, qui consiste à les considérer comme transformations uniformes des courbes planes, a été appliquée aux courbes gauches par M. M. Brill et Nöther au § 17 de leur travail „*Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*" (Math. Ann. VII. 269—310) et puis plus largement par M. Nöther dans son mémoire couronné par l'Académie de Berlin „*Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*" (Abhandl. d. Kön. Ak. d. W. zu Berl. 1882). Presque tout ce premier paragraphe de notre travail est une extension du § 2 de ce mémoire de M. Nöther aux courbes d'un espace quelconque. Pour les propositions dont nous ferons usage sur les séries linéaires de groupes de points d'une courbe algébrique (plane) nous renvoyons une fois pour toutes au mémoire cité de M. M. Brill et Nöther, que nous indiquerons dans la suite simplement par B. N.

**) Car les x ne doivent pas être liées par des relations linéaires.

Inversement si

$$\alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \cdots + \alpha_r\psi_r = 0, \tag{2}$$

où les α sont des constantes arbitraires, désigne une ∞^r linéaire de courbes adjointes à f et coupant celle-ci en une g_n^r, les équations (1) avec $f = 0$ représenteront une courbe γ appartenant à S_r, et dont les groupes de points d'intersection avec les S_{r-1} correspondront à la g_n^r de f. Cette courbe γ sera en correspondance uniforme avec f, et par suite d'ordre n et genre p. Il faut seulement excepter le cas où pour chaque point de f il y en aurait d'autres i tels que tous ces $i+1$ points fassent prendre les mêmes valeurs aux rapports $\psi_0 : \psi_1 : \cdots : \psi_r$, c'est-à-dire donnent, substitués dans (2), une même équation entre les α, ce qui signifie que toutes les courbes de cette ∞^r qui passent par un point quelconque de f viennent passer par cela même par d'autres i points déterminés par celui-là.

2. On voit ainsi que pour avoir les différentes courbes de genre p et ordre n appartenant à une espace quelconque, on doit chercher quelles sont toutes les series linéaires de groupes de n points de f (ne présentant pas l'exception dont nous avons parlé).

Or on sait qu'il y a une distinction importante à faire entre les séries qui sont determinées sur f_p^ν par des $\varphi^{\nu-3}$, c. à d. des courbes adjointes d'ordre $\nu - 3$, séries que l'on nomme *spéciales*, et les séries *non spéciales* qui sont données par des courbes adjointes d'ordre supérieur à $\nu - 3$. Comme les points d'intersection variables de f avec une $\varphi^{\nu-3}$ sont $2p-2$, on voit que si $n > 2p-2$ la g_n^r ne peut pas être spéciale. Et plus précisément une g_n^r n'est pas spéciale *en général* si $r \leq n - p$; elle ne l'est absolument pas, lorsque cette condition se vérifie, si cette g_n^r est complètement définie par les points fixes de f par lesquels passent les courbes adjointes qui la déterminent. Et si au contraire $r > n - p$ la g_n^r sera toujours spéciale, et par suite $n \leq 2p - 2$.

Si $r \leq n - p$ la g_n^r est contenue en général dans une g_n^{n-p} déterminée, qui est donnée par *toutes* les courbes adjointes d'une série *définie par les points fixes*. On peut choisir arbitrairement pour determiner une série non spéciale g_n^r un groupe de n points: cela prouve que les g_n^{n-p} dans f sont ∞^p. Et comme une quelconque de ces g_n^{n-p} contient $\infty^{(r+1)(n-p-r)}$ séries g_n^r, il s'ensuit qu'il y a dans f $\infty^{(r+1)(n-p-r)+p}$ g_n^r.

Une série spéciale de groupes de $n \leq 2p-2$ points est aussi contenue dans une qui est déterminée par toute une série de courbes adjointes définie par les points fixes*), mais pour cette g_n^r ci on a, comme nous

*) On pourra en conséquence sur une variété algébrique simplement infinie quelconque de genre p appeler une serie linéaire ∞^r de groupes de n éléments,

l'avons déjà rappelé, $r > n - p$. Le nombre de ces g_n^r est *généralement* (B. N. 292) $\infty^{p-(r+1)(p+r-n)}$, c'est-à-dire encore le même nombre que pour les séries non spéciales $r < n - p + 1$, pourvu naturellement que:

$$p - (r+1)(p+r-n) \geq 0 \tag{3}$$

c. à. d. (en représentant avec Ex le plus grand entier contenu dans x):

$$n \geq r + E\frac{r(p+1)}{r+1}. \tag{4}$$

Cette relation est alors, *pour des modules généraux*, la condition nécéssaire et suffisante pour l'existence de la g_n^r spéciale. Pour des modules particuliers il pourrait cependant arriver qu'il y eût des g_n^r spéciales même lorsque cette relation n'est pas satisfaite.

Ajoutons que pour définir une série spéciale de groupes de n points on ne peut plus, comme pour les séries non spéciales, prendre arbitrairement un groupe de n points: en effet le théorème de Riemann et Roch établit un lien entre les points d'un tel groupe, qui lorsque $r > n - p$ consiste en ce que par n tels points passent non pas seulement $\infty^{p-n-1}\varphi^{r-3}$, comme par n points quelconques de f, mais bien $\infty^{p+r-n-1}$, de sorte que d'un groupe de n points qui doivent appartenir à une g_n^r spéciale, $n - r$ tout au plus seront arbitraires*).

3. Les propositions qui précèdent nous montrent l'existence de courbes γ_p^n appartenant à S_r et leur nombre, du moins pour certains cas. En effet dans S_r une γ_p^n est déterminée en donnant: 1° les $3p - 3$ modules qui servent à définir dans le plan f_p, ou mieux sa *classe* dans le sens de Riemann, 2° la g_n^r considérée au n° 1 et dont nous avons trouvé le nombre de paramètres, 3° les $r(r+2)$ paramètres qui fixent dans cette g_n^r les $r+1$ groupes $x_i = 0$, c. à. d. les ψ_i, et leurs coefficients moins un, ou si l'on veut les $r(r+2)$ paramètres d'une homographie de S_r, en remarquant que les γ_p^n de S_r provenant d'une même g_n^r de f_p sont toutes projectives entre elles. — Nous nommerons une γ_p^n appartenant à S_r *spéciale* ou non, suivant que telle est la g_n^r qui lui correspond, c. à. d. la g_n^r des groupes de points déterminés sur elle par les S_{r-1} de S_r. Alors nous arrivons ainsi à la proposition suivante:

---

c. à. d. une g_n^r, série *spéciale* si $r > n - p$, ou bien si elle est contenue dans une $g_n^{r'}$, où $r' > n - p$. Par des transformations uniformes d'une variété algébrique, une g_n^r, spéciale ou non, se change resp. en une g_n^r, spéciale ou non.

*) Le cas de ce théorème que nous aurons à appliquer plus tard, c. à. d. celui de $r = 1$ qui établit que dans une série linéaire simplement infinie de groupes de p points ou d'un nombre inférieur, on ne peut prendre arbitrairement tout un groupe pour définir la série, est dû à Riemann (Theorie der Abel'schen Functionen, n° 5) et il est le premier qui ait été considéré (Voir aussi B. N. p. 280).

Le nombre des constantes dont dépendent les courbes d'ordre n, genre p appartenant à S_r est

$$3p - 3 + (r+1)(n-p-r) + p + r(r+2) = (r+1)n - (r-3)(p-1)$$

pourvu toutefois que la condition (3) *ou* (4) *soit vérifiée.*

Cette condition est satisfaite si $r \leq n-p$, ce qui arrive nécessairement lorsque $n > 2p-2$. Lorsque $r \leq n-p$ une γ_p^n appartenant à S_r n'est pas *en général* spéciale; et elle ne l'est *jamais* si $n > 2p-2$. Mais si $r > n-p$ les γ_p^n sont toutes spéciales, et l'on a $n \leq 2p-2$; il peut alors arriver que la condition (4) ne soit pas satisfaite, et que toutefois il existe des γ_p^n, *avec des modules particuliers:* l'expression donnée pour le nombre des paramètres des γ_p^n ne sera plus alors qu'une limite inférieure de ce nombre*).

4. Le fait que pour $n > 2p-2$ on a $r \leq n-p$ peut s'exprimer ainsi: *l'espace le plus élevé auquel puisse appartenir une γ_p^n lorsque $n > 2p-2$ est S_{n-p}*). Le nombre des paramètres de ces courbes de S_{n-p} est $n(n-p+1) - (n-p-3)(p-1) = (n-p)(n-p+2) + 4p - 3$. Elles ont $4p-3$ invariants absolus, dont $3p-3$ sont les modules et p les constantes qui parmi les $\infty^p g_n^{n-p}$ fixent celle qui est donnée par les sections de la courbe avec les $\infty^{n-p} S_{n-p-1}$ de S_{n-p}. Les courbes non spéciales de genre p et ordre n appartenant à S_{n-p} seront dites *normales* et designées par C_p^n.

Si la g_n^r qui définit une γ_p^n de S_r (1) est contenue dans une $g_n^{r'}$ où $r' > r$, celle-ci donnera dans $S_{r'}$ une courbe dont les équations seront

$$x_0 : x_1 : \cdots : x_r : \cdots : x_{r'} = \psi_0 : \psi_1 : \cdots : \psi_r : \cdots : \psi_{r'};$$

en les comparant avec (1) on voit que la γ_p^n de S_r peut être considérée comme projection de celle de $S_{r'}$. De là il suit en particulier, en se rappelant que chaque série g_n^r où $r \leq n-p$ est contenue dans une g_n^{n-p}: *Les courbes de genre p et ordre n appartenant à S_{n-p} nous donnent en elles-mêmes et en leurs projections toutes les courbes d'ordre n et genre p appartenant à des S_r où $r \leq n-p$.* Et si $n > 2p-2$

*) Les courbes de genre $p = 0, 1, 2$ ne peuvent pas être spéciales; c'est avec $p = 3$ qu'on commence à avoir des courbes spéciales (la courbe plane générale du 4e ordre).

**) Cette proposition importante est due à Clifford „*On the Classification of Loci*" (Phil. Trans. 1878) $\left(\text{qui suppose } p \leq \frac{n}{2}, \text{ c. à. d. } n \geq 2p\right)$, qui l'a tirée de la représentation des courbes au moyen d'intégrales abéliennes. M. Veronese (loc. cit. p. 213) l'a établie au contraire au moyen de la représentation sur une courbe plane et des théorèmes sur les séries linéaires de groupes de points de celle-ci.

on a en particulier que ces courbes appartenant à S_{n-p} et par suite *normales* donnent avec leurs projections toutes les courbes de genre p et ordre n*).

5. Lorsque $n \leq 2p-2$ et que les γ_p^n considerées sont spéciales, si l'on a $n > p$ et $r < n-p+1$ chaque g_n^r spéciale appartient à une g_n^{n-p+1}; donc *les courbes spéciales de genre p et ordre n, où $p < n \leq 2p-2$, des espaces inférieurs à S_{n-p+1} sont projections de celles appartenant à cet espace.* Et comme les g_n^{n-p+1} de f sont alors ∞^{2p-2-n} et chacune contient $\infty^{(r+1)(n-p+1-r)}$ g_n^r, *le nombre de constantes dont dépend une γ_p^n spéciale de S_r lorsque $r \leq n-p+1$ sera*

$$2p-2-n+(r+1)(n-p+1-r)+r(r+2)+3p-3$$
$$= r(n+1)-(r-4)(p-1).$$

En comparant ce nombre avec celui des γ_p^n générales de S_r (n. 3) on conclut que: *pour $r+p \leq n \leq 2p-2$ une γ_p^n de S_r doit satisfaire à $n-r-p+1$ conditions pour devenir spéciale.*

Remarquons enfin que pour l'existence de courbes γ_p^n spéciales appartenant à des espaces S_r supérieurs à S_{n-p+1} la limite supérieure de r, lorsque les modules sont généraux, est donnée par la condition (3).

Usage des surfaces réglées pour l'étude des courbes. — Sur les cônes algébriques.

6. Nous allons nous servir de quelques-uns des résultats qui précèdent pour en retrouver d'autres et pour établir des propositions nouvelles par une méthode féconde plus sinthétique que celle dont nous avons fait usage jusqu'ici.

Cette méthode consiste à employer pour l'étude de la correspondance entre deux courbes algébriques la surface réglée des droites joignant les points correspondants, surface qui, lorsque la correspondance est uniforme, a evidemment pour genre celui des deux courbes et pour ordre la somme des ordres de celles-ci diminuée du nombre des points qui coincident avec leurs correspondants**). Cette surface appartient au même espace que l'ensemble de deux courbes.

Soient A et B deux courbes d'ordre n et genre p normales non spéciales appartenant respectivement à deux S_{n-p} que nous nommerons α, β, et supposons qu'il y ait entre les points de ces courbes une

*) Veronese, loc. cit. p. 214.

**) L'idée de se servir de cette surface réglée (dans les recherches relatives à l'espace ordinaire) n'est pas nouvelle. Il suffit de rappeler, par exemple, la démonstration donnée par M. Cremona dans ses *Preliminari* de l'égalité des genres de deux courbes planes en correspondance uniforme.

correspondance uniforme douée de cette particularité: qu'au groupe de n points de A situés sur un certain S_{n-p-1} corresponde un groupe de n points de B situés de même sur un S_{n-p-1}. Supposons (ce que l'on peut toujours obtenir) que α et β n'aient pas de points communs, de sorte qu'ils appartiendront à un $S_{2n-2p+1}$, et considérons la surface réglée lieu des droites joignant les points correspondants des deux courbes: cette surface sera d'ordre $2n$, genre p et appartiendra à $S_{2n-2p+1}$. Les deux groupes correspondants considérés sur A et B, situés sur deux S_{n-p-1}, donneront n génératrices de cette surface situées sur un $S_{2n-2p-1}$: que l'on mène par celui-ci un S_{2n-2p} différent des deux qui le joignent respectivement à α et β. Il coupera encore la surface reglée en une courbe irréductible de l'ordre n et de genre p. Cette courbe ne peut pas appartenir à un espace inférieur à S_{n-p}, car autrement l'espace joignant celui-ci à α contiendrait la surface réglée et par suite aussi β et aurait moins de $2n - 2p + 1$ dimensions. Elle ne peut non plus (lorsque $n \leq 2p - 2$) appartenir à un espace supérieur à S_{n-p}, car autrement elle serait spéciale: or chaque groupe de n points de A situés sur un S_{n-p-1} donne n génératrices de la surface réglée situées avec β dans un S_{2n-2p} qui couperait cette courbe spéciale en un groupe spécial, et par suite aussi le groupe correspondant de A, c'est-à-dire chaque groupe de A situé sur un S_{n-p-1}, serait spécial, ou, pour parler plus exactement, la série des groupes de n points de A placés sur des S_{n-p-1} serait spéciale, tandis que nous avons supposé que A ne soit pas spéciale. Donc la courbe d'ordre n que nous avons obtenue n'est pas spéciale et appartient à un S_{n-p}, qui ne pourra pas avoir de points communs avec α ou β. Cela posé, comme cet S_{n-p} est rencontré par chaque droite joignant deux points correspondants de A et B, on voit que la correspondance entre ces deux courbes peut être considérée comme provenant d'une projection faite par cet S_{n-p} des deux espaces α, β l'un sur l'autre. Donc:

Si deux courbes normales non spéciales d'ordre n et genre p sont dans une correspondance uniforme telle qu'à un groupe particulier de n points de l'une situé sur un S_{n-p-1} corresponde un groupe semblable de l'autre, ce même fait arrivera pour chaque groupe de n points d'un S_{n-p-1} de chaque courbe et la correspondance uniforme sera projective.

7. Pour les courbes spéciales on pourrait établir de la même manière une proposition analogue. Mais nous nous bornerons à appliquer cette méthode pour prouver le cas particulier suivant: *Si entre deux courbes spéciales de genre p et ordre $2p - 2$ appartenant à des espaces de $p - 1$ dimensions il y a une correspondance uniforme, cette correspondance sera projective.*

En effet nommons A, B les deux courbes de genre p et ordre $2p-2$ en correspondance uniforme, et α, β les deux espaces à $p-1$ dimensions auxquels elles appartiennent. Après avoir rendu indépendants ces espaces, considérons la surface réglée F^{4p-4} de genre p engendrée par les deux courbes: elle appartiendra à l'espace S_{2p-1} joignant α et β. Dans α menons par $p-1$ points *indépendants* de A un S_{p-2}, qui rencontrera encore cette courbe en $p-1$ points: par les génératrices qui sortent de ceux-ci et par cet S_{p-2} on pourra mener un S_{2p-2} qui ne contienne ni α ni β: alors cet S_{2p-2} coupera F outre que dans ces $p-1$ génératrices et éventuellement en d'autres, en une courbe (qui ne peut pas être multiple, car si F avait des points multiples, d'où sortiraient plusieurs génératrices, α et β auraient des points communs) irréductible de genre p dont l'ordre, ne pouvant descendre au-dessous de $2p-2$ (car autrement elle engendrerait avec A^{2p-2} une surface reglée d'ordre inférieur à $4p-4$), soit représenté avec $2p-2+x$, où $0 \leq x \leq p-1$. Cette courbe γ_p^{2p-2+x} s'il était $x>0$ devrait appartenir à un $S_{p-2+x-i}$ où $i \geq 0$; et comme elle engendre avec A^{2p-2} la F^{4p-4}, elle devrait couper A en x points qui seraient dans le groupe de $p-1$ points indépendants de A dont nous sommes partis, et par suite indépendants entre eux. Mais alors l' $S_{p-2+x-i}$ de cette courbe ayant communs avec α_{p-1} x points indépendants au moins, se trouverait avec celui-ci dans un $S_{(p-1)+(p-2+x-i)+1-x}$, c. à. d. dans un S_{2p-2-i}, et par suite F^{4p-4} n'appartiendrait pas à S_{2p-1}. Donc il faut que $x=0$, c. à d. que l' S_{2p-2} que nous avions mené par $p-1$ génératrices en contienne encore d'autres $p-1$ et coupe F^{4p-4} en une nouvelle C_p^{2p-2} appartenant à un S_{p-1}. Comme celui-ci sera indépendant de α_{p-1}, β_{p-1} on voit que A^{2p-2} et B^{2p-2} seront projections l'une de l'autre faite par cet S_{p-1}. Ainsi notre proposition est prouvée.

8. Pour la considération des courbes non spéciales et non normales de genre p et ordre n nous partirons de ce fait: qu'elles sont projections de courbes normales de même genre et ordre.

Si une courbe non spéciale γ_p^n appartenant à un S_r où $r<n-p$ est la projection de deux courbes normales, la correspondance entre les points de celles-ci qui donnent une même projection sur γ sera projective. En effet (n. 6) elle sera telle que les groupes de n points des deux courbes normales situés sur les S_{n-p-1} passant respectivement par les axes (ou centres) de projection se correspondront.

De là il suit que les groupes de n points de l'une ou de l'autre parmi ces courbes normales situés sur un même S_{n-p-1} donneront comme projection sur γ_p^n une même série linéaire ∞^{n-p} de groupes de n points. Nous nommerons *groupes associés* de γ_p^n ces groupes de

n points; et pour une courbe normale non spéciale de genre p et ordre n nous nommerons ainsi les groupes de n points situés sur des S_{n-p-1}. Donc: *la ∞^{n-p} linéaire des groupes associés d'une courbe non spéciale de genre p et ordre n se projette dans la série des groupes associés de la courbe de même genre et ordre qui est la projection de celle-là dans un espace quelconque.*

Nous rencontrerons plus loin des correspondances uniformes entre deux courbes non spéciales de genre p et ordre n telles qu'à chaque groupe associé de l'une correspond un groupe associé de l'autre. Nous nommerons *singulière* une telle correspondance; et il suit alors de ce qui précède et du n. 6 que: *Deux courbes non spéciales de genre p et ordre n qui soient en correspondance singulière sont les projections de deux courbes normales en correspondance projective; et réciproquement. — Si la correspondance uniforme entre deux courbes non spéciales de genre p et ordre n est telle qu'à un groupe associé de n points de l'une corresponde un groupe associé de l'autre, le même fait arrivera toujours et la correspondance sera singulière.*

On peut donner à la définition des groupes associés d'une courbe non spéciale la forme suivante qui s'étend aux courbes spéciales: Un *groupe associé* de n points d'une γ_p^n *quelconque* est un groupe qui avec la série des groupes de n points sections linéaires de la courbe appartienne à une même série linéaire de groupes de n points.

Deux groupes resp. de k et $n-k$ points d'une courbe quelconque d'ordre n seront nommés *résidus* l'un de l'autre, lorsqu'ils forment, pris ensemble, un groupe associé de n points.

9. De la proposition donnée au commencement du n. 8 on tire des résultats précis sur les courbes normales qui donnent pour projection une même γ_p^n non spéciale appartenant à un S_r où $r < n-p$. En effet elle prouve que si γ est la projection d'une certaine courbe normale A_p^n, appartenant à un S_{n-p} α qui passe par S_r, faite par un $R_{n-p-r-1}$ comme axe de projection, *toutes* les autres courbes normales qui ont aussi γ pour projection s'obtiendront de la manière suivante. Que l'on prenne dans un S_{n-p} β passant par S_r (différent ou non de α) un $S_{n-p-r-1}$ ne rencontrant pas S_r, et que l'on détermine entre α et β une homographie dans laquelle se correspondent l' $R_{n-p-r-1}$ et l' $S_{n-p-r-1}$ et en outre les formes ayant ces espaces pour soutiens et qui projettent les mêmes éléments de S_r: chaque telle homographie transformera A_p^n en une courbe normale ayant γ pour projection faite par l' $S_{n-p-r-1}$ donné sur l' S_r. Or une homographie satisfaisant aux dites conditions est parfaitement déterminée en donnant $n-p+1$ couples de points correspondants sur autant de couples de S_{n-p-r} corre-

spondants des deux formes ayant pour soutiens les $R_{n-p-r-1}$, $S_{n-p-r-1}$. Donc nous concluons:

Une γ_p^n non spéciale de S_r, où $r < n-p$, est la projection de $\infty^{(n-p+1)(n-p-r)}$ courbes normales de même genre et ordre faite par un $S_{n-p-r-1}$ donné arbitrairement (ne coupant pas S_r). En d'autres termes le $S_{n-p-r-1}$ — cône) qui projette γ_p^n de cet $S_{n-p-r-1}$ contient une infinité de C_p^n normales telle que par $n-p+1$ points situés sur autant de S_{n-p-r} générateurs différents du cône il en passe en général une bien déterminée**).*

10. Une proposition analogue relative aux cônes dont les courbes sections linéaires sont spéciales (cônes que nous nommerons *spéciaux*) peut être obtenue d'une façon tout-à-fait semblable. Mais nous préférons y parvenir en appliquant un nouveau raisonnement qui servirait aussi pour établir le théorème précédent.

Considérons un S_i — cône à $i+1$ dimensions qui appartienne à un S_{i+r+1} et qui soit coupé par un S_r indépendant du soutien S_i en une γ_p^n spéciale: si l'on a $r < n-p+1$, on pourra obtenir ce cône comme projection d'un cône analogue pour lequel $r = n-p+1$, c. à. d. d'un cône appartenant à $S_{n-p+i+2}$. En effet que l'on mène par l' S_{i+r+1} un $S_{n-p+i+2}$ et dans celui-ci par l' S_r un S_{n-p+1}: la γ_p^n sera la projection d'une Γ_p^n appartenant à cet S_{n-p+1} faite par un S_{n-p-r} de celui-ci (n. 5) et par suite aussi par un $S_{n-p-r+i+1}$ de $S_{n-p+i+2}$. Sur l'espace joignant cet $S_{n-p-r+i+1}$ à l' S_i prenons un autre S_i indépendant de l' S_{n-p+1}: le cône qui a cet S_i pour soutien et qui projette la Γ_p^n aura lui-même pour projection faite de l' $S_{n-p-r+i+1}$ sur S_{i+r+1} le premier cône. L'étude de celui-ci se réduit donc à celui de l' S_i — cône appartenant à $S_{n-p+i+2}$.

Or sur ce cône toutes les sections faites avec des S_{n-p+1} seront des Γ_p^n appartenant à ces espaces et on peut donner pour déterminer un S_{n-p+1} $n-p+2$ points. Donc:

---

*) M. Veronese appelle S_i — cône un cône ayant pour *arête* ou *soutien* (ou *sommet*) un S_i, c'est-à-dire engendré par des S_{i+1} (*espaces générateurs*) passant par cet S_i.

**) Dans le n° 6 de ma note citée *Ricerche sulle rigate ellittiche* ce théorème était énoncé incomplètement. J'ajoute, à propos de cette Note, que dans ce même n° 6 à la ligne 13 il faut remplacer S_{n-2} par S_{n-3}, et dans le raisonnement de la 2e partie il faudrait faire quelques modifications. Enfin dans le n° 19, où l'on détermine les courbes elliptiques d'ordre n placées sur une surface réglée elliptique de même ordre, on exclut tacitement celles qui rencontrent chaque génératrice en un seul point: on devrait ajouter que ces courbes forment sur la surface réglée une ∞^n quadratique.

Un S_i-cône de genre p et ordre $n \leq 2p-2$ spécial (c'est-à-dire dont chaque courbe section linéaire soit spéciale) appartenant à un $S_{n-p+i+2}$ ou à un espace inférieur contient $\infty^{(i+1)(n-p+2)}$ courbes de l'ordre n en sorte que par $n-p+2$ points donnés arbitrairement sur autant de S_{i+1} générateurs il en passe en général une bien déterminée. — Toutefois le cône peut être si particulier qu'il contienne un nombre plus grand de ces courbes (lorsqu'une courbe de section linéaire a la série de ses groupes associés contenue dans une g_n^s où $s > n-p+1$; on voit alors que par $s+1$ points quelconques du cône il passe en général une courbe d'ordre n bien déterminée).*

11. Les propositions des n^{os} précédents nous donnent comme cas particuliers celles qui suivent, relatives aux cônes ordinaires (c. à. d. S_0-cônes) algébriques.

Un cône ordinaire de genre p et ordre n contient une infinité de courbes d'ordre n telle que par $n-p+1$ points quelconques du cône il en passe en général une seule. Cependant lorsque $n \leq 2p-2$ si le cône est spécial, c'est-à-dire si le cône projette une courbe spéciale d'ordre n (plane ou gauche), toutes ses courbes d'ordre n seront spéciales, et par $n-p+2$ points il en passera en général une seule. Mais si les groupes associés de l'une (et par suite de chacune) des courbes d'ordre n du cône forment une g_n^s où $s > n-p+1$, ce qui est un cas particulier, on pourra donner arbitrairement sur le cône $s+1$ points qui détermineront parfaitement une courbe d'ordre n du cône. — En tout cas deux courbes d'ordre n du cône se coupent toujours suivant n points associés pour toutes les deux.

12. Pour les cônes ordinaires *non spéciaux* de genre p et ordre n, il est facile de voir qu'ils contiennent une infinité de courbes d'ordre $n+1$ passant par le sommet (qui, comme l'on voit tout-de-suite, ne

---

*) Les résultats des n^{os} 9 et 10 permettent de retrouver les nombres des γ_p^n situées dans un S_r. En nous bornant au cas des courbes non spéciales nous voyons en posant $r=2$ au n. 9 que chaque γ_p^n d'un plan donné est la projection de $\infty^{(n-p+1)(n-p-2)}$ courbes normales non spéciales faite par un S_{n-p-3} fixe. Mais les γ_p^n du plan sont évidemment ∞^{3n+p-1}: donc les constantes des C_p^n normales de S_{n-p} sont

$$(n-p+1)(n-p-2)+3n+p-1.$$

Et le nombre des constantes des γ_p^n de S_r, puisque chacune de celles-ci s'obtient de $\infty^{(n-p+1)(n-p-r)}$ de ces courbes normales, sera égal à celui-là diminué de $(n-p+1)(n-p-r)$, c. à. d.:

$$(r-2)(n-p+1)+3n+p-1=(r+1)n-(r-3)(p-1);$$

ce qui est justement le nombre trouvé au n. 3.

pourront pas être spéciales). Il suffit évidemment de considérer ceux *normaux*, c. à. d. appartenant à S_{n-p+1}, car les autres sont des projections de ceux-ci. Or dans S_{n-p+1} les C_p^{n+1} qui passent par un point donné sont $\infty^{(n-p+1)(n-p+3)+4p-3-(n-p)}$: les cônes qui les projettent de ce point sont des cônes de genre p et ordre n; mais comme les cônes de genre p et ordre n ayant ce point pour sommet sont $\infty^{(n-p)(n-p+2)+4p-3}$, il s'ensuit que chacun de ces cônes projette une infinité de C_p^{n+1} donnée par ∞^{n-p+3}.

Cependant pour que ce raisonnement, fondé sur le calcul des constantes, soit parfaitement rigoureux, il faut encore prouver que si un cône quelconque de genre p et ordre n contient une C_p^{n+1} il ne s'ensuit pas qu'il en contienne une infinité supérieure à ∞^{n-p+3}. Or un tel cône ne peut pas contenir plus que ∞^{n-p+3} C_p^{n+1}: car si deux de ses C_p^{n+1} ont une même génératrice pour tangente dans le sommet, la correspondance uniforme entre leurs points placés sur les différentes génératrices sera telle qu'aux $n+1$ points d'intersection de l'une des deux courbes avec un S_{n-p} passant par le sommet correspondront dans l'autre $n+1$ points du même S_{n-p}, et par suite elle sera projective, c. à. d. elle sera une *homologie* quelconque ayant le sommet du cône pour centre. Ces homologies de S_{n-p+1} sont ∞^{n-p+2} et il y aura en conséquence sur le cône ∞^{n-p+2} C_p^{n+1} ayant une même génératrice pour tangente dans le sommet (l'une de ces courbes étant connue, une autre est parfaitement déterminée par $n-p+2$ points quelconques du cône par lesquels elle doive passer, car ces points et leurs correspondants dans la courbe connue détermineront parfaitement l'homologie qui transforme celle-ci dans la courbe cherchée); donc en variant cette génératrice on ne pourra pas obtenir plus de ∞^{n-p+3} C_p^{n+1} sur le cône. En concluant:

Chaque cône ordinaire de genre p, ordre n, non spécial contient ∞^{n-p+3} courbes (non spéciales) d'ordre $n+1$: une de ces courbes est parfaitement déterminée si l'on donne la génératrice du cône qui lui est tangente dans le sommet de celui-ci et $n-p+2$ quelconques de ses points.

Il faut remarquer que tandis que la ∞^{n-p+1} de courbes d'ordre n du cône est *linéaire* (n. 11), la ∞^{n-p+3} des courbes d'ordre $n+1$ ne l'est pas, si $p>0$, c. à. d. par $n-p+3$ points quelconques du cône il passe un certain nombre >1 de ces courbes d'ordre $n+1$. Pour trouver ce nombre on peut, en projetant le cône normal par $n-p-2$ parmi ces points sur S_3, se réduire à chercher combien de courbes d'ordre $p+3$ placées dans le cône de genre p et ordre $p+2$ de l'espace ordinaire passent par 5 points donnés arbitrairement sur le cône: donc ce nombre ne dépend pas de n, mais seulement

de p. Or si $p = 0$, on voit tout-de-suite que ce nombre est 1, car par 5 points quelconques d'un cône quadrique et par le sommet on peut mener une seule cubique, et celle-ci sera contenue dans le cône. Si $p = 1$ ou $= 2$, remarquons que les courbes gauches de genre p et ordre $p + 3$ sont contenues dans des quadriques. Pour $p = 1$ on aura sur le cône cubique les courbes biquadratiques cherchées au moyen des quadriques passant par les 5 points donnés et par une génératrice arbitraire du cône. Comme les quadriques passant par ces points et cette génératrice donnée, passent aussi par une cubique déterminée qui rencontre ailleurs le cône en $3 \cdot 3 - 5 - 2 = 2$ points, il s'ensuit qu'il y en aura seulement 2 qui coupent encore le cône en une seconde génératrice et qui par suite donnent en outre des courbes biquadratiques passant par les 5 points donnés. Pour $p = 2$ les courbes du 5e ordre dans le cône du 4e ordre de genre 2 sont données par des quadriques passant par la génératrice double du cône et par les 5 points donnés, et en conséquence encore par une cubique déterminée qui rencontre ailleurs le cône en $3 \cdot 4 - 5 - 2 \cdot 2 = 3$ points. Il y aura seulement 3 de ces quadriques qui coupent le cône encore en une génératrice et par suite aussi en une courbe du 5e ordre. Donc: *Par* $n - p + 3$ *points quelconques d'un cône non spécial de genre* p *et ordre* n *il passe* $p + 1$ *courbes d'ordre* $n + 1$ *contenues dans le cône, lorsque* $p = 0, 1, 2$*).

Sur certaines variétés contenant les courbes normales. Courbes hyperelliptiques et autres courbes particulières.

13. Une courbe normale non spéciale C_p^n de S_{n-p} peut-elle avoir un point multiple? En supposant l'existence d'un tel point sur une telle courbe et en la projetant de ce point sur S_{n-p-1} on aurait dans cet espace, si la projection était uniforme, une courbe de genre p et ordre inférieur à $n - 1$, qui lui appartiendrait, ce qui est impossible si $n > 2p$. Et si la projection n'était pas uniforme, elle donnerait une courbe d'ordre $\leq \frac{1}{2}(n - 2)$ qui devrait appartenir à S_{n-p-1}, ce qui est impossible si $n > 2p$, puisque alors cet ordre serait moindre que $n - p - 1$. Donc *une courbe normale d'ordre* $n > 2p$ *ne peut pas avoir de points multiples.*

Mais *une* C_p^{2p} *de* S_p *peut bien avoir un point double:* comme alors les S_{p-1} passant par celui-ci déterminent sur la courbe sa série g_{2p-2}^{p-1}, on voit qu'il faut pour que la C_p^{2p} ait un point double que la g_{2p}^p de f_p^r dont elle dérive contienne la g_{2p-2}^{p-1}, en ajoutant à celle-ci

*) Cette proposition a-t-elle lieu, quel que soit p?

deux points fixes (correspondants du point double de la C_p^{2p}). Une telle g_{2p}^p sur f_p^r sera donnée par les ∞^p courbes adjointes φ^{r-2} qui passent par $r-2$ points fixes de f situés sur une droite (les 2 autres points d'intersection de f avec cette droite correspondront au point double)*).

De même *une* C_p^{2p-1} *de* S_{p-1} *peut avoir un point triple; une* C_p^{2p-2} (*non spéciale*) *de* S_{p-2} *peut avoir un point quadruple;* etc. etc. Nous rencontrerons plus loin (n. 23) ces espèces de courbes.

14. S'il y avait sur une courbe normale C_p^n de S_{n-p} un groupe de $i < n-p$ points qui appartenait à un S_k où $k < i-1$, et si la projection de la courbe faite de cet espace sur un $S_{n-p-k-1}$ était uniforme, on aurait pour projection une courbe d'ordre $n-i$, genre p. Or si $n-i > 2p-2$, c'est-à-dire si $i < n-2p+2$, cette courbe se trouverait sur un S_{n-p-i} et par suite la C_p^n serait sur l' $S_{n-p-i+k+1}$ qui le projetterait et n'appartiendrait pas à S_{n-p}. D'ailleurs, si i satisfait à cette condition, on voit facilement que la projection de la C_p^n est nécéssairement uniforme (par un raisonnement semblable à celui du n° précédent). Donc: *si* $0 < i < n-2p+2$, *un groupe quelconque de* i *points de* C_p^n *se compose toujours de points indépendants, c. à. d. appartient toujours à un* S_{i-1}. — Un cas particulier de cette proposition se trouve déjà au n° précédent.

15. Considérons sur la C_p^n normale non spéciale une série linéaire simplement infinie de groupes de i points, c'est-à-dire une g_i^1, et supposons que les différents groupes appartiennent en général à des S_{i-1}. Alors ces espaces formeront une variété simplement infinie, c. à. d. une $S_{i-1} - F_i$, qui sera rationnelle puisque la série des groupes est linéaire. On trouve aisément l'ordre de cette variété par un raisonnement qui pourra être appliqué dans plusieurs questions semblables. Rappelons que les $S_{i-1} - F_i^g$ rationnelles d'ordre g appartiennent toujours à S_{g+i-1}, ou à des espaces inférieurs, et que dans ce dernier cas elles sont projections de celles appartenant à S_{g+i-1}**). Donc comme

*) M. Nöther (*Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen*, Math. Ann. XVII) a déjà remarqué l'invariantivité des groupes de $2p$ points de f determinés par de telles φ^{r-2} dans les transformations uniformes rationnelles de f, et comment c'est de cela que dépend l'entrée de ces courbes adjointes dans les intégrales abéliennes de 3e espèce.

**) Voir pour les propriétés de ces variétés rationnelles dont nous ferons usage ici et dans la suite, le mémoire cité de M. Veronese, ma note aussi citée sur les surfaces réglées rationnelles et enfin mes deux travaux: *Ricerche sui fasci*

notre variété appartient à S_{n-p} (puisque C_p^n appartient à cet espace) elle sera au moins de l'ordre $n-p-i+1$; et d'ailleurs elle ne pourra pas être d'un ordre g supérieur à ce nombre, car autrement elle serait la projection d'une $S_{i-1} - F_i^g$ appartenant à un espace supérieur à S_{n-p} et par suite C_p^n serait aussi la projection d'une courbe de même ordre et genre située sur cette $S_{i-1} - F_i^g$ et appartenant par suite aussi a cet espace supérieur. Donc: *les S_{i-1} auxquels appartiennent les groupes de i points d'une g_i^1 d'une courbe non spéciale quelconque de genre p et ordre n forment une $S_{i-1} - F_i^{n-p-i+1}$ rationnelle*).*

16. En considérant encore la C_p^n normale de S_{n-p}, un S_{n-p-1} quelconque mené par l'un des S_{i-1} de notre variété la coupe encore en une $S_{i-2} - F_{i-1}^{n-p-i}$ rationnelle, qui pourra d'ailleurs se décomposer en un certain nombre de S_{i-1} et une $S_{i-2} - F_{i-1}$ irréductible, mais qui appartiendra toujours à un S_{n-p-2} et sera rencontrée par C_p^n en $n-i$ points. Chacun des S_{i-1} rencontrera cette $S_{i-2} - F_{i-1}$ irréductible en un S_{i-2} et sera par suite avec l' S_{n-p-2} dans un S_{n-p-1}. Donc: *Si sur une courbe quelconque non spéciale de genre p et ordre n il y a une g_i^1 dont chaque groupe appartienne en général à un S_{i-1}, les ∞^{n-p-i} groupes de $n-i$ points résiduels à l'un quelconque de ces groupes de i points sont aussi les groupes résiduels de tous les autres et se trouvent resp. sur des S_{n-p-2}.* Pour deux telles séries de groupes de points, g_i^1 et g_{n-i}^{n-p-i}, on dira que la seconde est *résiduelle* de la première.

17. On construit facilement au moyen du théorème précédent des g_i^1 sur C_p^n si $i \geq p+1$. Une telle série sera déterminée sur la courbe par les S_{n-p-1} d'un faisceau dont le soutien S_{n-p-2} soit mené par $n-i$ points arbitraires de C_p^n. — Si en outre $i \leq n-p$, on pourra choisir arbitrairement un groupe de la série.

Si $i = n-p$, les S_{n-p-1} contenant les groupes d'une g_{n-p}^1 forment (n. 15) un faisceau dont la base est un S_{n-p-2} passant par p points de la courbe.

---

di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque (Atti della R. Accad. di Torino XIX), *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (même Recueil XXI).

*) Par le même raisonnement on arrive, *pour les courbes normales*, à cette proposition plus générale: *si sur une courbe normale non spéciale de genre p et ordre n il y a une g_i^1 dont les groupes de i points appartiennent en général à des $S_k (k<i)$, le lieu de ces S_k est une $S_k - F_{k+1}^{n-p-k}$ rationnelle normale.* —

On verra dans une Note qui sera bientôt publiée une relation beaucoup plus générale entre les ordres et les genres d'une variété quelconque $S_{i-1} - F_i$ et d'une courbe placée sur elle. — (Juillet 1887).

Si $i = n - p - 1$, les S_{n-p-2} auxquels appartiennent les groupes de la g^1_{n-p-1} forment (n. 15) une $S_{n-p-2} - F^2_{n-p-1}$, c'est-à-dire sont les espaces S_{n-p-2} générateurs de l'un système d'un cône quadrique ayant un S_{n-p-4} pour soutien et projetant une quadrique de l'espace ordinaire: les espaces S_{n-p-2} générateurs de l'autre système déterminent sur la courbe une série ∞^1 de groupes de $p+1$ points qui est justement la g^1_{p+1} résiduelle de la g^1_{n-p-1}.

Donc si $n - p - 1 \geq p + 1$, c. à. d: $n \geq 2p + 2$, on a ainsi *une infinité de S_{n-p-4}-cônes quadriques contenant la courbe C^n_p normale de S_{n-p}.*

En projetant sur S_3 par le soutien S_{n-p-4} de l'un de ces cônes on voit que C^n_p se projette suivant une courbe d'ordre n, genre p située sur une quadrique ordinaire et rencontrant les génératrices des deux systèmes resp. en $p+1$ et $n-p-1$ points. Si avant de faire cette projection on abaisse l'ordre de C^n_p à $2p+2$ (au moyen d'une projection par $n - 2p - 2$ de ses points sur un S_{p+2}) on arrive ainsi par le simple usage de projections à une *représentation des courbes de genre p dans une courbe plane d'ordre $2p+2$ douée de deux points $(p+1)$-ples (et d'autres p^2 points doubles).**)

18. Dans une courbe de genre $p > 1$ *générale*, c'est-à-dire dont les $3p-3$ modules aient des valeurs quelconques, il n'y a pas de séries linéaires simplement infinies de i points, c. à. d. des g_i^1, si $i < E\frac{p+3}{2}$ (comme il suit de la condition (4) du n° 3 en y posant $r = 1$, $n = i$). Ainsi il n'y a pas en général (si $p > 2$) de séries linéaires simplement infinies de couples de points et s'il y en a on nomme la courbe *hyperelliptique*. Si $p > 4$, il faut aussi une particularisation pour que la courbe ait une ∞^1 linéaire de ternes de points; et ainsi de suite. La proposition générale du n° 15 nous donne déjà en posant $i = 2, 3$ et en projetant dans l'espace ordinaire ou sur un plan:

Dans une courbe de genre p et ordre n hyperelliptique les droites joignant les points conjugués forment si la courbe est gauche $(n \geq p+3)$ une surface réglée rationnelle d'ordre $n - p - 1$, et si la courbe est

---

*) Si par $n - 2p - 2$ points fixes d'une C^n_p normale $(n > 2p + 2)$ on projette les S_p auxquels appartiennent les groupes de $p+1$ points d'une g^1_{p+1}, c. à. d. la $S_p - F^{n-2p}_{p+1}$ qu'ils forment, on aura une $S_{n-p-2} - F^2_{n-p1}$ qui sera un S_{n-p-4}-cône, dont le soutien S_{n-p-4} passe par les $n - 2p - 2$ points fixes. En projetant la C^n_p par cet S_{n-p-4} sur S_3 on obtient directement une courbe de genre p et ordre $2p+2$ placée sur une quadrique ordinaire et rencontrant les génératrices des deux systèmes en $p+1$ points.

plane ($n \geq p + 2$) *elles enveloppent une courbe rationnelle de classe* $n - p - 1$.*)

Lorsqu'une courbe de genre p *et ordre* n *contient une série linéaire simplement infinie de ternes de points, les plans de ces ternes si la courbe est gauche enveloppent une développable rationnelle de classe* $n - p - 2$, *et si la courbe est plane il y a* $n - p - 2$ *droites contenant chacune une terne.*

Il faut remarquer, quant au premier de ces énoncés, qu'*une courbe hyperelliptique* (*de genre* p *et ordre* n *de* S_r) *ne peut pas être spéciale* (de sorte qu'on a toujours $r \leq n - p$, et que cette courbe est normale si elle appartient à S_{n-p}). En effet si elle était spéciale, elle serait donnée (n° 1) par des courbes adjointes d'ordre $\nu - 3$ de f_p^ν et le système de ces $\varphi^{\nu-3}$ lorsque f est hyperelliptique est tel que chaque courbe passant par un point de f passe aussi par son conjugué (B. N. p. 286), ce qui rend impossible la correspondance uniforme entre la courbe cherchée et f (v. à la fin du n° 1).

Quant au second énoncé de ce n° la supposition qu'on y fait que les ternes de points ne soient pas toutes sur des droites exclut déjà la possibilité que la courbe soit spéciale. En effet on a la proposition plus générale suivante: *Si sur une courbe spéciale quelconque* γ_p^n *il y a une* g_i^1, *où* $i \leq p$, *les* i *points de chaque groupe de cette série ne sont pas indépendants entre eux, car ils se trouvent toujours sur un même* S_{i-2}. Cette proposition est une conséquence du théorème de Riemann (v. n° 2), car celui-ci établit que chaque groupe de l'image de notre g_i^1 de γ sur la f_p^ν plane est tel que le passage d'une $\varphi^{\nu-3}$ par $i - 1$ de ses points entraine aussi le passage de cette courbe adjointe par le point restant; d'où il suit, en traduisant cela sur γ, (si S_r est l'espace auquel appartient cette courbe) que tous les S_{r-1} qui passent par $i - 1$ points d'un groupe de notre g_i^1 de γ passent aussi par le point restant, ce qui prouve évidemment notre proposition.

19. Au moyen du résultat du n° 15 nous pouvons obtenir une représentation particulière des courbes d'espèces remarquables que nous avons nommées, et plus en général des courbes contenant une

*) Cette proposition sur une courbe plane hyperelliptique d'ordre n genre p est connue: voir, p. e. Humbert: *Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (Journal de Mathém. 4e sér. t. II; v. p. 316). Si dans un faisceau de droites du plan de cette courbe l'on fait correspondre deux droites qui aillent à deux points conjugués on en tire, en appliquant dans ce faisceau le principe de correspondance, l'autre proposition bien connue: *sur une courbe hyperelliptique de genre* p *il y a* $2p + 2$ *points conjugués chacun à soi-même* (*points de diramation*). — Pour le résultat relatif aux courbes gauches hyperelliptiques voir le n° 48, II du mémoire de M. De Paolis: *Le trasformazioni doppie dello spasio* (Memorie della R. Acc. d. Lincei, serie 4a, vol. I).

g_i^1, où $i < n - p$. Commençons, si $n - p = i\,E\,\frac{n-p}{i} + k$, où $k < i$, par projeter la C_p^n non spéciale sur un S_{n-p-k} par l' S_{k-1} joignant k points quelconques. Nous aurons ainsi une courbe normale de genre p, dont nous nommerons encore n l'ordre (inférieur de k au précédent) qui sera maintenant tel que $n - p$, nombre de dimensions de l'espace auquel la courbe appartient, est divisible par i. Les S_{i-1} joignant les groupes de i points de la g_i^1 forment une $S_{i-1} - F_i^{n-p-i+1}$. Pour avoir une projection uniforme de celle-ci sur un S_i, projetons-la par un $S_{n-p-i-1}$ contenant $\frac{n-p}{i} - 1$ des S_{i-1} de cette variété. Un S_{n-p-1} projetant un quelconque des S_{i-1} coupera notre variété outre que dans cet S_{i-1} variable en une $S_{i-2} - F_{i-1}^{n-p-i}$ appartenant à un S_{n-p-2} et qui comprend les $\frac{n-p}{i} - 1$ S_{i-1} fixes, mais contient aussi une partie irréductible rencontrée par tous les S_{i-1}, de sorte que le faisceau des S_{n-p-1} passant par cet S_{n-p-2} se composera des espaces qui projettent les différents S_{i-1} de notre variété. Donc sur S_i ces S_{i-1} se projettent suivant les S_{i-1} d'un faisceau. Notre C_p^n ayant $\frac{n-p}{i} - 1$ groupes de i points, c. à. d. $n - p - i$ points, sur l' $S_{n-p-i-1}$ qui est axe de projection, et d'autres p encore, comme on voit tout-de-suite, sur l' S_{n-p-2}, sera projetée suivant une courbe de S_i de l'ordre $p + i$ ayant p points sur l' S_{i-2} axe du faisceau nommé de S_{i-1} et sur ces différents S_{i-1} les groupes de i points de la g_i^1 projection de celle de la C_p^n. Donc:

Les courbes de genre p contenant une g_i^1 peuvent toujours (par voie de projections) être transformées en une courbe de S_i d'ordre $p + i$ avec un S_{i-2} qui la coupe en p points de sorte que les S_{i-1} passant par et S_{i-2} donnent par leurs intersections variables avec la courbe cette série de groupes.

En projetant encore cette courbe sur un plan par un S_{i-3} passant par $i - 2$ des p points de l' S_{i-2} on a: *Chaque courbe de genre p douée d'une g_i^1 peut être transformée en une courbe plane d'ordre $p+2$ avec un point multiple suivant $p - i + 2$: la g_i^1 étant alors donnée par les droites passant par ce point.* (Voir pour le cas de $i = 2$, c. à. d. le cas hyperelliptique B. N. p. 287).

20. Les propriétés connues des $S_{i-1} - F_i^{n-p-i+1}$ donnent facilement de nouvelles propriétés des courbes contenant une série g_i^1: la classification de ces variétés qui se fait suivant les ordres minima des courbes, surfaces réglées, etc., qu'elles contiennent donnerait lorsque le nombre de ces g_i^1 est fini, et en particulier lorsque l'existence d'une telle série est une exception, une nouvelle distinction de ces courbes

en espèces. Mais nous nous bornerons au cas le plus intéressant, celui de $i = 2$, c. à. d. des courbes hyperelliptiques.

Soit m l'ordre de la courbe minima dans la surface reglée rationnelle F_2^{n-p-1} des droites contenant les couples de points conjugués de la C_p^n hyperelliptique. Le nombre maximum de génératrices situées dans un S_{n-p-1} sera $n-p-m-1$ et les S_{n-p-1} passant par la C^m (en nombre de $\infty^{n-p-m-1}$ lorsqu'il y a une seule C^m, c. à. d. en exceptant le cas de $m = \frac{n-p-1}{2}$ où il y a ∞^1 C^m et par suite ce nombre devient ∞^{n-p-m}) contiennent en effet autant de génératrices, c. à. d. de couples de points conjugués. Donc

$$2(n-p-m-1) \leq n, \quad 2m \geq n-2p-2.$$

Ainsi, en nous servant aussi d'autres propriétés presque évidentes de la surface réglée:

Les courbes hyperelliptiques d'ordre n et genre p se distinguent en espèces caractérisées par un nombre m (qui pour une courbe gauche est l'ordre de la courbe minima de la surface réglée rationnelle d'ordre $n-p-1$ du n° 18) égal pour l'espèce la plus générale à $E\frac{n-p-1}{2}$, mais qui peut descendre jusqu'à $E\frac{n-1}{2} - p$. La propriété caractéristique d'une courbe correspondant à une certaine valeur de m est que le nombre maximum de couples de points conjugués qui peuvent entrer dans un groupe associé est $n-p-m-1$ et qu'il y a effectivement une infinité de groupes associés contenant chacun $n-p-m-1$ couples et $2m+2p-n+2$ autres points. — Ces groupes associés forment une $\infty^{n-p-m-1}$ et ces derniers points sont fixes, lorsque $m < \frac{n-p-1}{2}$. Alors $n-p-m-1$ couples quelconques de points conjugués appartiennent à un groupe associé bien déterminé; et chaque groupe associé contenant $m+1$ couples en contient encore $n-p-2m-2$, c. à. d. est un groupe associé de la série considérée. Lorsque $m = \frac{n-p-1}{2}$ les groupes associés contenant chacun $n-p-m-1 = \frac{n-p-1}{2}$ couples sont ∞^{n-p-m} et ils se divisent en ∞^1 systèmes de $\infty^{n-p-m-1}$, dont chacun embrasse des groupes associés comprenant $\frac{n-p-1}{2}$ couples variables et $p+1$ points fixes. Dans ce cas $\frac{n-p-1}{2}$ couples quelconques se trouvent dans ∞^1 groupes associés, c. à. d. dans un groupe de chacun des ∞^1 systèmes nommés. —*)

*) Pour $p = 1$, en remarquant que sur une courbe elliptique il y a ∞^1 séries linéaires g_2^1 de couples de points, on retrouve ainsi des propositions connues (v. ma Note sur les courbes elliptiques à p. 295 du t. XXVII de ces Annales). Pour $p = 2$, on trouve une distinction des courbes de genre 2 en deux espèces, à laquelle est aussi parvenu d'une façon fort différente M. Humbert à la p. 279 du mémoire déjà cité.

21. Cherchons maintenant si une courbe normale hyperelliptique peut être obtenue comme l'intersection de la surface réglée rationnelle qui la contient avec une variété quadratique.

Comme une C_p^n de S_{n-p}, où nous supposerons $n > 2p-2$, est coupée par une M_{n-p-1}^2, ou, comme nous dirons aussi, par une *quadrique* de cet espace, en $2n$ points dont p sont déterminés en général par les autres, il s'ensuit que les quadriques passant par la C_p^n forment un système linéaire dont l'ordre d'infinité est

$$\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3) - (2n-p+1) = \frac{1}{2}[(n-p)^2 - n - p - 2]$$

pourvu que ce nombre ne soit pas négatif.*) Or ce nombre en effet reste toujours ≥ 0 dans l'hypothèse faite que $n > 2p-2$ en exceptant

*) Ce raisonnement ne serait pas tout-à-fait complet; mais on parvient au même résultat, et même à d'autres beaucoup plus généraux sur le nombre des variétés d'un ordre quelconque passant par une courbe quelconque au moyen du même raisonnement, tout-à-fait rigoureux, dont se sert M. Nöther (*Raumcurven*, § 7) pour le cas des courbes gauches de l'espace ordinaire.

Pour une courbe spéciale normale Γ_p^{2p-2} de S_{p-1} on sait qu'elle est contenue dans $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ quadriques indépendantes linéairement (on trouve cette proposition successivement dans la Note de M. H. Weber, à la pag. 35 du t. XIII de ces Annales, dans celle de M. Kraus à pag. 245 du t. XVI, et enfin, mais démontrée plus complètement et avec d'autres propositions plus générales, dans celle de M. Nöther déjà citée du t. XVII).

En particulier pour $p = 5$ on voit que la courbe d'ordre 8 et genre 5 appartenant à S_4 est l'intersection complète de 3 quadriques. Réciproquement la courbe du 8e ordre qui dans S_4 est l'intersection de 3 quadriques quelconques est du genre 5 (v. Weber, loc. cit., pag. 44; et Veronese, mém. cité, p. 204). En considérant la courbe gauche spéciale de l'espace ordinaire d'ordre 8 et genre 5 (v. Nöther, *Raumcurven*, pag. 97) comme projection de celle appartenant à S_4, c. à. d. de la base d'un réseau ∞^2 de quadriques de S_4 on en trouve immédiatement une foule de propriétés. Ainsi les ∞^2 $M_4^{2.2}$ suivant lesquelles se coupent mutuellement ces quadriques et parmi lesquelles il y en a une commune à toutes les quadriques du réseau qui passent par le centre de projection donnent: *la γ_5^8 spéciale de S_4 appartient à une surface cubique déterminée et à ∞^2 surfaces du 4e ordre à conique double: ces coniques doubles sont les coniques de la surface cubique placées dans les plans qui passent par une droite déterminée de celle-ci (ne rencontrant pas la γ_5^8)*.

Et au moyen des cônes circonscrits du centre de projection aux quadriques du réseau on obtient: *il y a ∞^2 quadriques tangentes en 8 points à la γ_5^8 (quadriques inscrites dans les surfaces du 4e ordre nommées): par deux points quelconques il en passe 4; les ∞^2 groupes de 8 points de contact forment une g_8^2 de groupes associés contenue dans la g_8^4*. — Les ∞^1 cônes du réseau de quadriques de S_4 avec leurs plans générateurs donneraient d'autres propositions, que nous ne nous arrêterons pas à énoncer.

toutefois pour $p = 1$ le cas de $n = 3$; pour $p = 2$ celui de $n = 4$; pour $p = 3$, $n = 5$ ou 6; pour $p = 4$, $n = 7$.*)

Il nous faut aussi le nombre des quadriques de S_{n-p} passant par une surface réglée rationnelle normale F_2^{n-p-1}. Considérons sur cette surface une courbe minima C^m et l'une des $C^{n-p-m-1}$, qu'elle contient. Une quadrique contenant ces deux courbes coupe encore la surface réglée en général en $n-p-1$ génératrices: si donc on la force à passer par $n-p$ points quelconques de la surface et en conséquence par les $n-p$ génératrices contenant ces points, on la forcera à contenir la surface réglée. Donc par la surface réglée rationnelle normale F_2^{n-p-1} passe un système linéaire de quadriques dont l'ordre d'infinité est:

$$\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3) - (2m+1) - [2(n-p-m-1)+1] - (n-p)$$

$$= \frac{1}{2}[(n-p)^2 - 3(n-p)] = \frac{1}{2}(n-p)(n-p-3).^{**})$$

Or soit dans S_{n-p} une C_p^n hyperelliptique et considérons le système des quadriques qui la contiennent et celui des quadriques qui contiennent la surface réglée F_2^{n-p-1} des droites joignant ses couples de points conjugués. La différence entre les nombres des dimensions du 1er et du 2e système est, d'après ce qui précède:

$$\frac{1}{2}[3(n-p) - (n+p+2)] = n - 2p - 1;$$

elle est positive si

$$n \geq 2p + 2.$$

Donc: *une courbe hyperelliptique normale C_p^n de S_{n-p} donnée peut toujours, lorsque $n \geq 2p+2$, être obtenue comme l'intersection de la surface réglée rationnelle F_2^{n-p-1} qui la contient avec une quadrique (ne contenant pas cette surface) qui la coupe encore en $n-2p-2$ génératrices (que l'on peut choisir arbitrairement).*

Inversement, une quadrique de S_{n-p} qui passe par $n-2p-2$ génératrices d'une F_2^{n-p-1} réglée rationnelle normale dont l'ordre m de la courbe minima soit tel que $2m \geq n-2p-2$ (de sorte que la quadrique ne contient pas nécéssairement la C^m) coupe encore la surface en général en une courbe d'ordre n hyperelliptique, dont le

---

*) Ces exceptions sont données, comme l'on voit, par quelques courbes planes et par deux courbes gauches de l'espace ordinaire, C_3^6 et C_4^7, que l'on rencontre resp. aux pages 87 (a_3) et 92 (a_4) du mémoire de M. Nöther.

**) Ce résultat est contenu dans la proposition suivante: *une variété rationnelle $S_{i-1} - F_i^m$ normale, c. à. d. appartenant à un S_{m+i-1}, est toujours, si $1 \leq i \leq m$, l'intersection complète d'un système de quadriques de cet espace tel que par une quadrique quelconque d'un S_{m-2} il en passe une seule.*

genre sera p, puisque les droites joignant les couples de points conjugués forment une surface réglée d'ordre $n-p-1$.

22. Combien de courbes hyperelliptiques de genre p et ordre n y a-t-il sur une surface réglée rationnelle F_2^{n-p-1} donnée? Si cette surface est normale et si $n \geq 2p+2$, en posant $N = \frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)$, ces courbes seront toutes déterminées par les $\infty^{N-3(n-2p-2)}$ quadriques passant par $n-2p-2$ génératrices choisies arbitrairement sur cette surface: mais par chacune de ces courbes il passe $\infty^{N-(2n-p+1)-(n-2p-2)}$ de ces quadriques. Donc ces courbes seront seulement $\infty^{(2n-p+1)-2(n-2p-2)}$, c. à. d. ∞^{3p+5} *).

Or la variété des F_2^{n-p-1} générales est $\infty^{(n-p)(n-p+2)-6}$; donc le nombre des paramètres dont dépendent les courbes hyperelliptiques normales est

$$(n-p)(n-p+2)-6+(3p+5) = (n-p)(n-p+2)+3p-1$$

de sorte qu'il est inférieur à celui des C_p^n générales de $p-2$. Donc *il faut $p-2$ conditions pour qu'une courbe de genre p soit hyperelliptique;* ou en d'autres termes les $3p-3$ modules indépendants d'une courbe générale de genre p se réduisent à $2p-1$ pour une courbe hyperelliptique: résultat connu (B. N. p. 302).

23. Des cas remarquables de courbes hyperelliptiques s'obtiennent lorsque la surface réglée rationnelle des droites joignant les points conjugués devient un cône. Alors on a (n° 20) $m=0$ et par suite $n \leq 2p+2$.

Si $n = 2p+2$, la C_p^{2p+2} hyperelliptique normale de S_{p+2} dont il s'agit sera (n° 21) l'intersection complète d'un cône rationnel normal d'ordre $p+1$ avec une quadrique ne passant pas par le sommet.

Mais si $n < 2p+2$, on ne peut plus construire une telle courbe d'une manière analogue. Pour la C_p^{2p+1} de S_{p+1} le cône rationnel d'ordre p devra évidemment avoir le sommet en un point simple de la courbe: pour la C_p^{2p} de S_p le cône rationnel d'ordre $p-1$ aura le sommet en un point double de la courbe; la C_p^{2p-1} de S_{p-1} aura un

*) On trouve ce même résultat, sans la restriction $n \geq 2p+2$, par la représentation plane de F_2^{n-p-1} que l'on obtient en la projetant par k de ses génératrices et $n-p-2k-2$ points: les courbes cherchées seront alors représentées sur le plan par des courbes d'ordre $n-2k$ avec un point donné pour multiple suivant $n-2k-2$ et $n-p-2k-2$ points doubles aussi donnés. Or les paramètres independants de ces courbes planes seront justement

$$\frac{1}{2}[(n-2k)(n-2k+3)-(n-2k-2)(n-2k-1)-6(n-2k-p-2)] = 3p+5.$$

point triple, sommet du cône rationnel d'ordre $p-2$; et ainsi de suite. On peut obtenir toutes ces courbes en projetant la C_p^{2p+2} de S_{p+2} déjà construite par $1, 2, 3, \ldots$ de ses points sur un S_{p+1}, S_p, $S_{p-1}, \ldots$

La représentation de ces courbes sur une f_p^{p+2} avec un point p—ple (n° 19) montre aussi leur existence: que l'on considère en effet les $2p+1$ intersections variables de f avec le système ∞^{p+1} des courbes d'ordre $p+1$ ayant le même point p—ple et passant par $p+1$ des points d'intersection de f avec une droite donnée. Cette série g_{2p+1}^{p+1} de groupes de points de f donnera, comme on voit tout-de-suite, une C_p^{2p+1} de S_{p+1} de l'espèce cherchée; et si on assujettit encore les courbes d'ordre $p+1$ à passer par $1, 2, \ldots$ nouveaux points quelconques de f on aura les C_p^{2p} de S_p, les C_p^{2p-1} de $S_{p-1}, \ldots$, nommées.

24. On pourrait étudier, par nos méthodes et en partant de la proposition donnée dans la note à la fin du n° 15, les courbes présentant cette particularité de contenir une g_i^1 dont les groupes de i points appartiennent à des S_k où $k < i-1$, au lieu qu'à des S_{i-1}. Mais nous nous bornerons au cas de $i=3$, $k=1$, c. à. d. au cas où il y a une surface réglée rationnelle de droites trisécantes de la courbe. En supposant que celle-ci soit une C_p^n normale non spéciale de S_{n-p}, il suit de la proposition citée que la surface réglée sera normale, c. à. d. de l'ordre $n-p-1$. En outre il suit du n° 14 qu'on devra avoir $n \leq 2p+1$.

Dans la projection de la surface réglée F_2^{n-p-1} sur un plan faite par $k\,(<m$, si m est l'ordre des courbes minimae de la surface) génératrices et $n-p-2k-2$ points, la C_p^n se projettera suivant une courbe γ_p^{n-3k} ayant un point $(n-3k-3)$-ple et $n-p-2k-2$ points triples et en outre des points doubles au nombre de

$$\frac{1}{2}\{(n-3k-1)(n-3k-2)-(n-3k-3)(n-3k-4)\}-3(n-p-2k-2)-p$$
$$=2p+1-n^*).$$

Et inversement toutes les courbes d'ordre $n-3k$ du plan ayant les dites singularités seront les images de C_p^n de la surface réglée rencontrant trois fois chaque génératrice. Or le nombre des paramètres de ces courbes est

---

*) Ce résultat prouve de nouveau que pour qu'une C_p^n puisse avoir une surface réglée rationnelle de trisécantes il faut que $n \leq 2p+1$. Ajoutons que ces points doubles de γ seront les images de $2p+1-n$ points doubles, qu'aura dans ce cas la C_p^n. — Le raisonnement qui suit ci-dessus est seulement esquissé, mais il peut être complété au moyen du théorème contenu à la fin du n. 19.

$$\frac{1}{2}\{(n-3k)(n-3k+3)-(n-3k-3)(n-3k-2)\}-6(n-p-2k-2)$$
$$-(2p+1-n)=4p+8-n.$$

Nous concluons: *Une courbe non spéciale de genre p et ordre $n \leq 2p+1$ peut être sur une surface réglée rationnelle d'ordre $n-p-1$ de trisécantes. En général une surface réglée rationnelle de cet ordre $\leq p$ contient un système de ∞^{4p+8-n} courbes de genre p et ordre n rencontrant trois fois chaque génératrice.**)

De cela et du nombre des surfaces réglées rationnelles normales de S_{n-p} on tire que pour une C_p^n, où $n \leq 2p+1$, il faut $n-1$ conditions pour qu'elle ait une ∞^1 linéaire de trisécantes.**)

Turin, Janvier 1887.

---

*) On voit facilement que, si m est l'ordre de la courbe minima de la surface réglée, on doit avoir: $3m \geq 2n-3p-3$.

**) La 2e Partie de ce travail, relative aux surfaces réglées, paraîtra plus tard.

Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen.

Zweiter Theil.

Ueber die zu zwei eindeutig auf einander bezogenen Flächen gehörigen Strahlensysteme.

Von

A. Voss in München.

Die Veranlassung zu dieser Arbeit bot zunächst die von Herrn Fiedler*) gestellte Frage nach den Eigenschaften der Strahlensysteme und Brennflächen, welche zu den conjugirten Punkten der Hesse'schen und Steiner'schen Fläche einer algebraischen Fläche gehören. Diese Aufgabe, welche von der Untersuchung der Polarflächen dritter und vierter Ordnung der letzteren abhängt, und daher für eine synthetische Behandlung einige weitere Voruntersuchungen nöthig zu machen scheint, erweitert sich naturgemäss zu der *Betrachtung derjenigen Systeme, welche zu zwei Flächen gehören, die durch vier biquaternäre Gleichungen eindeutig auf einander bezogen sind.* Ich gebe damit zugleich eine allgemeine Lösung derjenigen Fragen, welche sich unter analogen Umständen in der Theorie der Strahlensysteme überhaupt aufwerfen lassen**), soweit dieselben mit Hülfe vollständig ausgeführter algebraischer Formen behandelt werden können, und nicht, wie z. B. die Betrachtung von Doppelcurven, auf algebraischen Operationen beruhen, die wegen ihrer Complicirtheit einer allgemeinen Behandlung sich bis jetzt wenig zugänglich gezeigt haben.

*) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 3. Ausgabe, Th. II, S. LX der Literatur-Zusätze.

**) Ich verweise hier auf meine Arbeit *Ueber Complexe und Congruenzen*, diese Annalen Bd. VIII, in welcher verwandte Betrachtungen von rein liniengeometrischem Standpunkte aus geführt sind, sowie auf meine Untersuchungen *über die projective Centralfläche einer algebraischen Fläche n. Ordnung* (Abh. d. bayer. Academie d. Wissenschaften XVI, 1887). Dem Umstande, dass bei verschiedener analytischer Definition der Strahlensysteme die algebraische Behandlung eines und desselben Kreises von Problemen so verschieden ausfällt, kann wohl erst durch eine erweiterte rein geometrische Theorie abgeholfen werden.

... *insbesondere die vollständige Ermittelung derjenigen ... Verschwinden es abhängt, dass zwei, drei oder vier ... des Systems durch einen Punkt gehen, resp. in ...* Configurationen, welche in bekannter Beziehung zu ... Brennfläche des Systems stehen.

Da die letztere indess selbst in den einfachsten Fällen von verhältnissmässig hoher Ordnung wird, so habe ich die specielle Anwendung dieser allgemeinen Untersuchungen auf die Theorie der höheren conjugirten Kernflächen nicht weiter ausgeführt, sondern mich auf die Betrachtung der gewöhnlichen Hesse'schen Fläche H und ihrer conjugirten Steiner'schen S beschränkt. Für die zu diesen gehörigen Brennflächen sind charakteristisch die aus den Knotenpunkten von H entspringenden Knotenpunkte und singulären Ebenen, während das durch die Hauptpunkte dieser Strahlensysteme bedingte Auftreten weiterer Knotenpunkte sich auch bei den Brennflächen der höheren Kernflächen wiederholt.

Besonders einfache und verhältnissmässig anschauliche Verhältnisse ergeben sich für die Fläche dritter Ordnung. Ein Theil derselben hätte sich bereits aus den Eigenschaften der conjugirten Punktpaare von H entnehmen lassen, welche Herr Sturm im 4. Capitel seiner „Synthetischen Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung" entwickelt hat. Die ausgezeichneten Eigenschaften des zu vier bilinearen symmetrischen Formen gehörigen Systems in seiner Beziehung zu dem Cayley'schen *Symmetroid* und seiner Jacobi'schen Fläche veranlassten mich indess, auch diesen Fall in einem allgemeineren Zusammenhange darzustellen.

§ I.

Ueber eine Gattung von Strahlensystemen.

Es seien zwei Flächen F, Φ von den Ordnungen m, μ so auf einander bezogen, dass jedem Punkte x von F α' Punkte y von Φ, jedem Punkte y von Φ aber α Punkte x von F entsprechen. Die *Classe des aus den Geraden* (xy) *gebildeten Strahlensystemes sei* e; e ist zugleich auch die Ordnung derjenigen Curve, welche dem ebenen Schnitte von $F(\Phi)$ auf $\Phi(F)$ entspricht; die *Ordnung des Strahlensystems* sei durch ε bezeichnet. Zwischen diesen Zahlen besteht eine einfache Beziehung, welche sich leicht durch Verallgemeinerung einer von Salmon für die Ebene angegebenen Gleichung*) ergiebt.

Man betrachte die Ebenen E, welche durch eine beliebige Gerade g gehen. In jeder Ebene E liegen e conjugirte Punktepaare x, y von F und Φ. Ausserdem gehören zu den μ auf g gelegenen Punkten

*) Salmon-Fiedler, Geometrie d. Raumes 3. Aufl. Theil II, S. 615.

von Φ $\mu\alpha$ Punkte auf F; ebenso zu den m Punkten von F auf g $m\alpha'$ Punkte von Φ. Die Punkte x, y bilden zwei Curven C und Γ; die erste hat auf g m α'-fache Punkte und ist daher von der Ordnung $m\alpha'+e$; die zweite ist von der Ordnung $\mu\alpha' + e$; beide sind eindeutig auf einander bezogen. Man wähle nun eine zweite Gerade γ und suche die Zahl ζ sich selbst entsprechender Punkte auf den beiden Curven. Da in einer Ebene E' durch γ $m\alpha' + e$ Punkte von C liegen, denen ebenso viele Punkte auf Γ entsprechen, so beträgt die Zahl der Coincidenzen in dem durch γ gehenden Ebenenbüschel

$$m\alpha' + \mu\alpha + 2e.$$

Solche Coincidenzen entstehen, wenn ein Strahl (xy) gleichzeitig die Geraden g, γ schneidet, oder wenn beide Curven C, Γ sich in einem sich selbst entsprechenden Punkte schneiden. Da nun die genannten Strahlen eine Regelfläche von der Ordnung $e+\varepsilon$ bilden, so ergiebt sich

$$\zeta = \mu\alpha + m\alpha' + e - \varepsilon.$$

Im allgemeinen wird ζ gleich Null zu setzen sein, und demnach die *Ordnung des zu den entsprechenden Punkten gehörigen Strahlensystemes* gleich

$$\varepsilon = \mu\alpha + m\alpha' + e; \tag{1}$$

insbesondere wird also für zwei *eindeutig* auf einander bezogene Flächen

$$\varepsilon = m + \mu + e. \tag{2}$$

Die Formel (1) gilt auch dann noch im allgemeinen, wenn beide Flächen zusammenfallen; sie liefert für $\mu = m = 1$ die von Herrn Salmon a. a. O. gegebene Relation. Ist aber die Correspondenz zwischen den Punkten einer Fläche eine *symmetrische*, etwa so dass jedem Punkte x von F ein Punkt y derselben Fläche, und umgekehrt dem y auch wieder x entspricht, so dass x, y conjugirte Paare auf F bilden, so muss jene Formel durch eine andere ersetzt werden. Jede Gerade g giebt dann Veranlassung zur Erzeugung einer Curve C von der Ordnung $m + 2e$, und die Zahl der auf dem obigen Wege entstehenden Coincidenzen ist $2m + 4e$. Entfernt man von derselben die *zweifach* zählenden Coincidenzen, welche der oben betrachteten Regelfläche von der Ordnung $\varepsilon + e$ angehören, so wird

$$\zeta = 2m + 2e - 2\varepsilon; \tag{3}$$

mithin, wenn wieder $\zeta = 0$ angenommen wird,

$$\varepsilon = m + e. \tag{4}$$

Im folgenden soll nun der Fall betrachtet werden, *wo die beiden Flächen F, Φ durch vier biquaternäre Gleichungen*

$$f_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

von den Ordnungen m_i, n_i in den homogenen Variabelen x, y

$$(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4)$$

gegeben sind. Man hat dann (B, S. 359)*)

$$m = m_1 n_2 n_3 n_4 + m_2 n_1 n_3 n_4 + m_3 n_1 n_2 n_4 + m_4 n_1 n_2 n_3,$$
$$\mu = n_1 m_2 m_3 m_4 + n_2 m_1 m_3 m_4 + n_3 m_1 m_2 m_4 + n_4 m_1 m_2 m_3,$$
$$e = m_1 m_2 n_3 n_4 + m_1 m_3 n_2 n_4 + m_1 m_4 n_2 n_3$$
$$+ m_2 m_3 n_1 n_4 + m_2 m_4 n_1 n_3 + m_3 m_4 n_1 n_2,$$

Insbesondere hat man für die durch die Gleichungen

$$f_i = \sum y_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \sum y_i f_{ik} = 0$$

vermittelte Beziehung zwischen der Hesse'schen Fläche $H = 0$ und der Steiner'schen Fläche S der allgemeinen Fläche n. Ordnung $f = 0$ nach den eben angegebenen Gleichungen

$$m = 4(n-2),$$
$$\mu = 4(n-2)^3,$$
$$e = 6(n-2)^2,$$

also nach (2)

$$\varepsilon = 2(n-2)(2n^2-5n+4).$$

Für den besonderen Fall $n = 3$, wo H und S zusammenfallen, wird $e = 3$, mithin nach (4)

$$\varepsilon = 7,$$

wie dies auch Herr Sturm schon angegeben hat.**)

§ 2.

Die Brennfläche des Strahlensystemes, welche zu den Flächen F und Φ gehört.

Die Brennfläche des Strahlensystemes ist der Ort der Schnittpunkte unendlich benachbarter Strahlen. Ist (xy) ein Strahl des Systemes, so giebt es je zwei von x, resp. y ausgehende Fortschreitungsrichtungen dx, resp. dy auf den Flächen F und Φ, denen je ein (xy) in einem Punkte z der Brennfläche schneidender Strahl entspricht. Diese Richtungen bilden die Tangenten eines Systemes von Curven, welches die Kummer'schen Developpabelen des Strahlensystemes bestimmt; diese Curven mögen die *Hauptcurven der Flächen F, Φ in Beziehung auf das Strahlensystem* heissen. Zu jeder Tangente einer Hauptcurve *gehört* dann ein bestimmter Punkt der Brennfläche, nämlich der Schnittpunkt

*) In dieser Form soll meine, diese Annalen XXVII, erschienene Arbeit „*Zur Theorie der Steiner'schen Kernflächen*" citirt werden.

**) Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. S. 139, 145.

der correspondirenden Strahlen. Die Brennfläche selbst ist im allgemeinen *ein-zweideutig* auf die Flächen F, Φ bezogen. Aber für eine Reihe von Curven, die der Brennfläche als charakteristische angehören, wird die Beziehung zu einer *eindeutigen*. Diese einfache Bemerkung liefert eine Methode zur Bestimmung eines Theils der Singularitäten der Brennfläche, welche nicht allein in dem vorliegenden Falle, sondern auch bei jeder analogen Untersuchung über Strahlensysteme anwendbar ist.*)

So entspricht namentlich der ebenen Schnittcurve C der Brennfläche, d. h. den Punkten z, welche in einer Ebene liegen, ein mit derselben eindeutig verknüpftes aus den Punkten x, y gebildetes Curvenpaar C_f, C_φ**) auf den Flächen F, Φ, dessen Geschlecht mit dem von C übereinstimmt.

Andererseits sind die Ebenen, welche durch einen Strahl $(x\,y)$ und die beiden Tangenten der von x ausgehenden Hauptcurven gehen, Tangentenebenen der Brennfläche, deren Berührpunkte wieder zweideutig auf F oder Φ bezogen sind. Aber man sieht unmittelbar, dass die Berührungscurve Γ eines beliebigen Tangentenkegels in eindeutiger Beziehung steht zu zwei auf F und Φ gelegenen Curven Γ_f und Γ_φ, deren Geschlecht also mit dem Geschlechte des Tangentenkegels übereinstimmt.

Ich gehe nun zur speciellen Ausführung für den vorliegenden Fall über.

Ist

$$\varrho z_i = \nu x_i + \mu y_i, \tag{1}$$

ein Punkt der Brennfläche, so wird derselbe sich nicht ändern, wenn x, y die den Richtungen der Hauptcurven zugehörigen Zuwachse dx, dy erhalten. Es ist also

$$\frac{d\varrho}{\varrho}(\nu x_i + \mu y_i) = \nu\, dx_i + x_i d\nu + \mu\, dy_i + y_i d\mu. \tag{2}$$

Mit Hülfe der Gleichungen

$$f_k = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial f_k}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i\right) = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

welche, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = a_{ki}, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial y_i} = b_{ki}, \tag{3}$$

setzt, auch in der Form

---

*) Vgl. z. B. meine Arbeit in den Abh. der Münchener Academie, S. 247 u. ff.

**) Vgl. B. S. 364 ff.

$$\sum b_{ki} y_i = 0,$$

$$\sum a_{ki} dx_i + b_{ki} dy_i) = 0,$$

entsteht aus (2) durch Multiplication mit

$$\sum b_{ki} x_i = \sum (\nu b_{ki} - \mu a_{ki})\, dx_i.$$

vermöge der zwischen den homogenen Differen-

Gleichung

$$\sum k_i dx_i = 0,$$

sich die Bedingung

$$\begin{vmatrix} \nu b_{12} - \mu a_{12} & \nu b_{13} - \mu a_{13} & \nu b_{14} - \mu a_{14} \\ \nu b_{22} - \mu a_{22} & \nu b_{23} - \mu a_{23} & \nu b_{24} - \mu a_{24} \\ \nu b_{32} - \mu a_{32} & \nu b_{33} - \mu a_{33} & \nu b_{34} - \mu a_{34} \\ \nu b_{42} - \mu a_{42} & \nu b_{43} - \mu a_{43} & \nu b_{44} - \mu a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

derselben vermöge der Gleichungen (5) die Coefficienten von verschwinden, so erhält man die in μ, ν *quadratische* Gleichung

$$\Delta = A\nu^2 + 2B\mu\nu + C\mu^2 = 0,$$

deren Wurzeln die beiden auf dem Strahle (xy) liegenden Brennpunkte liefern, während die aus (6) zu entnehmenden Werthe dx_i die beiden Tangenten der von x ausgehenden Hauptcurven auf F bestimmen, welche mit ihren correspondirenden dy_i in je einer Tangentenebene der Brennfläche sich befinden.

Bezeichnet man die Unterdeterminanten von (7), etwa genommen nach der ersten *Horizontalreihe*, durch ξ_i', so ist

$$\sum \xi_i' (\nu b_{ki} - \mu a_{ki}) = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4, \tag{9}$$

und zugleich hat man, wenn durch σ ein unendlich kleiner Factor verstanden wird,

$$dx_i = x_i \left(\frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{d\nu}{\nu} \right) + \sigma \xi_i', \tag{10}$$

wie man durch Einsetzen in (6) unmittelbar bestätigt.

Eine *biquaternäre Form, welche die x, y in den Dimensionen p, q bezüglich* enthält, *mag als eine (p, q) bezeichnet werden.* Setzt man

$$\mathsf{M} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$
$$\mathsf{N} = n_1 + n_2 + n_3 + n_4,$$

so sind die Coefficienten A, B, C von Δ der Reihe nach vom Charakter

$(M-1, N-3)$, $(M-2, N-2)$, $(M-3, N-1)$. Wenn C verschwindet, so ist y selbst ein Punkt der Brennfläche, und die Tangentenebene von Φ in diesem Punkte ist zugleich Tangentenebene der Brennfläche in eben demselben. Die Ordnung der von diesen Punkten auf Φ gebildeten Curve ist

$$(M-1)e + (N-1)\mu.$$

Ebenso wird x ein Punkt der Brennfläche, wenn $A = 0$ ist; die Brennfläche berührt daher F längs einer Curve von der Ordnung

$$(M-1)m + (N-1)e.$$

Diese Eigenschaften der Brennfläche sind in einem allgemeinen Satze enthalten, den man etwa folgendermassen aussprechen kann.

Wird eine Brennfläche erzeugt durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier auf einander bezogener Flächen F und Φ, so berührt dieselbe die Fläche $F(\Phi)$ längs derjenigen Curve, für welche die Tangentenebene eines Punktes $x(y)$ von $F(\Phi)$ durch den correspondirenden Punkt $y(x)$ von $\Phi(F)$ geht; sie geht insbesondere durch die Pinchpunkte, sowie die etwa vorhandenen Rückkehrcurven der beiden Flächen.

Zur *Bestimmung der Ordnung der Brennfläche* hat man zu untersuchen, wie oft der Punkt z (1) auf der willkürlichen Geraden

$$\alpha_z = 0, \qquad \beta_z = 0,$$

liegt. Man erhält demnach

$$\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = 0,$$
$$\mu\alpha_y + \nu\alpha_x = 0.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth

$$\lambda = \frac{\mu}{\nu} = -\frac{\alpha_x}{\alpha_y}, \tag{11}$$

in (8) ein, so liefert die Zahl der Lösungen des Systemes

$$\Delta = 0,\ f_k = 0,\ \alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

aus welchen doppeltzählend das e Lösungen gebende System

$$f_k = 0,\ \alpha_x = 0,\ \beta_y = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4 \tag{12}$$

auszuscheiden ist, für die Ordnung der Brennfläche den Werth

$$(M-1)m + (N-1)\mu + (M+N-4)e.$$

Vermöge eines bekannten Theorems erhält man daraus für die *Classe der Brennfläche* die Zahl

$$(M-3)m + (N-3)\mu + (M+N-4)e.$$

Das Curvenpaar

$$f_k = 0,\ \Delta = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

welches entsteht, wenn aus Δ vermöge (11) μ und ν eliminirt werden,

[illegible] bemerkt, eindeutig auf die soeben untersuchte ebene [illegible] der Brennfläche bezogen. Da aber jede dieser beiden [illegible] Φ liegenden Curven zu Doppelpunkten die e dem Systeme [illegible] entsprechenden Punkte hat, so ist das *Geschlecht p der ebenen [illegible] der Brennfläche**) bestimmt durch die Gleichung

$$2p - 2 = m(M-1)(2M-5) + \mu(N-1)(2N-5) + e(4MN - 7(M+N) + 8).$$

Die Classe der Brennfläche lässt sich auch leicht direct bestimmen. Soll eine Tangentenebene derselben durch den willkürlichen Punkt $a(a_1, a_2, a_3, a_4)$ gehen, so muss

$$dx_i = p\,a_i + q\,x_i + r\,y_i,$$
$$dy_i = p'a_i + q'x_i + r'y_i,$$

sein. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (5) ein, so entsteht

$$p\sum a_{ki}a_i + q\sum a_{ki}y_i + p'\sum b_{ki}a_i + q'\sum b_{ki}x_i = 0;$$

mithin, wenn man die p, r, p', q' eliminirt, die Bedingung

$$(13) \qquad \Pi = \begin{vmatrix} \sum a_{1i}a_i & \sum b_{1i}a_i & \sum a_{1i}y_i & \sum b_{1i}x_i \\ \sum a_{2i}a_i & \sum b_{2i}a_i & \sum a_{2i}y_i & \sum b_{2i}x_i \\ \sum a_{3i}a_i & \sum b_{3i}a_i & \sum a_{3i}y_i & \sum b_{3i}x_i \\ \sum a_{4i}a_i & \sum b_{4i}a_i & \sum a_{4i}y_i & \sum b_{4i}x_i \end{vmatrix} = 0,$$

und die Gleichung der genannten Tangentenebene selbst wird

$$(14) \qquad \sum z_i\eta_i = 0,$$

wenn man mit η_i die Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{Vmatrix}$$

bezeichnet. Andererseits stellt die Gleichung (13), wenn man die a_i als variable Coordinaten betrachtet, das *Product der beiden Tangentenebenen der Brennfläche dar*, welche zu dem Strahle $(x\,y)$ gehören.

Aus der Form (13) ergiebt sich zunächst das *Verhalten der Brennfläche in einem Pinchpunkte* von F oder Φ. Für einen Pinchpunkt von Φ ist nämlich

*) [illegible] Vgl. B. S. 366.

(15) $$a_{ik} = r_i p_k + s_i q_k,$$

also nach (5)

$$0 = r_x p_k + s_x q_k,$$

mithin, da die p_k den q_k im allgemeinen nicht proportional sein werden,

$$r_x = 0, \qquad s_x = 0.$$

Da ferner nach (5)

(16) $$\sum b_{ki}\, dy_i + p_k \sum r_i\, dx_i + q_k \sum s_i dx_i = 0,$$

sein muss, so wird zu dem zu x unendlich benachbarten Punkte auf F, welcher auf der Geraden g liegt, deren Gleichung

$$r_s = 0, \qquad s_s = 0,$$

ist, wieder der Punkt y gehören. Setzt man die Werthe (15) in (13) ein, so zerfällt Π in zwei Factoren, von denen der erste

$$a_r s_y - a_s r_y = 0,$$

eine durch die Punkte x, y und die Gerade g gehende Ebene vorstellt. Der zweite Factor ist

$$\left| p_k,\ q_k, \sum b_{ki} a_i, \sum b_{ki} x_i \right|,$$

wenn von der Determinante nur eine Horizontalreihe hingeschrieben wird. Setzt man

$$p_s = 0, \quad q_s = 0, \quad \sum b_{ki} x_i z_k = 0,$$

so liefert derselbe, in der Form

(17) $$\sum a_i z_k b_{ki} = 0,$$

geschrieben, die *Gleichung der Tangentenebene der Brennfläche im Pinchpunkte y*. Setzt man überhaupt

(18) $$p_s' = 0, \quad q_s' = 0,$$

so wird nach (16) die Tangentenebene von Φ im Pinchpunkte durch die Gleichung gegeben

$$\sum b_{ki} a_i (z_k + \varrho z_k') = 0.$$

Diese Ebenen bilden daher ein Büschel, dessen Axe die für den Pinchpunkt charakteristische Gerade γ (18) ist, in welchem insbesondere auch die Tangentenebene (17) der Brennfläche enthalten ist. Man hat also folgendes Resultat:

Entspricht dem Punkte x von F ein Pinchpunkt y von Φ, so geht die eine Brennebene durch die dem Pinchpunkte zugeordnete Tangente g von F und berührt die Brennfläche in einem von x, y verschiedenen Punkte der Geraden (x y); die andere Brennebene dagegen berührt im Pinchpunkte und enthält die charakteristische Gerade γ desselben.

Einer Reihe von Pinchpunkten, welche eine Rückkehrcurve auf Φ bilden, entspricht eine Curve auf F, zu deren Punkten die Tangenten g in gewissem Sinne gehören, während die Geraden γ in die Tangenten der Rückkehrcurve selbst übergehen.*) Die eine Brennebene enthält daher stets die Richtung g, die andere, welche die Brennfläche im Rückkehrpunkte von Φ berührt, geht durch die Tangente der Rückkehrcurve, ohne daselbst mit der Rückkehrtangentenebene von Φ im allgemeinen zusammenzufallen.

Zur *Bestimmung der Classe der Brennfläche* hat man die Zahl ihrer Tangentenebenen durch zwei willkürliche Punkte a, b zu ermitteln. Das nach (13) und (14) hierzu gehörige System von Gleichungen

$$\Pi = 0, \quad \sum b_i \eta_i = 0, \quad f_k = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

hat

$$(M-1)m + (N-1)\mu + (M+N-2)e$$

Lösungen. Da aber Π quadratisch verschwindet so oft die η sämmtlich verschwinden, was dem Falle wo die x, y, a in einer Geraden liegen, oder der Ordnung des Strahlensystemes entspricht, so ist die eben gefundene Zahl um $2(m+\mu+e)$ zu vermindern, in Uebereinstimmung mit dem früher gefundenen Werthe.

Betrachtet man in Π die a_i als Constanten, so bestimmen die Gleichungen

$$\Pi = 0, \quad f_k = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

ein Curvenpaar, welches eindeutig auf die Berührungscurve des Tangentenkegels der Brennfläche mit der Spitze a bezogen ist. *Man erhält demgemäss für das Geschlecht π des Tangentenkegels der Brennfläche***)

$$\begin{aligned} 2\pi - 2 = {} & m(M-1)(2M-5) + \mu(N-1)(2N-5) \\ & + e(4MN - 7(M+N) + 10) - 2(m+\mu+e), \end{aligned}$$

wenn man das eben erwähnte Verhalten von Π berücksichtigt, welches zu $m + \mu + e$ Doppelpunkten jener Curven Veranlassung giebt.

Es erübrigt jetzt nur noch die *Bestimmung des Ranges der Brennfläche*, wenn es sich um eine vollständige Ermittelung der Singularitäten der ebenen Schnittcurve und des Tangentenkegels handelt. Hierzu führen die folgenden Betrachtungen.

Denkt man sich in den Gleichungen (1) μ, ν durch ihre aus (8) folgenden Werthe ersetzt, so liefert die Differentiation von (1) für die dem Fortschreiten auf der Brennfläche entsprechenden Differentiale dz_i

$$\varrho\, dz_i + z_i d\varrho = \nu\, dx_i + \mu\, dy_i + x_i d\nu + y_i d\mu.$$

---

*) Vgl. B. S. 361.

**) Vgl. B. S. 366.

Multiplicirt man mit den

$$a_{ki},\quad b_{ki},$$

und summirt nach i, so erhält man die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
&\varrho\sum a_{ki}\,dz_i+\left(\frac{d\varrho}{\varrho}\mu-d\mu\right)\sum a_{ki}y_i= \sum(\mu a_{ki}-\nu b_{ki})\,dy_i,\\
&\varrho\sum b_{ki}\,dz_i+\left(\frac{d\varrho}{\varrho}\nu-d\nu\right)\sum b_{ki}x_i=-\sum(\mu a_{ki}-\nu b_{ki})\,dx_i.
\end{aligned}\tag{19}$$

Setzt man

$$\sum\zeta_k(\nu b_{ki}-\mu a_{ki})=0,\tag{20}$$

so dass also die ζ_k etwa die nach der ersten *Verticalreihe* von (7) genommenen Unterdeterminanten sind, so ergiebt sich aus (19)

$$\begin{aligned}
&\varrho\sum a_{ki}\zeta_k\,dz_i+\left(\frac{d\varrho}{\varrho}\mu-d\mu\right)\sum\zeta_k y_i a_{ki}=0,\\
&\varrho\sum b_{ki}\zeta_k\,dz_i+\left(\frac{d\varrho}{\varrho}\nu-d\nu\right)\sum\zeta_k x_i b_{ki}=0,
\end{aligned}\tag{21}$$

während aus (20) nach (5) folgt:

$$\begin{aligned}
&\nu\sum b_{ki}\zeta_k x_i=0,\\
&\mu\sum a_{ki}\zeta_k y_i=0.
\end{aligned}\tag{22}$$

Die *Gleichung der Tangentenebene der Brennfläche im Punkte* (1) *ist also im allgemeinen in den beiden gleichberechtigten Formen*

$$\begin{aligned}
&\sum\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\zeta_k Y_i=\sum b_{ki}\zeta_k Y_i=0,\\
&\sum\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\zeta_k Y_i=\sum a_{ki}\zeta_k Y_i=0,
\end{aligned}\tag{23}$$

darstellbar, wenn die Y_i laufende Coordinaten bezeichnen. Ist jedoch z. B. $\mu=0$, so bleibt nur die zweite Form bestehen.

Den beiden Wurzeln $\frac{\mu}{\nu}$ von (8) entsprechend, welche λ und λ' heissen mögen, hat man zwei Systeme von Werthen ζ_i, welche bezüglich durch ζ_i und Z_i bezeichnet seien; ebenso mögen die correspondirenden Werthe der ζ_i' und Z_i' unterschieden werden. Es ist dann nach (9) und (20)

$$\begin{aligned}
&\sum(b_{ki}-\lambda\,a_{ki})\zeta_i'=0,\\
&\sum(b_{ki}-\lambda' a_{ki})Z_i'=0,\\
&\sum(b_{ki}-\lambda\,a_{ki})\zeta_k=0,\\
&\sum(b_{ki}-\lambda' a_{ki})Z_k=0,
\end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\text{(22a)} \qquad \begin{aligned} \sum b_{ki} Z_i' \xi_k = 0, \quad \sum b_{ki} Z_k \xi_i' = 0, \\ \sum a_{ki} Z_i' \xi_k = 0, \quad \sum a_{ki} Z_k \xi_i' = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen das bekannte Verhalten repräsentiren, nach dem die Tangentenebene der Brennfläche in demjenigen Punkte, welcher zu der Tangente einer Hauptcurve *gehört*, durch die Tangente der *anderen* von demselben Punkte ausgehenden Hauptcurve geht.

Ich wende mich nun zur *Untersuchung der Ordnung des Tangentenkegels mit der Spitze a*. Die Bedingung, dass die Tangentenebene im Punkte $s(1)$, deren Gleichung (23) ist, durch den Punkt a_i gehe, ist

$$\text{(24)} \qquad \sum a_i b_{ki} \xi_k = 0.$$

Damit nun der Punkt

$$a_i + \nu x_i + \mu y_i,$$

welcher die von s ausgehende Kante jenes Kegels darstellt, auf der willkürlichen Geraden

$$\alpha_s = 0, \quad \beta_s = 0,$$

liege, hat man zu setzen

$$\text{(25)} \qquad \nu(\alpha_x a_\beta - \beta_x a_\alpha) + \mu(\alpha_y a_\beta - \beta_y a_\alpha) = 0.$$

Der hieraus folgende Werth von $\frac{\mu}{\nu}$ ist in Δ einzusetzen, welches dadurch eine $(M-1, N-1)$ wird. Aber auch die Form (24) enthält $\frac{\mu}{\nu}$ nur *quadratisch*, wie man leicht erkennt, wenn man die in (20) definirten Unterdeterminanten ξ_k einsetzt. Es ist demnach (24) von der Form

$$A'\nu^2 + 2\mu\nu B' + C'\mu^2 = 0,$$

und wird ebenfalls eine $(M-1, N-1)$. Die Zahl der Lösungen beträgt daher zunächst

$$\text{(26)} \qquad m(M-1)^2 + \mu(N-1)^2 + 2e(M-1)(N-1) - 4e.$$

Von diesen sind aber alle diejenigen zu entfernen, für welche die ξ_k gleichzeitig verschwinden, falls gleichzeitig auch Δ verschwindet, da diese Lösungen von den a_i ganz unabhängig sind. Nun verschwinden die ξ_k sämmtlich für $y_1 = 0$ und $\mu = 0$, sowie für $x_1 = 0$ und $\nu = 0$. Aber für diese Werthe verschwindet Δ *nicht*. Von den Lösungen, für welche *alle* ξ_k Null sind, sind demnach die der beiden Systeme

$$\begin{aligned} y_1 = 0, \quad \mu = 0, \quad f_k = 0; \\ x_1 = 0, \quad \nu = 0, \quad f_k = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

in Abzug zu bringen, deren Zahl nach (25) gleich $2e$ ist.

Es bleiben nun noch diejenigen Lösungen zu bestimmen, für welche, wenn

$$M = \begin{vmatrix} \nu b_{12} - \mu a_{12} & \nu b_{22} - \mu a_{22} & \nu b_{32} - \mu a_{32} & \nu b_{42} - \mu a_{42} \\ \nu b_{13} - \mu a_{13} & \nu b_{23} - \mu a_{23} & \nu b_{33} - \mu a_{33} & \nu b_{43} - \mu a_{43} \\ \nu b_{14} - \mu a_{14} & \nu b_{24} - \mu a_{24} & \nu b_{34} - \mu a_{34} & \nu b_{44} - \mu a_{44} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix},$$

der Differentialquotient

$$\frac{\partial M}{\partial a_i}$$

gleich Null wird, für $i = 1, 2, 3, 4$.

Nun sind

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \alpha_2} = 0,$$

zwei Gleichungen von der Form

$$(\mathsf{M} - m_1,\ \mathsf{N} - n_1),\quad (\mathsf{M} - m_2,\ \mathsf{N} - n_2),$$

von deren Lösungszahl

(a) $$m(\mathsf{M} - m_1)(\mathsf{M} - m_2) + r(\mathsf{N} - n_1)(\mathsf{N} - n_2) + e[(\mathsf{M} - m_1)(\mathsf{N} - n_2) + (\mathsf{M} - m_2)(\mathsf{N} - n_1)]$$

aber $9e$ auszuscheiden ist. Von (a) ist dann zu entfernen die Zahl derjenigen Lösungen, für die die beiden nach den Indices 3 und 4 genommenen Differentialquotienten von M nicht verschwinden, d. h. diejenigen, für welche die Determinante

$$N = \begin{vmatrix} \nu b_{32} - \mu a_{32} & \nu b_{33} - \mu a_{33} & \nu b_{34} - \mu a_{34} \\ \nu b_{42} - \mu a_{42} & \nu b_{43} - \mu a_{43} & \nu b_{44} - \mu a_{44} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

bei beliebigen Werthen der β verschwindet. Nun liefern die Gleichungen

$$\frac{\partial N}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \beta_2} = 0,$$

zwei Gleichungen von der Form

$$(m_3 + m_4,\ n_3 + n_4),$$

also die Zahl

(b) $$m(m_3 + m_4)^2 + \mu(n_3 + n_4)^2 + 2e(n_3 + n_4)(n_3 + m_4),$$

von der wieder $4e$ auszuscheiden ist.

Da aber auch $\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial \beta_3}$ verschwinden muss, hat man noch die dem Systeme

$$\nu b_{34} - \mu a_{34} = 0, \quad \nu b_{44} - \mu a_{44} = 0,$$

angehörigen Lösungen von der Zahl

(c) $$m m_3 m_4 + \mu n_3 n_4 + e(m_3 n_4 + m_4 n_3)$$

aus (b) zu entfernen, falls vorher wieder e Lösungen ausgeschieden

sind. Die Anzahl der insgesammt in (26) zum Abzug zu bringenden Lösungen beträgt also

$$(a) - 9e - [(b) - 4e] + (c) - e - 2e$$

oder

$$m\mathsf{M}_2 + \mu\mathsf{N}_2 + e(\mathsf{MN} - \mathsf{T} - 8),$$

wenn man zur Abkürzung*) setzt.

$$\mathsf{M}_2 = m_1m_2 + m_1m_3 + m_1m_4 + m_2m_3 + m_2m_4 + m_3m_4,$$
$$\mathsf{N}_2 = n_1n_2 + n_1n_3 + n_1n_4 + n_2n_3 + n_2n_4 + n_3n_4,$$
$$\mathsf{T} = m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 + m_4n_4$$

Daraus ergiebt sich der *Rang der Brennfläche* gleich

$$R = m((\mathsf{M}-1)^2 - \mathsf{M}_2) + \mu((\mathsf{N}-1)^2 - \mathsf{N}_2) + e(\mathsf{MN} - 2(\mathsf{M}+\mathsf{N}) + \mathsf{T} + 6).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$U = (\mathsf{M}-1)m + (\mathsf{N}-1)\mu + (\mathsf{M}+\mathsf{N}-4)e,$$
$$S = m(\mathsf{M}-1)(2\mathsf{M}-5) + \mu(\mathsf{N}-1)(2\mathsf{N}-5) + e(4\mathsf{MN} - 7(\mathsf{M}+\mathsf{N}) + 10),$$

so ergeben sich für die charakteristischen Zahlen der Brennfläche folgende Werthe:

Geschlecht des ebenen Schnittes $p = \frac{1}{2}S - e + 1,$

Geschlecht des Tangentenkegels $\pi = \frac{1}{2}S - (m+\mu+e) + 1,$

Ordnung der Brennfläche $= U,$

Classe derselben $= U - 2(m+\mu),$

Ordnung der Rückkehrcurve $= 2U + S - 2e - R,$

Zahl der Inflexionspunkte des ebenen Schnittes
Zahl der Rückkehrkanten des Tangentenkegels
$= 2R + S - 2e - U$**),

Classe der parabolischen Ebenen $= 2U - S + R - 2(e + 3(m+\mu)),$

Ordnung der parabolischen Curve $= 5R - 6U - S + 2e,$

Classe der Rückkehrtangentenebenen $= 3R - 2U + S + 2(m+\mu-e),$

Anzahl der Pinchpunkte $= 0;$

die zuletzt angegebene Zahl ist unmittelbar daraus zu ersehen, dass *zwei* Bedingungen erforderlich sind, wenn in einem Punkte der Doppelcurve der Brennfläche die beiden Tangentialebenen zusammenfallen sollen.

---

*) Vgl. B. S. 364.

**) Auch in vielen anderen Fällen sind diese beiden Zahlen gleich, Abh. d. Münchener Academie, XVI, S. 254; einen allgemeineren Grund für diese Uebereinstimmung sehe ich zur Zeit nicht.

§ III.

Ueber die Rückkehr und parabolische Curve der Brennfläche.

Ein Punkt der *Rückkehrcurve der Brennfläche* ist dadurch charakterisirt, dass sich in ihm drei unendlich benachbarte Strahlen des Systems treffen. Die Bedingung für das Auftreten dieser Configuration lässt sich in folgender Weise analytisch darstellen.

Setzt man, wie in § 2)

$$\varrho z_i = \nu x_i + \mu y_i, \tag{1}$$

so bleibt, falls z ein Punkt der Rückkehrcurve ist, derselbe ungeändert, wenn man zu zwei benachbarten Strahlen des Systems fortschreitet, deren Fusspunkte $x + dx$, $y + dy$; $x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$ auf den beiden Flächen sind. Mithin ist

$$d\varrho z_i = \nu dx_i + \mu dy_i + x_i d\nu + y_i d\mu, \tag{2}$$

$$d^2\varrho z_i = \nu d^2x_i + \mu d^2y_i + 2d\nu dx_i + 2d\mu dy_i + x_i d^2\nu + y_i d^2\mu, \tag{3}$$

während die Differentiale den Gleichungen

$$\sum a_{ki} dx_i + \sum b_{ki} dy_i = 0, \tag{4}$$

$$\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_l} dx_i dx_l + 2\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_l} dx_i dy_l + \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_l} dy_i dy + \sum a_{ki} d^2x_i + \sum b_{ki} d^2y_i = 0, \tag{5}$$

zu unterwerfen sind.

Multiplicirt man die Gleichungen (3) mit den b_{ki} und summirt über $i = 1, 2, 3, 4$, so entsteht

$$d^2\varrho \sum z_i b_{ki} = \sum (\nu b_{ki} - \mu a_{ki})\, d^2x_i + 2d\mu \sum b_{ki} dy_i + 2d\nu \sum a_{ki} dx_i + d^2\nu \sum x_i b_{ki} - \mu D_k, \tag{6}$$

wo

$$D_k = \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_l} dx_i dx_l + 2\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_l} dx_i dy_l + \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_l} dy_i dy_l, \tag{7}$$

gesetzt ist. Da nun nach (1) und (2)

$$\varrho \sum z_i b_{ki} = \nu \sum b_{ki} x_i,$$

$$\mu dy_i = d\varrho z_i - \nu dx_i - x_i d\nu - y_i d\mu,$$

zu setzen ist, so wird aus (6), wenn man die dy_i rechter Hand entfernt

$$\left[\nu \frac{d^2\varrho}{\varrho} - d^2\nu - 2\frac{d\mu}{\mu}\left(\frac{d\varrho}{\varrho}\nu - d\nu\right)\right] \sum b_{ki} x_i = \sum (\nu b_{ki} - \mu a_{ki}) d^2x_i + 2\left(d\nu - \nu\frac{d\mu}{\mu}\right) \sum b_{ki} dx_i - \mu D_k.$$

Aus diesen Gleichungen eliminirt man die zweiten Differentiale dadurch, dass man mit den in § II, (20) definirten Grössen ζ_k multiplicirt und über k summirt. Es ergiebt sich auf diesem Wege, unter Beachtung von § II, (22) die Bedingung

$$\mu^2 \sum \zeta_k D_k + 2(\nu d\mu - \mu d\nu) \sum b_{ki} \zeta_k dx_i = 0. \tag{8}$$

Um diese letztere nunmehr auch von den ersten Differentialen zu befreien, setze man nach § II, (9)

$$dx_i = \varkappa x_i + \sigma \zeta_i', \tag{9}$$

wobei

$$\varkappa = \frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{d\nu}{\nu}.$$

Aus den Gleichungen (2) erhält man für die correspondirenden Werthe der dy_i, wenn

$$\tau = \frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{d\mu}{\mu}.$$

gesetzt wird

$$dy_i = \tau y_i - \frac{\nu\sigma}{\mu} \zeta_i'. \tag{10}$$

Führt man die in (9) und (10) gegebenen Werthe in D_k ein, so ergiebt sich vermöge der Gleichungen

$$\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_l} x_i x_l = \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_l} x_i y_l = \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_l} y_i y_l = 0,$$

$$\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_l} x_l = (m_k - 1) a_{ki}, \quad \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_l} y_l = (n_k - 1) b_{ki},$$

$$\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_l} y_l = n_k a_{ki}, \quad \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial x_l} x_l = m_k b_{ki},$$

und durch wiederholte Anwendung von § II, (9)

$$\mu^2 D_k = 2\sigma(\mu d\nu - \nu d\mu) \sum (b_{ki} \zeta_i') + \sigma^2 A_k, \tag{11}$$

wenn

$$A_k = \sum \zeta_i' \zeta_l' \left(\mu^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_l} - 2\mu\nu \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial x_l} + \nu^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_l} \right). \tag{12}$$

Da ferner

$$\sum b_{ki} dx_i = \varkappa \sum b_{ki} x_i + \sigma \sum b_{ki} \zeta_i',$$

so erhält die Bedingung (8) *für das Auftreten eines Rückkehrpunktes der Brennfläche die Form*

$$\sum A_k \xi_k = \sum \xi_k \zeta_i' \zeta_l' \left(\mu^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_l} - 2\mu\nu \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_l} + \nu^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_l} \right) = 0, \tag{13}$$

und gleichzeitig werden die zwischen den Differentialen d^2x_i bestehenden Bedingungen dargestellt durch das System

$$(14)\qquad \sum d^2x_i(\nu b_{ki} - \mu a_{ki}) - \sigma^2 A_k$$
$$= \Big[\nu\mu\Big(\frac{d^2\varrho}{\varrho} - \frac{d^2\nu}{\nu}\Big) + 2\mu\, d\nu\Big(\frac{d\nu}{\nu} - \frac{d\varrho}{\varrho}\Big)\Big]\sum b_{ki}x_i.$$
$$k = 1, 2, 3, 4.$$

Durch eine der Form (13) ähnliche Relation kann man die *parabolischen Ebenen der Brennfläche* charakterisiren. Eine parabolische Ebene der Brennfläche entsteht, wenn drei benachbarte Strahlen, d. h. die Punkte

$$x,\quad y,$$
$$x + dx,\quad y + dy,$$
$$x + 2dx + d^2x,\quad y + 2dy + d^2y,$$

in ein und derselben Ebene liegen. Setzt man demgemäss

$$d^2x_i = \alpha\, x_i + \beta\, y_i + \gamma\, \zeta_i',$$
$$d^2y_i = \alpha'\, x_i + \beta'\, y_i + \gamma'\, \zeta_i',$$

so wird

$$-D_k = \sum a_{ki}d^2x_i + \sum b_{ki}d^2y_i = \beta\sum a_{ki}y_i + \gamma\sum a_{ki}\zeta_i'$$
$$+\alpha'\sum b_{ki}x_i + \gamma'\sum b_{ki}\zeta_i',$$

oder

$$D_k + \alpha'\sum b_{ki}x_i + \beta\sum a_{ki}y_i + \Big(\gamma + \frac{\mu}{\nu}\gamma'\Big)\sum a_{ki}\zeta_i' = 0.$$

Durch Elimination der α', β, γ, γ' entsteht, wenn man den in (11) gegebenen Werth von D_k einsetzt, *für das Auftreten parabolischer Ebenen die Bedingung*

$$(15a)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & \sum b_{1i}x_i & \sum a_{1i}y_i & \sum a_{1i}\zeta_i' \\ A_2 & \sum b_{2i}x_i & \sum a_{2i}y_i & \sum a_{2i}\zeta_i' \\ A_3 & \sum b_{3i}x_i & \sum a_{3i}y_i & \sum a_{3i}\zeta_i' \\ A_4 & \sum b_{4i}x_i & \sum a_{4i}y_i & \sum a_{4i}\zeta_i' \end{vmatrix} = 0,$$

welche man, den Gleichungen II, (22), (22a)

$$\sum b_{ki}Z_kx_i = 0,$$
$$\sum a_{ki}Z_ky_i = 0,$$
$$\sum a_{ki}Z_k\zeta_i' = 0,$$

zufolge, auch in der zu (13) analogen Form

$$\sum A_k Z_k = 0, \tag{15}$$

schreiben kann.

Sind die beiden Gleichungen (13) und (15) gleichzeitig erfüllt, so ist die Richtung, zu der ein Punkt der Rückkehrcurve gehört, zugleich die einer parabolischen Ebene. Multiplicirt man aber in (15a) die Horizontalreihen mit den ξ_k und addirt, so folgt, unter der Voraussetzung dass (13) erfüllt ist

$$\sum \xi_k \xi_i' f_{ik} = 0.$$

Das erfordert, dass die Discriminante von Δ verschwindet. Daher sind die Punkte, in denen die $\Delta = 0$ entsprechende Curve vierpunktiger Berührung der Rückkehrcurve begegnet — sie berührt sie in diesen Stellen — zugleich Punkte der parabolischen Curve, d. h. *solche, in denen drei benachbarte Strahlen gleichzeitig durch einen Punkt gehen und in einer Ebene liegen.*

Abgesehen von diesem Falle verschwinden (13) und (15) auch dann, wenn die Matrix

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \sum x_i b_{1i} & \sum x_i b_{2i} & \sum x_i b_{3i} & \sum x_i b_{4i} \\ \sum y_i a_{1i} & \sum y_i a_{2i} & \sum y_i a_{3i} & \sum y_i a_{4i} \end{Vmatrix}$$

verschwindet; der parabolische Punkt fällt aber dann nicht mit dem Rückkehrpunkte zusammen, obgleich auch hier drei benachbarte Strahlen einem ebenen Büschel angehören. Dagegen wird der parabolische Punkt mit dem Rückkehrpunkte zusammenfallen, wenn neben der Gleichung (13) auch diejenige erfüllt ist, welche nach Analogie von (15) das Vorhandensein von drei benachbarten Strahlen in der anderen Focalebene ausdrückt.

Man kann die beiden Gleichungen (13), (15) auch erhalten, wenn man die Bedingung aufstellt, unter der die beiden Haupttangenten in einem Punkte s der Brennfläche zusammenfallen. Es ergiebt sich dann eine Gleichung, welche in zwei Factoren zerlegt werden kann, von denen der eine mit (13) übereinstimmt, während der andere die Gleichung (15) in einer zunächst viel complicirteren Form liefert, die man durch geeignete Umformungen indess in (15) überführen kann.

Die beiden Gleichungen (13) und (15) lassen sich benutzen, um die Ordnung der Rückkehr und parabolischen Curve durch eine directe Abzählung zu bestimmen. Eine solche wird insbesondere dann wünschenswerth, wenn der Satz von der Erhaltung des Geschlechtes nicht mehr in der früher vorausgesetzten Form zu Grunde gelegt werden kann.

Ausgeführt werden mag eine solche Abzählung hier nur in Bezug auf die Ordnung der Rückkehrcurve.

Man hat dann mit (13) die Gleichungen II, (8) und (11) zu verbinden. Setzt man nun

$$\nu b_{ki} - \mu a_{ki} = \alpha_{ki},$$

und bezeichnet die Unterdeterminanten der Determinante der α_{ki} durch A_{ki}, die der a_{ki}, b_{ki} durch A_{ki}, B_{ki}, so hat man für Δ

$$\Delta = -\nu^2 \sum a_{ik} B_{ik} + \cdots - \mu^2 \sum b_{ik} A_{ik},$$

während die Producte $\xi_k \xi_i'$ gegeben sind durch

$$\xi_k \xi_i' \equiv \mathsf{A}_{ki}.$$

Trägt man diese Werthe in (13) ein, so entsteht an Stelle dieser Gleichung

$$U = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \mathsf{T}_1 & \mathsf{T}_2 & \mathsf{T}_3 & \mathsf{T}_4 \end{vmatrix} = 0,$$

wo

$$\mathsf{T}_i = \sum \mathsf{A}_{ki} \left(\mu^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_i} - 2\mu\nu \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_i} + \nu^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_i} \right).$$

Die Form U enthält die μ, ν in der 8. Dimension. Multiplicirt man aber in derselben die Elemente mit den x_1, x_2, x_3, x_4 und addirt horizontal, so erkennt man leicht, dass das Glied mit μ^8 verschwindet. Denn es ist

$$\sum \mathsf{T}_i x_i = -\mu\nu \sum \mathsf{A}_{ki} b_{ki} (1 + m_k) + \nu^2 \sum \mathsf{A}_{ki} x_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_i}.$$

Da dieselbe Bemerkung auch für y gilt, so ist U eine Form, welche nach Entfernung des Factors $\mu\nu$ von der 6. Dimension in μ, ν ist und bei welcher, wie eine weitere Ueberlegung zeigt, *die Coefficienten von μ^6, ν^6 als Factor zugleich die Coefficienten von μ^2, ν^2 in Δ enthalten;* sie ist daher wenn

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\alpha_x}{\alpha_y},$$

gesetzt wird, vom Charakter

$$(\mathsf{M} - 1 + m_2 + m_3 + m_4,\ \ \mathsf{N} - 1 + n_2 + n_3 + n_4);$$

und die Zahl der Lösungen des Systemes $U = 0$, $\Delta = 0$, $f_k = 0$, beträgt zunächst

$$(\alpha)\ \ ((\mathsf{M}-1)^2 + (m_2+m_3+m_4)(\mathsf{M}-1))\, m$$
$$+ ((\mathsf{N}-1)^2 + (\mathsf{N}-1)(n_2+n_3+n_4))\, \mu$$
$$+ e[2(\mathsf{M}-1)(\mathsf{N}-1) + (\mathsf{M}-1)(n_2+n_3+n_4) + (\mathsf{N}-1)(m_2+m_3+m_4) - 12].$$

Aber von diesen sind die den beiden Systemen

$$\sum a_{ik} B_{ik} = 0, \quad a_y = 0, \quad f_k = 0,$$

$$\sum b_{ik} A_{ik} = 0, \quad a_x = 0, \quad f_k = 0,$$

entsprechenden

$$(\beta) \qquad (M-1)m + (N-3)e + (N-1)\mu + (M-3)e$$

Lösungen zu entfernen. Ferner sind alle diejenigen zu beseitigen, für welche die sämmtlichen aus den drei ersten Horizontalreihen von U gebildeten Unterdeterminanten *zugleich* mit Δ verschwinden. Hierbei ist zu bemerken, dass die Determinante

$$P_y = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix},$$

den Factor c_y hat. Von diesem befreit hat man also eine Form

$$\frac{P_y}{c_y},$$

vom Charakter

$$(m_2+m_3+m_4, \quad n_2+n_3+n_4-4)$$

mit welcher für $\mu = 0$ zugleich alle jene Unterdeterminanten verschwinden, *ohne* dass Δ gleich Null wird.

Eine ähnliche Bemerkung findet statt für die analoge Form P_x. Es ist daher von den in gewöhnlicher Weise zu ermittelnden Lösungen des Systems jener verschwindenden Unterdeterminanten noch die Zahl

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} &m(m_2+m_3+m_4)+\mu(n_2+n_3+n_4) \\ &+e(n_2+n_3+n_4+m_2+m_3+m_4-8), \end{aligned}$$

zu entfernen. Die Untersuchung des ebengenannten Systemes selbst liefert nun die Anzahlen

$$(\delta) \quad \begin{aligned} &(m_2+m_3+m_4)^2 m+(n_2+n_3+n_4)^2\mu \\ &+2(n_2+n_3+n_4)(m_2+m_3+m_4)e-9e, \end{aligned}$$

$$(\varepsilon) \quad \begin{aligned} &(m_2+m_3)(m_2+m_4)m+(n_2+n_3)(n_2+n_4)\mu \\ &+[(n_2+n_4)(m_2+m_3)+(n_2+n_3)(m_2+m_4)]e-4e, \end{aligned}$$

$$(\eta) \quad m_2^2 m+n_2^2\mu+2m_2n_2e-e,$$

und die Ordnung der Rückkehrcurve selbst wird gleich

$$(\alpha)-(\beta)+(\gamma)-(\delta)+(\varepsilon)-(\eta),$$

welcher Werth mit dem früher gegebenen, wie die Ausreehnung zeigt, übereinstimmt.

Eliminirt man aus den Formeln (13) und (15) mittelst der Gleichung II. (8) die μ, ν, so erhält man die Gleichungen eines auf die Rückkehr- resp. parabolische Curve eindeutig bezogenen Curvenpaares, durch welches jene Curven geradezu auf $F(\Phi)$ abgebildet und mit Hülfe dieser Abbildung weiter untersucht werden können. Die Spitzen der Rückkehrcurve, resp. die stationären parabolischen Ebenen entstehen dadurch, dass eines dieser Bilder die vermöge der Entstehung der auf der Brennfläche liegenden singulären Curven zugeordnete Richtung einer Hauptcurve berührt. Andererseits sind die *Spitzen der Rückkehrcurve* dadurch charakterisirt, dass sich in ihnen *vier* unendlich nahe Strahlen des Systemes schneiden. Die Bedingungen für das Auftreten dieser Configuration — und in analoger Weise lassen sich auch die stationären parabolischen Ebenen behandeln — können in folgender Weise analytisch ausgedrückt werden.

Setzt man wieder

$$\varrho z_i = x_i + \mu y_i,$$

so sind jene Bedingungen ausgesprochen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} d\varrho z_i &= dx_i + \mu dy_i + y_i d\mu, \\ d^2\varrho z_i &= d^2x_i + \mu d^2y_i + 2dy_i d\mu + y_i d^2\mu, \\ d^3\varrho z_i &= d^3x_i + \mu d^3y_i + 3d\mu d^2y_i + 3dy_i d^2\mu + y_i d^3\mu, \end{aligned} \tag{16}$$

zu denen die weiteren durch Differentiation der $f_k = 0$ entstehenden

$$\begin{aligned} \sum a_{ki} dx_i + \sum b_{ki} dy_i &= 0, \\ \sum a_{ki} d^2x_i + \sum b_{ki} d^2y_i + D_k &= 0, \\ \sum a_{ki} d^3x_i + \sum b_{ki} d^3y_i + B_k + 3C_k &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

hinzuzunehmen sind, in denen

$$\begin{aligned} B_k = \sum \Big(& \frac{\partial^3 f_k}{\partial x_i \partial x_l \partial x_m} dx_i dx_l dx_m + 3 \frac{\partial^3 f_k}{\partial x_i \partial x_l \partial y_m} dx_i dx_l dy_m \\ & + 3 \frac{\partial^3 f_k}{\partial x_i \partial y_l \partial y_m} dx_i dy_l dy_m \\ & + \frac{\partial^3 f_k}{\partial y_i \partial y_l \partial y_m} dy_i dy_l dy_m \Big), \\ C_k = \sum \Big(& \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_l} d^2x_i dx_l + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_l} dx_i d^2y_l + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_l} d^2x_i dy_l \\ & + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_l} d^2y_i dy_l \Big) \end{aligned}$$

zu setzen ist, während nach II, (9) und (20), sowie nach (9), (10)

$$
\begin{aligned}
dx_i &= \frac{d\varrho}{\varrho}\, x_i + \sigma \xi_i', \\
dy_i &= \tau y_i - \frac{\sigma}{\mu}\, \xi_i', \qquad \tau = \frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{d\mu}{\mu}, \\
&\sum \xi_i' (b_{ki} - \mu a_{ki}) = 0, \\
&\sum \xi_k (b_{ki} - \mu a_{ki}) = 0.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Man erhält nun aus der dritten Gleichung (16)

$$
\sum b_{ki} d^3 y_i = \frac{1}{\mu}\Big(\frac{d^3\varrho}{\varrho}\sum b_{ki} x_i - \sum b_{ki} d^3 x_i - 3 d\mu \sum b_{ki} d^2 y_i - 3 d^2\mu \sum b_{ki} dy_i\Big),
$$

und durch Substitution dieses Werthes in der dritten Gleichung (17)

$$
\begin{aligned}
&B_k + 3C_k + \sum d^3 x_i \Big(a_{ki} - \frac{1}{\mu} b_{ki}\Big) \\
&+ \frac{1}{\mu}\Big(\frac{d^3\varrho}{\varrho}\sum b_{ki} x_i - 3 d\mu \sum b_{ki} d^2 y_i - 3 d^2\mu \sum b_{ki} dy_i\Big) = 0,
\end{aligned}
$$

und hieraus durch Multiplication mit den ξ_k und Summation über k

$$
\begin{aligned}
&\sum \xi_k B_k + 3\sum C_k \xi_k - 3\,\frac{d\mu}{\mu}\sum b_{ki}\xi_k d^2 y_i \\
&- 3\,\frac{d^2\mu}{\mu}\sum b_{ki}\xi_k dy_i = 0.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Nun ergiebt sich für $\sum \xi_k B_k$, wenn mittelst (18) die Differentiale entfernt werden

$$
\begin{aligned}
\sum \xi_k B_k = \frac{\sigma^3}{\mu^3}\sum \xi_i \xi_i' \xi_l' \xi_l' \Big(&\mu^3 \frac{\partial^3 f_s}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} - 3\mu^2 \frac{\partial^3 f_s}{\partial x_i \partial x_k \partial y_k} \\
&+ 3\mu \frac{\partial^3 f_s}{\partial x_i \partial y_l \partial y_k} - \frac{\partial^3 f_s}{\partial y_i \partial y_k \partial y_l}\Big) \\
&+ 6\frac{\sigma^2}{\mu^2} d\mu \Big(\frac{1}{\mu}\sum \xi_i' \xi_i' \xi_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_l} - \sum \xi_i' \xi_i' \xi_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_l}\Big) \\
&+ \frac{3\sigma}{\mu}\sum \xi_k \xi_i' b_{ki}\Big(4\frac{d\varrho\, d\mu}{\varrho\mu} - 2\Big(\frac{d\mu}{\mu}\Big)^2\Big) \\
&- 6\frac{\sigma\, d\mu}{\mu^2}\sum \xi_i' \xi_k b_{ki}\Big(n_k \tau + \frac{d\varrho}{\varrho} m_k\Big) \\
&+ \frac{3\sigma^2}{\mu^2}\sum \xi_i' \xi_i' \Big\{\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_l}\mu^2 - 2\mu \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_l}\Big\} \xi_k \\
&\times \Big(m_k \frac{d\varrho}{\varrho} + n_k \tau\Big).
\end{aligned} \tag{20}
$$

Setzt man voraus, dass die m_k, sowie auch die n_k je unter einander gleich sind — welcher Fall bei den meisten Untersuchungen

eintreten wird — so verschwindet der Bedingung (13) zufolge der letzte Term. Auf eine ähnliche Art lassen sich auch die anderen Terme in (19) umformen. Dabei ergeben sich als Glieder, welche die d^2x_i enthalten — die d^2y_i können mittelst der zweiten Gleichung (16) entfernt werden — die folgenden

$$(21)\quad 3\sigma\sum d^2x_i\xi_k\xi_l'\Big(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_l}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_l}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l\partial y_i}+\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial y_l}\Big),$$

und die übrigen Terme erhalten die Form

$$\begin{aligned}(22)\quad & 3\sigma^2\Big(2\frac{d\mu}{\mu^2}\sum\xi_l'\xi_i\xi_k\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_i}-2\frac{d\mu}{\mu^3}\sum\xi_i'\xi_i'\xi_k\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial y_l}\Big)\\ &+\frac{3\sigma}{\mu}\sum\xi_k\xi_i'b_{ki}\Big(2\Big(\frac{d\mu}{\mu}\Big)^2-4\frac{d\varrho\,d\mu}{\varrho\mu}\Big)\\ &+6\sigma\frac{d\mu}{\mu^2}\sum\xi_i'\xi_k b_{ki}\Big(m_k\frac{d\varrho}{\varrho}+n_k\tau\Big)\\ &+\frac{3\sigma}{\mu}\frac{d^2\varrho}{\varrho}\sum\xi_k\xi_l'\Big(x_i\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_i}-\frac{1}{\mu}x_i\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial y_l}+b_{kl}\Big),\end{aligned}$$

so dass die Summe der Ausdrücke (21) und (22) alle Terme von (19) mit Ausnahme des ersten durch (20) dargestellten enthält. Darnach resultirt als Bedingung für die zweiten Differentiale d^2x_i, wenn man

$$\begin{aligned}(23)\quad D=&\sum\xi_i'\xi_k'\xi_l'\xi_s\Big(\mu^3\frac{\partial^3 f_k}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}-3\mu^2\frac{\partial^3 f_k}{\partial x_i\partial x_k\partial y_l}\\ &+3\mu\frac{\partial^3 f_k}{\partial x_i\partial y_k\partial y_l}-\frac{\partial^3 f_k}{\partial y_i\partial y_k\partial y_l}\Big),\\ d_i=&\sum\xi_k\xi_l'\Big(\mu^2\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_l}-\mu\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_l}-\mu\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial x_l}+\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial y_l}\Big),\end{aligned}$$

setzt:

$$\begin{aligned}(24)\quad &\mu\sum d_i d^2x_i+\frac{d^2\varrho}{\varrho}\sum\xi_i'\xi_k\Big(\mu^2x_i\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_i}-\mu x_i\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial y_l}+\mu^2 b_{kl}\Big)\\ &+\frac{\sigma^2}{3}D=0,\end{aligned}$$

zu welcher noch die Gleichungen (14)

$$(25)\qquad \mu\sum(b_{ki}-\mu a_{ki})\,d^2x_i-\mu\frac{d^2\varrho}{\varrho}\sum b_{ki}x_i=\sigma^2A_k,$$

hinzukommen. Setzt man

$$d^2x_i-x_i\frac{d^2\varrho}{\varrho}-\sigma\frac{d^2\varrho}{d\varrho}\xi_i'=d^2x_i-\frac{d^2\varrho}{d\varrho}\,dx_i=\frac{\xi_i}{\mu},$$

$$b_{ki}-\mu a_{ki}=\alpha_{ki},$$

so nehmen die Gleichungen (24), (25) die Form an:

$$(26)\qquad \begin{aligned} \sum \xi_i \alpha_{ki} &= \sigma^2 A_k, \\ \sum \xi_i d_i &= -\frac{\sigma^2 D}{3}. \end{aligned}$$

Da endlich zwischen den Differentialen ξ_i noch die Beziehung

$$(27)\qquad \sum k_i \xi_i = 0,$$

besteht, *so wird die Bedingung dafür, dass vier benachbarte Strahlen durch einen Punkt hindurchgehen, durch*

$$(28)\qquad S = \frac{1}{\sum k_i \xi_i' \sum a_i \xi_i} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & A_1 & a_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & A_2 & a_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & A_3 & a_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & A_4 & a_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \frac{-D}{3} & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ausgesprochen. Da nach II, (9), (20); III, (13), (23) rechterhand die willkürlichen Coefficienten a, k durch Division entfernt werden können, so ergiebt sich eine weitere Bedingung, *so dass das Auftreten einer Spitze der Rückkehrcurve durch das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen*

$$\Delta = 0, \quad \sum \xi_k A_k = 0, \quad S = 0$$

ausgedrückt wird. Obwohl die Gestalt derselben zu complicirt erscheint, als dass sich die Anzahl der Spitzen aus denselben mit Sicherheit ableiten liesse, so dürfte doch die analytische Form der Bedingung selbst ein gewisses Interesse haben.

Auf ähnlichem Wege erhält man auch die Bedingung für eine *parabolische stationäre Ebene der Brennfläche*, doch mag auch hier die Voraussetzung $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$ der Einfachheit halber festgehalten werden.

Sollen vier benachbarte Strahlen derselben Ebene angehören, so ist zu setzen

$$\begin{aligned} d^2 x_i &= p x_i + q y_i + r \xi_i', \\ d^2 y_i &= p' x_i + q' y_i + r' \xi_i', \\ d^3 x_i &= a x_i + b y_i + c \xi_i', \\ d^3 y_i &= a' x_i + b' y_i + c' \xi_i', \end{aligned}$$

während die zweiten und dritten Differentiale den Bedingungen (17) genügen. Setzt man die d^2x, d^2y in die zweite Reihe der Gleichungen (17) ein, so entstehen die 4 Gleichungen

$$(29)\quad \Big(r+\mu r'-2\sigma\frac{d\mu}{\mu}\Big)\sum \xi_i'\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+q\sum y_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + p'\sum x_i\frac{\partial f_k}{\partial y_i}+\frac{\sigma^2}{\mu^2}A_k=0,$$

aus denen wieder die Gleichung (15)

$$\sum A_k Z_k = 0$$

folgt. Behandelt man ebenso die d^3x und d^3y, so folgt aus dem letzten Systeme der Gleichungen (17)

$$\begin{aligned}(30)\quad & B_k + a'\sum x_i b_{ki} + b'\sum y_i a_{ki} + c\sum \xi_i' b_{ki} + c'\sum \xi_i' a_{ki}\\ & + 3\Big\{\frac{q'\sigma}{\mu}\sum \xi_i' b_{ki} - p\sigma\sum \xi_i' a_{ki}\Big\}\\ & + 3\sum (qy_i + r\xi_i')\Big(dx_i\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_l}+dy_i\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_l}\Big)\\ & + 3\sum (p'x_i + r'\xi_i')\Big(dx_i\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_l}+dy_i\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial y_l}\Big)=0.\end{aligned}$$

Führt man endlich die ersten Differentiale vermöge (18) ein, multiplicirt mit den Z_k und summirt über k, so ergiebt sich nach ähnlichen Umformungen, wie vorhin, unter der Voraussetzung dass (15) bereits erfüllt ist

$$\sum B_k Z_k = \frac{\sigma^3}{\mu^3}E + 6\frac{\sigma^2}{\mu^3}d\mu\sum Z_k\xi_i'\xi_l'\Big(\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial y_l}-\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_l}\mu\Big),$$

wo

$$\begin{aligned}(31)\quad E = \sum Z_s\xi_i'\xi_l'\xi_k'\Big(&\mu^3\frac{\partial^3 f_s}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}-3\mu^2\frac{\partial^3 f_s}{\partial x_i\partial x_k\partial y_l}\\ &+3\mu\frac{\partial^3 f_s}{\partial x_i\partial y_k\partial y_l}-\frac{\partial^3 f_s}{\partial y_i\partial y_k\partial y_l}\Big),\end{aligned}$$

und die beiden letzten Terme in (30) liefern, wenn nach (15)

$$\begin{aligned}&\sum Z_k\xi_i'\xi_l'\Big(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_l}\mu-\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_l}\Big)\\ &=\frac{1}{\mu}\sum Z_k\xi_i'\xi_l'\Big(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_l}\mu-\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial y_l}\Big)=P,\end{aligned}$$

sowie

$$R=\sum Z_k\xi_i' y_i\Big(\mu\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_l}-\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_l}\Big),$$

$$Q=\sum Z_k\xi_i' x_l\Big(\mu\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial y_l}-\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i\partial y_l}\Big)$$

gesetzt wird, den Ausdruck

$$\frac{3\sigma}{\mu}P(r+\mu r')+\frac{3\sigma}{\mu}qR+3\sigma\frac{p'}{\mu}Q.$$

Demnach folgt

$$\frac{\sigma^2}{\mu^2} E + \frac{3P}{\mu}\left(r + r'\mu - 2\sigma\frac{d\mu}{\mu}\right) + 3(qR + p'Q) = 0.$$

Die Bedingung stationärer parabolischer Ebenen der Brennfläche wird daher durch das Verschwinden der Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E \\ \sum \zeta_i' b_{1i} & \sum \zeta_i' b_{2i} & \sum \zeta_i' b_{3i} & \sum \zeta_i' b_{4i} & 3P \\ \sum x_i b_{1i} & \sum x_i b_{2i} & \sum x_i b_{3i} & \sum x_i b_{4i} & 3Q \\ \sum y_i a_{1i} & \sum y_i a_{2i} & \sum y_i a_{3i} & \sum y_i a_{4i} & 3R \end{array} \right\|$$

ausgedrückt.

Sind alle vier Formen f_k bilinear in x, y, so verschwindet mit (15) auch P. Setzt man noch voraus, dass

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_i} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_i},$$

so verschwinden nach II., (22a) auch Q und R. Das liefert den Satz:

*Die zu vier bilinearen in x und y symmetrischen Formen gehörige Brennfläche enthält stets singuläre Tangentenebenen, welche dieselbe längs einer ganzen Curve berühren**).

§ IV.

Das zu der Hesse'schen und Steiner'schen Fläche gehörige Strahlensystem.

Die allgemeinen Resultate des § II. gelten mit geringen Modificationen auch unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen $f_k = 0$ nicht mehr von der allgemeinsten Form sind. Sie enthalten namentlich den Fall (B. § III, IV) in sich, wo auf den Flächen F und Φ auch Rückkehrcurven auftreten, und lassen sich daher zur Untersuchung aller Beziehungen verwenden, welche bei den höheren conjugirten Kernflächen einer allgemeinen Fläche n. Ordnung auftreten. Nur werden z. B. in dem Falle, wo conjugirte Kernflächen zusammenfallen, der bei allen Flächen von ungerader Ordnung auftritt, mehrere der Zahlwerthe durch 2 zu dividiren, sowie die Formeln für das Geschlecht π, p durch andere zu ersetzen sein. Ich beschränke mich indessen aus dem in der Einleitung angeführten Grunde auf die Betrachtung der gewöhnlichen Hesse'schen Fläche H und ihrer Steiner'schen Fläche S in Bezug auf eine allgemeine Fläche n. Ordnung $f = 0$.

---

*) Siehe die weitere Auseinandersetzung in § VII, S. 281.

Die Beziehung zwischen den conjugirten Punkten x und y von H und S ist bekanntlich ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\sum y_i f_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4^*), \tag{1}$$

aus denen

$$\sigma y_i y_k = \mathsf{H}_{ik} \tag{2}$$

folgt, falls man mit H_{ik} die nach den f_{ik} gewonnenen Unterdeterminanten von H bezeichnet. An Stelle der früher durch $f_k = 0$ bezeichneten Gleichungen tritt daher das biquaternäre System (1), in welchem $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = n - 2$; $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ zu setzen ist. Anstatt indessen die früher erhaltenen Resultate unmittelbar zu übertragen, ziehe ich vor, dieselben auf einem etwas anderen Wege direct herzuleiten, der zugleich eine Bestätigung derselben liefern wird.

Dabei soll der bereits B. S. 391 angeführte Satz zu Grunde gelegt werden:**)

Die Anzahl der nicht in die Knotenpunkte von H *fallenden Lösungen der Gleichungen*

$$\mathsf{H} = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

in denen P und Q biquaternäre Formen vom Charakter (p, s), (q, t) sind, beträgt

$$4(n-2)\,pq + 6(n-2)^2\,(pt + qs) + 4(n-2)^3\,st.$$

Die Gleichung II., (8), welche die beiden auf dem Strahle (xy) liegenden Brennpunkte z

$$\varrho z_i = \nu x_i + \mu y_i$$

bestimmt, wird

$$\left| \nu f_{ik} - \mu \sum y_s f_{sik} \right| = 0. \tag{3}$$

Da nach (1)

$$\sum y_i f_{iks} x_s = 0,$$

so folgt

$$\tau x_i x_k = S_{ik}, \tag{4}$$

wenn man mit S_{ik} die Unterdeterminanten der verschwindenden Determinante

$$S = \left| \sum y_r f_{sik} \right| \tag{5}$$

bezeichnet. Es ist daher

*) Vgl. B. S. 385.

**) Der Beweis desselben ergiebt sich, indem man in die Formen P, Q, welche, falls sie die y in ungerader Dimension enthalten, durch Multiplication mit einer in y linearen Form in solche von gerader Dimension verwandelt sind, die Ausdrücke (2) einsetzt.

$$-\sigma c_y^2 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix},$$

$$-\tau c_x^2 = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix},$$

wo die rechten Seiten die mit den c geänderten Determinanten H und S bedeuten*). Demnach verschwindet σ für die Knotenpunkte von H, τ für diejenigen Werthe von x und y, welche zu Punkten der Rückkehrcurve von S gehören**). Aus (3) folgt nunmehr

$$(3) \qquad \Delta = \nu^2\sigma \sum y_i y_k y_l f_{ikl} - \mu\nu P + \mu^2\tau n(n-1) f = 0;$$

man kann, wegen

$$\mathsf{H}_i = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i} = \sum \mathsf{H}_{ik} f_{ikl}, \quad ^{***})$$

den Coefficienten von ν^2 auch in der Form

$$\sum \mathsf{H}_i y_i$$

schreiben. Aus (3) folgt: †)

Die Brennfläche berührt die Hesse'sche Fläche längs der Curve, welche der parabolischen Curve auf der Steiner'schen Fläche entspricht, d. h. längs der Curve, nach welcher H *auch von der Salmon'schen Covariante* ††)

$$\sum \mathsf{H}_{ik} \mathsf{H}_i \mathsf{H}_k = 0$$

berührt wird. Sie berührt die Steiner'sche Fläche längs der Curve, welche zur parabolischen Curve von $f = 0$ *gehört; letztere ist zugleich eine algebraische Hauptcurve von* H. *Sie geht ferner durch die Knotenpunkte von* H *und die Rückkehrcurve* $30(n-2)^2(n-3)$. *Ordnung von* S. *Ordnung und Classe der Brennfläche sind gegeben durch die Zahlen*

$$4(n-2)(9n^2 - 32n + 27),$$
$$4(n-1)(n-2)(7n - 17).$$

Der Rang derselben ergiebt sich auf folgendem Wege. Definirt man die ξ_i, welche jetzt mit den ξ_i' zusammenfallen, durch die Gleichungen

$$(6) \qquad \sum \xi_i(\nu f_{ik} - \mu y_s f_{sik}) = 0,$$

so entspricht der Gleichung

$$\sum a_i \xi_i = 0,$$

---

*) Vgl. B. S. 387.
**) ebenda.
***) B. S. 385.
†) Vgl. B. S. 387.
††) Vgl. § II. S. 233 u. B. S. 390—395.

in welcher die a_i willkürliche Constanten sind, eine Curve T auf der Brennfläche, deren Ordnung dem aus

$$v\alpha_x + \mu\alpha_y = 0$$

folgenden, in Δ einzutragenden Werthe von $\mu : \nu$ zu entnehmen ist. Setzt man denselben in

$$\mathsf{T} = \sum a_i\xi_i \sum b_i\xi_i = \left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = 0,$$

— das Zeichen rechter Hand möge die mit den a_i, b_i geränderte Determinante (3) bedeuten — ein, so werden T und Δ von der Form

$$(3(n-2),\ 3), \qquad (4n-9,\ 3).$$

Die Anzahl der Lösungen von

$$\mathsf{H} = 0, \quad \Delta = 0, \quad \mathsf{T} = 0$$

beträgt, da das System

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_y = 0, \quad \mathsf{H} = 0,$$

für welches Δ in zweiter, T in dritter Dimension verschwindet, $6(n-2)^2$ Lösungen hat,

$$12(n-2)^2(4n-9) + 6(n-2)^2(21n-54) + 36(n-2)^3 - 36(n-2)^2.$$

Da auch Δ und T für $\alpha_y = 0$ und $\tau = 0$ verschwinden, so sind von denselben noch $30(n-2)^2(n-3)$ in Abzug zu bringen*). *Die Ordnung der Curve* T *ist gleich der restirenden, durch* 2 *dividirten Anzahl, also*

$$18(n-2)^2(5n-11).$$

Da nun die Bedingung dafür, dass die Tangentenebene der Brennfläche im Punkte s durch den willkürlichen Punkt c gehe, nach II., (23)

$$\sum \zeta_i f_{ik} c_k = 0$$

ist, so ergiebt sich der Rang der Brennfläche, wenn man in dieser Gleichung und $\Delta = 0$ den Werth von $\mu : \nu$ aus II., (25) einführt. Da die Form

$$\mathsf{T}' = \sum a_i\xi_i \sum \xi_i f_{ik} c_k = \left\{\begin{matrix} a \\ d \end{matrix}\right\} = 0,$$

in welcher

$$d_i = \sum c_k f_{ik}$$

gesetzt ist, dann eine $(4n-9,\ 3)$ wird, so findet man für den *Rang R*, wenn man von den Lösungen des Systems

$$\mathsf{H} = 0, \quad \Delta = 0, \quad \mathsf{T}' = 0$$

die Ordnung der Curve T abzieht,

$$R = 4(n-2)(31n^2 - 135n + 147).$$

*) Vgl. B. S. 390.

Ebenso erkennt man dass die Ordnung der auf H gelegenen Curve, auf die vermöge der Gleichung $\Delta = 0$ die ebene Schnittcurve der Brennfläche eindeutig bezogen ist, wird

$$2(n-2)(17n-36);$$

das Geschlecht p derselben ist bestimmt durch

$$2p - 2 = 4(n-2)(95n^2 - 438n + 501);$$

die Ordnung der Rückkehrcurve der Brennfläche wird

$$4(n-2)(82n^2 - 367n + 408).$$

Ebenso ist die Berührungscurve des Tangentenkegels derselben eindeutig auf eine Curve von der Ordnung $2(n-2)(17n-36)$ bezogen, deren Geschlecht π aus der Gleichung*)

$$2\pi - 2 = 4(n-2)(93n^2 - 430n + 491)$$

folgt, nach welcher sich die Classe der parabolischen Ebenen gleich

$$16(n-2)(37n^2 - 169n + 192)$$

ergiebt.

Dieselben Zahlen erhält man aber auch aus den in § II. gegebenen Formeln, wenn man daselbst setzt:

$$m = 4(n-2), \quad \mathsf{M} = 4(n-2), \quad \mathsf{M}_2 = 6(n-2)^2,$$
$$\mu = 4(n-2)^3, \quad \mathsf{N} = 4, \quad \mathsf{N}_2 = 6,$$
$$e = 6(n-2)^2, \quad \mathsf{T} = 4(n-2), \text{**}).$$

Ich kehre jetzt zu der Gleichung (3) zurück. Setzt man

$$\lambda = \frac{\mu}{\nu},$$

so entsprechen den beiden Wurzeln $\lambda_1 \lambda_2$ derselben die beiden auf (xy) gelegenen Brennpunkte

$$z_i^1 = x_i + \lambda_1 y_i,$$
$$z_i^2 = x_i + \lambda_2 y_i,$$

sowie die beiden Punkte ξ_i^1, ξ_i^2 vermöge der Gleichung (6)

$$\sum \xi_i (f_{ik} - \lambda \cdot y_s f_{sik}) = 0, \tag{7}$$

aus der die Beziehungen

$$\sum \xi_i^1 f_i = 0, \quad \sum \xi_i^2 f_i = 0,$$
$$\sum \xi_i^1 \mathsf{H}_i = 0, \quad \sum \xi_i^2 \mathsf{H}_i = 0,$$
$$\sum \xi_i^1 \xi_k^2 f_{ik} = 0, \quad \sum \xi_i^1 \xi_i^2 y_s f_{sik} = 0$$

*) Die Werthe von p und π für $n = 3$ findet man in § VII angegeben.

**) In der That erkennt man auch direct, dass das Vorhandensein der Knotenpunkte von H, der Rückkehrcurve von S die in § II. gegebenen Formeln nicht beeinträchtigt.

folgen. Die Punkte ξ^1, ξ^2 bilden mit den Punkten xy das gemeinsame Polartetraeder des zu den beiden conjugirten Kegelflächen zweiten Grades

$$(8)\qquad \begin{aligned} \sum X_i X_k f_{ik} &= 0, \\ \sum X_i X_k y_s f_{sik} &= 0 \end{aligned}$$

gehörigen Flächenbüschels. Aus (7), welche Gleichung man auch in der Form

$$(7\,a)\qquad \sum \xi_i (x_s - \lambda (n-2)\, y_s) f_{sik} = 0$$

schreiben kann, folgt

$$(9)\qquad \left| \sum \xi_s f_{sik} \right| = 0.$$

Nun ist die Hesse'sche Fläche H_P der Polarfläche dritter Ordnung

$$\sum X_i X_k X_l f_{ikl} = 0,$$

welche zum Punkte x gehört

$$H_P = \left| \sum X_s f_{sik} \right| = 0.$$

Lässt man jedem Punkte X von H_P vermöge der Gleichungen

$$\sum Y_i X_k f_{iik} = 0$$

einen Punkt Y entsprechen, so sind x und y auch conjugirte Punkte von H_P, während den Punkten ξ^1, ξ^2 nach (7a) als conjugirte die beiden auf (xy) liegenden Punkte η^1, η^2

$$\begin{aligned} \eta_i^1 &= x_i - \lambda_1 (n-2)\, y_i, \\ \eta_i^2 &= x_i - \lambda_2 (n-2)\, y_i \end{aligned}$$

entsprechen. Man erkennt weiter: *die Fläche* H_P *berührt* H *und S in den Punkten x und y*, und die Gerade (ξ^1, ξ^2) ist Doppeltangente von H_P in den Punkten ξ^1, ξ^2.

Denn die Tangentenebene von H_P im Punkte ξ^2 ist

$$\sum X_i f_{ikl} \eta_k^2 \eta_l^2 = 0$$

$$= n(n-1) \sum X_i f_i - 2(n-2)^2 \lambda_2 \sum X_i f_{ik} y_k + (n-2)^2 \lambda_2^2 \sum X_i H_i,$$

sie geht daher nach den unter (7) angegebenen Formeln durch ξ^1. Man hat also folgenden Satz:

Construirt man die Hesse'sche Fläche H_P *der Polarfläche dritter Ordnung eines Punktes x von* H, *dem der Punkt y von S entspricht, so wird die Gerade* ξ^1, ξ^2, *in der sich die Tangentenebenen von* H *und S in x und y schneiden, Doppeltangente von* H_P *und die in Bezug auf* H_P *conjugirten Punkte der Berührungspunkte* ξ^1, ξ^2 *derselben sind zwei*

Punkte auf der Geraden xy, welche mit je einem der Brennpunkte das constante Doppelverhältniss $-(n-2)$ bilden.

Die Bedingung für die Rückkehrpunkte der Brennfläche ist nach § III., (13)

$$\sum \xi_i \xi_k \xi_l (\lambda y_s f_{sikl} - 2 f_{ikl}) = 0, \tag{10}$$

oder

$$\sum \xi_i \xi_k \xi_l \xi_s f_{sikl} = 0, \tag{10a}$$

wenn man

$$\xi_s = x_s - \frac{\lambda}{2} y_s (n-3)$$

setzt. Im Allgemeinen muss also der Punkt ξ, welcher mit den Punkten x, y, η das Doppelverhältniss

$$\frac{n-3}{2(n-2)}$$

bildet, durch die in (10a) ausgesprochene Polarenbeziehung mit ξ verbunden sein; bei den Flächen vierter Ordnung insbesondere muss ξ auf der Polarebene von ξ in Bezug auf f liegen.

Zu einer genaueren *Untersuchung der eindeutigen Abbildung der Rückkehrcurve auf* H wird man in der Gleichung (10) die ξ zu eliminiren haben, deren Producte den Unterdeterminanten von (3) proportional sind. Hierzu sind einige Formeln erforderlich, die zuerst in einer allgemeineren Gestalt entwickelt werden mögen.

Setzt man

$$\Omega = |\, \nu a_{ik} + \mu b_{ik} \,| = A\nu^4 + \nu^3 \mu B + \nu^2 \mu^2 C + \nu \mu^3 B' + \mu^4 A', \tag{11}$$

$$\Omega' = \begin{vmatrix} \nu a_{ik} + \mu b_{ik} & \alpha_i \\ \beta_k & 0 \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$= -\sum (\nu^3 A'_{ik} + \nu^2 \mu A_{ik} + \nu \mu^2 B_{ik} + \mu^3 B'_{ik}) \alpha_i \beta_k,$$

$$= -\sum \alpha_i \beta_k \Omega_{ik},$$

so dass die Ω_{ik} die Unterdeterminanten von Ω bedeuten, so folgt aus den Identitäten, in denen $(lk) = 0$, $(ll) = 1$ zu nehmen ist

$$\sum (\nu a_{il} + \mu b_{il}) \frac{\partial \Omega'}{\partial \alpha_i} = -\beta_l \Omega,$$

$$\sum (\nu a_{il} + \mu b_{il}) \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial \alpha_i \partial \beta_k} = -(lk)\Omega,$$

wenn man die Werthe der Ω_{ik} aus (12) einträgt, und die Coefficienten gleicher Dimension in μ, ν vergleicht,

$$
\begin{aligned}
&\sum a_{il} A'_{ik} && = A(lk),\\
&\sum a_{il} A_{ik} + b_{il} A'_{ik} && = B(lk),\\
&\sum a_{il} B_{ik} + b_{il} A_{ik} && = C(lk),\\
&\sum a_{il} B'_{ik} + b_{il} B_{ik} && = B'(lk),\\
&\sum b_{il} B'_{ik} && = A'(lk),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

und durch ein ähnliches Verfahren aus den Identitäten

$$
\sum a_{ik}\Omega_{ik} = \frac{\partial\Omega}{\partial\nu},
$$

$$
\sum b_{ik}\Omega_{ik} = \frac{\partial\Omega}{\partial\mu},
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum a_{ik} A'_{ik} = 4A, && \sum b_{ik} A'_{ik} = B,\\
&\sum a_{ik} A_{ik} = 3B, && \sum b_{ik} A_{ik} = 2C,\\
&\sum a_{ik} B_{ik} = 2C, && \sum b_{ik} B_{ik} = 3B',\\
&\sum a_{ik} B'_{ik} = B', && \sum b_{ik} B'_{ik} = 4A',
\end{aligned}
\tag{14}
$$

welche Gleichungen übrigens bekannten Invarianteneigenschaften entsprechen. Wird insbesondere

$$
\Omega = \left| \nu f_{ik} - \mu \sum y_s f_{sik} \right| \tag{15}
$$

$$
= -\nu^3\mu\sigma \sum \mathsf{H}_i y_i + \nu^2\mu^2 P - n(n-1)\tau f \mu^3 \nu,
$$

$$
\Omega_{ik} = \nu^3\sigma y_i y_k - \nu^2\mu A_{ik} + \nu\mu^2 B_{ik} - \mu^3\tau x_i x_k
$$

gesetzt, so erhält man nach den Formeln (13), (14)

$$
\begin{aligned}
&\sum f_{il} A_{ik} && = \sigma(lk) \sum \mathsf{H}_i y_i - \sigma y_k \mathsf{H}_l,\\
&\sum f_{il} B_{ik} && = P(lk) - \sum A_{ik} y_s f_{sil},\\
&\sum y_s f_{sil} B_{ik} && = n(n-1) f\tau(lk) - \tau(n-1) x_k f_l,\\
&(n-1) \sum f_i A_{ik} && = x_k \sigma \sum \mathsf{H}_i y_i,\\
&(n-1) \sum f_i B_{ik} && = x_k P,\\
&\sum \mathsf{H}_i A_{ik} && = y_k P,\\
&\sum \mathsf{H}_i B_{ik} && = n(n-1)\tau x_k f,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$\sum f_{ik} A_{ik} = 3\sigma \sum \mathsf{H}_i y_i,$$
$$\sum f_{ik} B_{ik} = 2P,$$
$$\sum y_s f_{sik} A_{ik} = 2P,$$
$$\sum y_s f_{sik} B_{ik} = 3\tau n(n-1) f.$$

Da für $\Omega = 0$ die Ω_{ik} den $\xi_i \xi_k$ proportional werden, so wird

$$(17) \qquad \Big(\sum a_i \xi_i\Big)^2 = \nu^3 \sigma a_y^2 - \nu^2 \mu \sum a_i a_k A_{ik} + \nu \mu^2 \sum a_i a_k B_{ik} - \mu^3 \tau a_x^2.$$

Hieraus ergiebt sich als Ordnung der Curve auf der Brennfläche, welche der Gleichung $\sum a_i \xi_i = 0$ entspricht, wie oben $18(n-2)^2 (5n-11)$.

Die Resultante der Formen (17) und (15) stellt dagegen, gleich Null gesetzt, in Verbindung mit $\mathsf{H} = 0$ diejenige Curve doppelt dar, welche der Curve T auf H eindeutig entspricht. *Die Ordnung dieser Abbildung von* T *wird daher gleich* $8(n-2)(6n-13)$; jeder Knotenpunkt von H wird ein einfacher Punkt derselben. Man kann diese Zahl durch eine directe Untersuchung derjenigen Gleichung bestätigen, welche durch Elimination der ξ aus den Gleichungen

$$(18) \qquad \sum \xi_i f_i = 0, \quad \sum \xi_i \mathsf{H}_i = 0, \quad \sum \xi_i a_i = 0,$$

$$(19) \qquad \sum \xi_i a_k f_{ik} - \lambda \sum \xi_i y_s a_k f_{sik} = 0,$$

$$(20) \qquad \sum \xi_i \xi_k f_{ik} - \lambda \sum \xi_i \xi_k y_s f_{sik} = 0$$

hervorgeht. Trägt man nämlich aus (18) die Verhältnisse der ξ in die in Bezug auf λ gebildete Determinante von (19) und (20) ein, so entsteht eine Form vom Charakter $(17n-35, 1)$, welche mit $a_x = 0$, $\mathsf{H} = 0$, zunächst $2(n-2)(37n-76)$ Lösungen liefert. Von diesen sind aber noch diejenigen auszuscheiden, bei denen

$$(21) \qquad \xi_i = a_i + \varrho x_i + \varkappa y_i,$$

wird. Denn die Gleichungen (19), (20) werden alsdann

$$\sum a_i a_k f_{ik} + (\eta - 1)\varrho \sum a_i f_i - \lambda\Big(\sum a_i a_k y_s f_{sik} + \varkappa \sum \mathsf{H}_i a_i\Big) = 0,$$
$$\sum a_i a_k f_{ik} + 2(n-1)\varrho \sum a_i f_i + \varrho^2 n(n-1) f - \lambda\Big(\sum a_i a_k y_s f_{sik} + 2\varkappa \sum \mathsf{H}_i a_i + \varkappa^2 \sum \mathsf{H}_i y_i\Big) = 0;$$

sie werden daher identisch, sobald man

$$\sum a_i a_k f_{ik} - \lambda \sum a_i a_k y_s f_{sik} = 0$$

setzt, da aus (21) folgt

$$\sum a_i f_i + \varrho n f = 0,$$
$$\sum \mathsf{H}_i a_i + \varkappa \sum \mathsf{H}_i y_i = 0.$$

Werden nun die Verhältnisse der ξ_i aus (18) in (21) eingesetzt, so entsteht die Bedingung

$$\sum \mathsf{H}_i y_i \left(nf \sum (a_i)^2 - a_x \sum a_i f_i\right) - nf a_y \sum \mathsf{H}_i a_i = 0$$

vom Charakter $(5n - 9, 1)$. Nach Abzug der derselben entsprechenden $4(n-2)(5n-9) + 6(n-2)^2$ Lösungen bleibt

$$2(n-2)(37n-76) - 4(n-2)(5n-9) - 6(n-2)^2 = 8(n-2)(6n-13),$$

wie vorhin gefunden wurde.

Da die Elimination der ξ aus der Gleichung (10) sich, wie es scheint, nicht einfach gestaltet, bilde ich zur Untersuchung der Rückkehrcurve die Bedingung

$$(22) \qquad \sum (a_i \xi_i) \sum \xi_i \xi_k \xi_l (\mu y_s f_{sikl} - 2\nu f_{ikl}) = 0,$$

welche dieselbe in Verbindung mit der soeben untersuchten Curve T charakterisirt, und die Entfernung der Producte $\xi_i \xi_k$ unmittelbar gestattet. Aus den Gleichungen

$$\sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} = \sum (-\nu^2 \mu A_{ik} + \nu \mu^2 B_{ik}) \xi_l f_{ikl},$$
$$\sum \xi_i \xi_k \xi_l y_s f_{sikl} = \sum (\nu^3 \sigma y_i y_k - \nu^2 \mu A_{ik} + \nu \mu^2 B_{ik}) y_s \xi_l f_{sikl},$$

erhält man unter Benutzung der Gleichungen (16)

$$(23) \qquad \sum a_m \xi_i \xi_k \xi_l \xi_m f_{ikl}$$
$$= -2\nu^5 \mu \sigma a_y P - \nu^4 \mu^2 \left(\sum A_{ik} A_{lm} f_{ikl} a_m - 3\sigma\tau n(n-1) a_y f\right)$$
$$+ \nu^3 \mu^3 \sum (A_{ik} B_{lm} + B_{ik} A_{lm}) f_{ikl} a_m$$
$$- \nu^2 \mu^4 \left(3\tau\sigma a_x (n-2) \sum \mathsf{H}_i y_i - \sum B_{ik} A_{lm} f_{ikl} a_m\right)$$
$$- 2\nu\mu^5 (n-2) \tau a_x P,$$

sowie

$$\sum a_m \xi_i \xi_k \xi_l \xi_m y_s f_{sikl} = \nu^6 \sigma^2 a_y \sum y_i y_k y_l y_s f_{sikl} + \cdots$$
$$- \nu\mu^5 3n(n-3)(n-1) \tau^2 a_x f.$$

Demnach ergiebt sich an Stelle von (22), wenn man noch das Glied mit $\mu^6\nu$ mit Hülfe von

$$\mu^6\nu\, n(n-1)\,\tau f = \nu^2\mu^5 P - \nu^3\mu^4\sigma \sum \mathsf{H}_i y_i$$

entfernt, und durch $\mu\nu^2$ dividirt, die Gleichung vierten Grades

$$\nu^4\mathsf{A} + \nu^3\mu\mathsf{B} + \nu^2\mu^2\Gamma + \nu\mu^3\Delta + \mu^4\mathsf{E} = 0, \tag{24}$$

in welcher

$$\mathsf{A} = \sigma a_y \left(\sigma \sum y_i y_k y_l y_s f_{sikl} + 4P\right),$$

$$\mathsf{E} = (3n-5)\,\tau a_x P + \sum B_{ik} B_{lm} y_s f_{sikl} a_m.$$

Trägt man in (24) und (3) den Werth

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\alpha_x}{\alpha_y}$$

ein, so erhält man eine $(7n-16, 5)$, welche nach Beseitigung der Curve T für die Ordnung der Rückkehrcurve den Werth

$$4(n-2)(4n-9)(7n-16) + 6(n-2)^2[5(4n-9)+3(7n-16)]$$
$$+ 60(n-2)^3 - 48(n-2)^2 - 18(n-2)^2(5n-11)$$

in Uebereinstimmung mit dem früheren, auf ganz anderem Wege gefundenen, Resultate liefert.

Eliminirt man andererseits aus (3) und (24) die $\mu : \nu$, so bestimmt die Resultante R die Abbildung der Rückkehrcurve auf H in Verbindung mit derjenigen der bereits behandelten Curve T. So erhält man:

Die eindeutige Abbildung der Rückkehrcurve auf die Fläche H *ist eine Curve von der Ordnung*

$$4(n-2)(39n-92),$$

welche durch jeden Knotenpunkt von H *zwölffach hindurchgeht;* zu ihren Punkten gehören insbesondere immer die Punkte

$$\mathsf{H} = 0, \quad \sum \mathsf{H}_i y_i = 0, \quad \sum \mathsf{H}_{ik}\mathsf{H}_{lm} f_{iklm} + 4\sigma P = 0;$$

in der letzteren Covariante können nach (2) die $\sigma y_i y_k$ unmittelbar entfernt werden.

Auf ähnliche Weise lässt sich auch die parabolische Curve der Brennfläche behandeln. Setzt man

$$\sum \xi_i^2(\lambda y_s f_{sikl} - 2 f_{ikl}) = \mathsf{A}_{ik},$$

so bestimmt die Gleichung

$$\sum \xi_i^1 \xi_k^1 \mathsf{A}_{ik} = 0, \tag{25a}$$

nach § III. (15) parabolische Ebenen der Brennfläche, in der Art, dass die durch xy und ξ^1 gehende Ebene den genannten Charakter

besitzt. Der parabolische Punkt *gehört* folglich zu der Ebene $x y \xi^2$ und um die parabolische Curve selbst zu charakterisiren, hat man die Gleichung ausschliesslich von den ξ^2 abhängig zu machen. Da nun

$$\begin{aligned} \sum \xi_i^1 f_i &= 0, \\ \sum \xi^1 \mathsf{H}_i &= 0, \\ \sum \xi_i^1 \xi_k^2 f_{ik} &= 0, \end{aligned}$$

so erhält man als Bedingung dafür, dass der zur Richtung ξ gehörige Punkt ein parabolischer sei,

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A}_{ik} & f_i & \mathsf{H}_i & \sum \xi_i f_{ii} \\ f_k & 0 & 0 & 0 \\ \mathsf{H}_k & 0 & 0 & 0 \\ \sum \xi_i f_{ik} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man die 4 ersten, mit den x_k multiplicirten Reihen von der letzten abzieht,

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A}_{ik} & \mathsf{H}_i \\ \mathsf{H}_k & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

in welcher Form die ξ wieder im dritten Grade vorkommen und auf demselben Wege wie früher eliminirt werden können.

§ V.

Die Hauptpunkte des zu der Hesse'schen Fläche gehörigen Strahlensystems.

Die Punkte ξ erzeugen eine Fläche H', deren Charaktere sich ohne Schwierigkeit bestimmen lassen. Als Beispiel hierfür möge die Ermittelung der Ordnung von H' dienen. Man hat dann die den Gleichungen

*) Die Gleichungen (25) und (25a) sind in den speciellen Fällen $\lambda = 0, \infty$ mit derselben Vorsicht zu behandeln, wie überhaupt die Formen III., (13), (15). Wenn z. B. $\lambda = 0$ ist, so sind dieselben für $\xi' = y$ erfüllt, ohne dass die zugehörige Ebene eine parabolische ist. Dagegen lässt sich — allerdings auf einem etwas anderen Wege — nachweisen, *dass die Punkte*

$$f = 0, \quad \mathsf{H} = 0, \quad \sum \mathsf{H}_i y_i$$

immer zu parabolischen Ebenen Veranlassung geben.

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sum \xi_i a_i &= 0, \\ \sum \xi_i b_i &= 0, \\ \sum \xi_i f_i &= 0, \\ \sum \xi_i \mathsf{H}_i &= 0, \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \sum \xi_i f_{ik} - \lambda \sum \xi_i y_s f_{sik} = 0, \qquad \mathsf{H} = 0$$

entsprechende Zahl von Lösungen zu bestimmen. Nach (1) sind die ξ_i den Unterdeterminanten von

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix}$$

proportional, während nach denselben Gleichungen

$$(4)\qquad D = \text{Determ.}\,(a_i b_i f_i \mathsf{H}_i)$$

gleich Null sein muss. Aus den Gleichungen (2) folgt durch Elimination von λ

$$(5)\quad U = \sum \xi_i a_k f_{ik} \sum \xi_i b_k y_s f_{sik} - \sum \xi_i b_k f_{ik} \sum \xi_i a_k y_s f_{sik} = 0.$$

Setzt man in U die Werthe der ξ nach (3) ein, so erhält man eine $(4n-7, 1)$, während D eine $(2(n-2), 2)$ wird; beide liefern mit $\mathsf{H} = 0$ $20(n-2)^2(5n-9)$ Lösungen. Von diesen sind doppeltzählend die $4(n-1)^2(n-2)$ zu entfernen, für welche alle Determinanten von (3) verschwinden. Ausserdem aber noch diejenigen, bei denen die Determinante

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Denn man bemerkt leicht, dass für

$$a_i = b_i p + x_i q + y_i r$$

die Form U verschwindet, dass aber unter dieser Voraussetzung das System (1), mit (4) verbunden, nicht mehr die Gleichungen (2) nach sich zieht. Setzt man nämlich an Stelle von (5)

$$\begin{aligned} \sum \xi_i a_k f_{ik} &= \lambda \sum \xi_i a_k y_s f_{sik}, \\ \sum \xi_i b_k f_{ik} &= \lambda \sum \xi_i b_k y_s f_{sik}, \end{aligned}$$

so folgt aus den beiden letzten Gleichungen (1) und den ebengenannten

$$\sum a_k \xi_i (f_{ik} - \lambda y_s f_{sik}) = 0,$$
$$\sum b_k \xi_i (f_{ik} - \lambda y_s f_{sik}) = 0,$$
$$\sum x_k \xi_i (f_{ik} - \lambda y_s f_{sik}) = 0,$$
$$\sum y_k \xi_i (f_{ik} - \lambda y_s f_{sik}) = 0,$$

also das System (2) nur dann, wenn (6) nicht verschwindet. Es ergeben sich daher aus $\mathsf{H} = 0$, den Gleichungen (4) und (6) noch

$$8(n-2)^2 + 6(n-2)^2\,2(n-1) + 8(n-2)^3$$

von den zuvor angegebenen zu entfernende Lösungen, und *die Ordnung der Fläche* H' *wird daher:* *)

$$20(n-2)^2(5n-9) - 8(n-2)(n-1)^2 - 8(n-2)^2 - 12(n-1)(n-2)^2 - 8(n-2)^3 = 8(n-2)(9n^2 - 38n + 39).$$

Aus der Differentiation der Gleichungen (2) folgt ferner:

$$\sum d\xi_i' (f_{ik} - \lambda_1 y_s f_{sik})$$
$$+ \sum \xi_i' \{ f_{ikl} dx_l - \lambda_1 dy_s f_{sik} - \lambda_1 y_s f_{sikl} dx_l - d\lambda_1 y_s f_{sik} \} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit den x_k, y_k, ξ_k^2, so erhält man durch geeignete Combination das von den $d\lambda_1$ befreite System:

$$\sum d\xi_i^1 f_i + \sum \xi_i^1 f_{il} dx_l = 0,$$
$$\sum d\xi_i^1 (2f_i + \lambda_1{}^2 \mathsf{H}_i) + \lambda_1{}^2 \sum \xi_i^1 y_s y_k f_{sikl} dx_l = 0,$$
$$\sum \xi_i^1 \xi_k^2 (f_{ikl} dx_l - \lambda_1 dy_s f_{sik} - \lambda_1 y_s f_{sikl} dx_l) = 0.$$

Eliminirt man aus demselben mit Hülfe der Gleichungen

$$\sum dy_i f_{ik} + \sum y_i f_{ikl} dx_l = 0$$

die Differentiale dx, dy, so ergiebt sich zwischen den Differentialen $d\xi^1$ eine Bedingung von der Form:

$$\mathsf{A} \sum d\xi_i' f_i + \mathsf{B} \sum d\xi_i' \mathsf{H}_i = 0.$$

Das liefert den folgenden Satz:

Die Tangentenebenen der Fläche H' *in den Punkten* ξ^1, ξ^2 *bilden mit den Tangentenebenen von* H *in den conjugirten Punkten* x, y *ein Büschel; jede Gerade* $(\xi^1 \xi^2)$ *ist demnach Doppeltangente von* H', *und die Gesammtheit derselben bildet ein dem zur Hesse'schen Fläche ge-*

*) Für $n = 3$ fällt H' sechsfach zählend mit H zusammen; in der That wird auch dann die durch 2 dividirte Ordnung gleich 24.

hörigen Strahlensysteme adjungirtes Strahlensystem von der Ordnung und Classe

$$4(n-1)(n-2)(4n-9), \quad 4(n-2)(16n^2-67n+71),$$

dessen Brennfläche H′ *ist.**)

Setzt man die Discriminante der quadratischen Gleichung (IV, 3) gleich Null, so erhält man eine Relation, welche sich auf diejenigen Strahlen (xy) bezieht, die vierpunktige Tangenten der Brennfläche sind. Zugleich bestehen dann bekanntlich die Gleichungen:

$$\sum \xi_i \xi_k f_{ik} = \sum \xi_i \xi_k y_s f_{sik} = 0. \tag{7}$$

Nun sind die Haupttangenten der Steiner'schen Fläche charakterisirt durch die Bedingung**)

$$\sum f_{ik} dx_i dy_k = -\sum f_{ikl} y_l dx_i dx_k = 0.$$

Setzt man hier $dx_i = \alpha \xi_i + \beta x_i$, d. h. verlangt man, dass die Tangente einer Hauptcurve von S zugleich Haupttangente von S sei, so geht diese Bedingung in (7) über. Hieraus folgt:

Die Strahlen (xy) des Systems, welche die Brennfläche vierpunktig berühren, sind dadurch charakterisirt, dass je eine Haupttangente der Steiner'schen Fläche im Punkte y mit der Richtung einer der durch y gehenden Hauptcurven zusammenfällt.

Für gewisse conjugirte Punkte von H und S werden nun *beide* Haupttangenten von S in die Richtungen von Hauptcurven fallen. Es sind das diejenigen Punkte, für welche sämmtliche Unterdeterminanten von (IV, 3) verschwinden. Diese bedingen *Hauptpunkte des Strahlensystems (xy), in denen alle benachbarten Strahlen desselben den Strahl (xy) in demselben Knotenpunkte, der zugleich ein Doppelpunkt der eben besprochenen Curve vierpunktiger Berührung ist, der Brennfläche treffen. Jedem derselben entspricht eine lineare Reihe von Punkten ξ, d. h. eine gerade Linie auf der correspondirenden Fläche* H′.

Die *Zahl dieser Hauptpunkte* lässt sich auf folgendem Wege ermitteln.

Soll die Tangentenebene der Brennfläche durch einen Punkt a gehen, so muss nach § II., (13)

$$\Pi = \left| \mathsf{H}_i, f_i, \sum a_k f_{ik}, \sum a_k y_s f_{sik} \right| = 0 \tag{7a}$$

sein. Da nun jeder Tangentenkegel der Brennfläche durch die den Hauptpunkten zugehörigen Doppelpunkte derselben gehen muss, so

---

*) Für $n = 3$ ergeben sich hier, wie es sein muss, zweifach Ordnung und Classe der Doppeltangenten von H.

**) Vgl. B. S. 386.

muss die auf H liegende, durch $\Pi = 0$ bestimmte Curve die Hauptpunkte enthalten. Einem zweiten Punkte b entspricht eine Form

$$\Pi' = 0,$$

welche ebenso wie Π eine $(4n - 9, 3)$ ist.

Dann ergeben sich

$$s = 4(n-2)(4n-9)^2 + 36(n-2)^2(4n-9) + 36(n-2)^3$$

Lösungen, welche zu Durchschnittspunkten der Curven Π, Π' gehören, unter denen sich auch die Zahl h der Hauptpunkte befindet. Bezeichnet man durch M die Classe der Brennfläche, mit C die Zahl, wie oft die eine der zu einem Strahle gehörigen Tangentenebenen der Brennfläche durch einen willkürlichen Punkt a, die andere durch einen zweiten Punkt b geht, so ist

$$s = h + C + M.$$

Die Configuration, welche den Lösungen C entspricht, ist charakterisirt durch die folgenden Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{aligned} \sum \xi_i^1 \mathsf{H}_i &= 0, & \sum \xi_i^2 \mathsf{H}_i &= 0, \\ \sum \xi_i^1 f_i &= 0, & \sum \xi_i^2 \mathsf{H}_i &= 0, \\ \sum \xi_i^1 a_k f_{ik} &= 0, & \sum \xi_i^2 b_k f_{ik} &= 0, \\ \sum \xi_i^1 \xi_k^2 f_{ik} &= 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination der ξ^1, ξ^2 aus diesen Gleichungen entsteht die Bedingung

$$\begin{vmatrix} f_{ik} & f_i & \mathsf{H}_i & \sum b_s f_{is} \\ f_k & 0 & 0 & 0 \\ \mathsf{H}_k & 0 & 0 & 0 \\ \sum f_{ks} a_s & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche man leicht in die Form

$$\left(\sum \mathsf{H}_i \mathsf{H}_k \mathsf{H}_{ik}\right)\left(nf \sum a_i b_k f_{ik} - (n-1) \sum a_i f_i \sum b_i f_i\right) = 0$$

bringt, deren erster Factor für die Frage nicht in Betracht kommt. Die Form

$$J = nf \sum a_i b_k f_{ik} - (n-1) \sum a_i f_i \sum b_i f_i$$

verschwindet, wenn

$$a_i = x_i + \varrho y_i,$$

d. h. für die Doppelpunkte der Curve Π, deren Zahl

$$4(n-2) + 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2$$

beträgt, und für die Lösungen des Systems

$$f = 0, \quad \mathsf{H} = 0, \quad \sum a_i f_i = 0.$$

Da für die letzteren Π ebenfalls verschwindet, so sind von den Lösungen des Systems

$$J = 0, \quad \Pi = 0, \quad \mathsf{H} = 0,$$

deren Zahl

$$8\{4n - 9 + 3(n-2)\}(n-1)(n-2) + 12(n-1)(n-2)^2$$

beträgt,

$$4(n-2)[2 + 2(n-2)^2 + 3(n-2) + n(n-1)].$$

in Abzug zu bringen. Daraus folgt:

$$C = 4(n-2)[14n^2 - 47n + 32),$$

oder:

Es giebt $4(n-2)[14n^2 - 47n + 32]$ *Strahlen, für welche die eine Tangentenebene der Brennfläche durch einen, die andere durch einen anderen willkürlichen Punkt geht.*

Die Anzahl der Hauptpunkte des Strahlensystems ist gleich

$$40(n-2)(4n^2 - 19n + 23);$$

sie giebt zugleich an, wie oft conjugirte Kegel der Hesse'schen und Steiner'schen Fläche sich in zwei ebenen Curven schneiden.

Diese Knotenpunkte der Brennfläche sind zugleich singuläre Punkte ihrer parabolischen und Rückkehrcurve. Da nämlich jede der beiden Gleichungen (13) und (15) die ζ im dritten Grade enthält, welche selbst für die Hauptpunkte linear unbestimmt werden, so gehen durch jeden Hauptpunkt drei Zweige dieser beiden Curven. Eine weitere Betrachtung führt zu folgendem Satze:

Durch jeden Hauptpunkt der Brennfläche gehen je drei Zweige der parabolischen und Rückkehrcurve, welche daselbst zur gemeinsamen Tangente den betreffenden singulären Strahl des Systems haben.

§ VI.

Verhalten der Brennfläche in einem Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche.

Für einen Knotenpunkt von H ist bekanntlich

(1) $$f_{ik} = \alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i;$$

einem solchen entspricht die Gerade

(2) $$\alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0$$

auf der Steiner'schen Fläche S, längs deren die Tangentenebene von S mit der Polarebene des Knotenpunktes in Bezug auf f zusammenfällt. Ferner sei daran erinnert, dass die Tangentenebene eines Punktes x der Hesse'schen Fläche

$$\sum z_i y_k y_l f_{ikl} = 0$$

mit der Tangentenebene der Polarfläche $n-2$. Ordnung

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0$$

des Punktes y der Steiner'schen Fläche im Punkte x coincidirt*). Bezeichnet man nun durch η und ξ zwei auf der Geraden (2) liegende Punkte, so wird der dem Knotenpunkte von H zugehörige osculirende Kegel zweiten Grades eingehüllt von der Ebenenschaar mit dem Parameter μ

$$(3) \qquad \sum z_i \eta_k \eta_l f_{ikl} + 2\mu \sum z_i \eta_l \xi_k f_{ikl} + \mu^2 \sum z_i \xi_l \xi_k f_{ikl} = 0,$$

d. h. seine Gleichung ist die gleich Null gesetzte Discriminante dieser quadratischen Form. Diese Discriminante entsteht auch, wenn man die Gleichung des osculirenden Kegels von H im Knotenpunkte

$$\sum z_i z_k \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

welche man in der Form

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \sum z_i f_{ik} & \alpha_k & \beta_k \\ \alpha_i & 0 & 0 \\ \beta_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

schreiben kann, mit der Determinante

$$(x\ \eta\ \xi\ c)^2$$

multiplicirt, in welcher die c willkürliche Grössen sind.

Nach (1) gehört jede Gerade, welche den Knotenpunkt mit einem Punkte der Geraden (2) verbindet, dem Strahlensystem an. Auf jeder dieser Geraden liegt ein Brennpunkt

$$z_i = x_i + \lambda y_i,$$

bestimmt durch die Gleichung § IV., (3), welche nach Einführung der Werthe (1) die Form

$$(5) \qquad 2\lambda \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = 0,$$

annimmt, in welcher

$$(6) \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

die mit den α, β zweimal geränderte Determinante der Grössen

$$\sum y_s f_{sik}$$

darstellt. Da nun der Gestalt von (6) zufolge λ für zwei Werthe von

*) Vgl. B. S. 385.

$$y_i = \eta_i + \mu\xi_i$$

verschwindet, und für diejenigen 3 Werthe unendlich wird, für die der Coefficient von 2λ in (5) verschwindet, so folgt:

Zu jedem der $10(n-2)^3$ *Knotenpunkte* x *von* H *gehört als singuläre Tangentenebene der Brennfläche die Ebene* (xy), *welche* x *mit der correspondirenden Geraden auf der Steiner'schen Fläche verbindet; sie berührt die Brennfläche längs einer Curve dritter Ordnung, die einen Doppelpunkt in* x *hat. Diese Curve begegnet der Geraden* (2) *in den drei Punkten, in denen dieselbe von der Rückkehrcurve der Steiner'schen Fläche getroffen wird**). *Und die Tangenten des Doppelpunktes der* C_3 *sind zugleich die Kanten des osculirenden Kegels von* H, *welche in die Ebene* (xy) *fallen.*

Die letzte Bemerkung ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung (4), deren linke Seite mit der Form (6) identisch ist, sowie man $z = y$ setzt. Man kann übrigens diese beiden Tangenten im Doppelpunkte der singulären Berührungscurve dritter Ordnung noch anders charakterisiren. Denn bestimmt man aus der Discriminante von (3), indem man $z_i = x\eta_i + \varrho\xi_i$ setzt, die Durchschnittspunkte dieses Kegels mit der Geraden (2), so ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung

$$\sum y_i z_k t_l f_{ikl} = (yzt)$$

setzt, die Gleichung

$$x^2[(\eta\eta\eta)(\eta\xi\xi) - (\eta\eta\xi)^2] + \varrho x[(\eta\eta\eta)(\xi\xi\xi) - (\eta\xi\xi)(\xi\eta\eta)] + \varrho^2[(\eta\eta\xi)(\xi\xi\xi) - (\xi\xi\eta)^2] = 0,$$

welche die Hesse'sche Form der cubischen Gleichung

$$\sum (\eta_i + t\xi_i)(\eta_k + t\xi_k)(\eta_l + t\xi_l) f_{ikl} = (\eta\eta\eta) + 3t(\eta\eta\xi) + 3t^2(\eta\xi\xi) + t^3(\xi\xi\xi) = 0$$

ist. Das heisst:

Der osculirende Knotenkegel von H *schneidet die correspondirende Gerade von* S *in den beiden Punkten, welche das Hesse'sche Paar bilden zu den drei Punkten, in denen jene Gerade von der Polarfläche*

$$\sum Y_i Y_k Y_l f_{ikl} = 0$$

dritter Ordnung des Knotenpunktes getroffen wird.

Der Knotenpunkt von H ist aber auch ein *singulärer Punkt der Brennfläche.* Um die Beschaffenheit derselben zu untersuchen, betrachte man die Gleichung der Tangentenebene der Brennfläche in diesem Punkte, welche durch die Form**)

*) Vgl. B. S. 387.

**) Dieselbe entsteht aus der § V., (7a) gegebenen Gleichung durch Einführung der Gleichungen (1) und Absonderung desjenigen Factors, welcher die singuläre Ebene darstellt.

$$(7) \qquad \left| \sum y_i y_k f_{ikl},\ \sum z_i y_k f_{ikl},\ \alpha_l,\ \beta_l \right| = 0$$

dargestellt wird, falls man für y irgend einen der Punkte $x\eta + \varrho\xi$ einsetzt; die z sind die variabeln Coordinaten in der Gleichung dieser Ebene. Daraus geht hervor, dass diese Ebenen einen rationalen Kegel dritter Classe umhüllen. Und es ist leicht zu zeigen, dass die Doppeltangentenebene desselben mit der singulären Tangentenebene zusammenfällt. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (7) mit der unter (4) angeführten Determinante, so erhält (7), wenn gleichzeitig $y = x\eta + \varrho\xi$ gesetzt wird, die Form:

$$\begin{vmatrix} x^2(\eta\eta\eta) + 2x\varrho(\eta\eta\xi) + \varrho^2(\xi\xi\eta), & x(z\eta\eta) + \varrho(z\xi\eta) \\ x^2(\eta\eta\xi) + 2x\varrho(\eta\xi\xi) + \varrho^2(\xi\xi\xi), & x(z\eta\xi) + \varrho(z\xi\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

Soll diese Ebene mit der singulären Ebene zusammenfallen, so muss sie für einen von Null verschiedenen Werth von ϱ durch den Punkt η gehen. Das liefert aber die Bedingung

$$\begin{vmatrix} x(\eta\eta\xi) + \varrho(\xi\xi\eta), & x(\eta\eta\eta) + \varrho(\eta\eta\xi) \\ x(\eta\xi\xi) + \varrho(\xi\xi\xi), & x(\eta\eta\xi) + \varrho(\eta\xi\xi) \end{vmatrix} = 0,$$

mithin wieder das Hesse'sche Paar. Also folgt:

Die singuläre Ebene berührt den Knotenkegel der Brennfläche längs der beiden Strahlen, in denen diese Ebene den osculirenden Kegel von H *trifft. Die Brennfläche hat also in jedem Knotenpunkte einen osculirenden Kegel vierten Grades dritter Classe, dessen Doppeltangentenebene die singuläre Ebene ist.*

Einem Knotenpunkte von H entsprechen unendlich viele Punkte ξ^1, ξ^2 der adjungirten Fläche H′, welche in zwei Gruppen zerfallen. Der Wurzel $\lambda_1 = 0$ entsprechend, liegen die Punkte ξ^1 auf der dem Knotenpunkte von H entsprechenden Geraden, dieselbe doppelt bedeckend, da ξ^1 sich auf der Durchschnittslinie der Tangentenebenen von H und S in den conjugirten Punkten x und y befinden muss, und durch jeden Punkt der genannten Geraden zwei Tangentenebenen des osculirenden Kegels von H gehen. Zugleich folgt für $\lambda_1 = 0$ aus der in § V, S. 265 gegebenen Gleichung der Tangentenebene von H′:

Jedem Knotenpunkte von H *entspricht eine von den Punkten ξ^1 gebildete Gerade auf* H′*, längs welcher diese letztere Fläche von der Steiner'schen Fläche S berührt wird.*

Den aus (5) folgenden Werthen der Wurzel λ_2 entspricht dagegen das System der Werthe ξ^2, vermöge der Gleichungen

$$\alpha_i(\beta\xi^2) + \beta_i(\alpha\xi^2) - \lambda_2 \sum \xi_k^2 y_s f_{sik} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Eliminirt man aus diesen und den Gleichungen (2) die y, so ergiebt sich

$$\begin{vmatrix} \sum \xi_s^2 f_{sik} & \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_i & 0 & 0 \\ \alpha_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

als Bedingung für die Punkte ξ^2. Nach (4) liegen aber die Punkte ξ^2 auf dem osculirenden Knotenkegel von H. Daraus folgt:

Jedem Knotenpunkte von H *entspricht ein von den Punkten* ξ^2 *gebildeter Kegelschnitt auf* H', *welcher aus der Polarebene des Knotenpunktes durch den osculirenden Kegel von* H *ausgeschnitten wird**).

Auch das Verhalten der Rückkehrcurve der Brennfläche zu den singulären Punkten und Ebenen lässt sich jetzt näher untersuchen. Für die Form $\left(\sum p_i \xi_i\right)^2$ erhält man nämlich die Darstellung

$$-\left(\sum p_i \xi_i\right)^2 = \begin{vmatrix} f_{ik} - \lambda \sum_{p_k} y_s f_{sik} & p_i \\ & 0 \end{vmatrix},$$

oder, nach Einführung der Werthe (1)

$$(8) \qquad \left(\sum p_i \xi_i\right)^2 = \lambda \left\{ \lambda^2 \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} + 2\lambda \begin{bmatrix} p & \alpha \\ p & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & \alpha & \beta \\ p & \alpha & \beta \end{bmatrix} \right\}.$$

Die Quadrate und Producte der ξ werden daher, wenn man den Werth von λ aus (5) einsetzt und den Factor λ fortlässt, durch Ausdrücke dargestellt, welche den in y linear auftretenden Parameter $\varkappa : \varrho$ im siebenten Grade enthalten, aber sämmtlich für die drei Werthe verschwinden, für die auch

$$(9) \qquad \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Null sind. Daher bleiben nur vier Wurzeln, für die (8) verschwindet, d. h. zwei für die lineare Form $\sum p_i \xi_i$ selbst, wie es auch sein muss, da der von den Punkten ξ gebildete Kegel von der zweiten Ordnung ist.

Trägt man nun in die mit dieser linearen Form multiplicirte Bedingung der Rückkehrpunkte der Brennfläche

$$(10) \qquad \sum \xi_m \xi_i \xi_k \xi_l \left\{ \lambda y_s f_{sikl} - f_{ikl} \right\} p_m = 0$$

die Werthe der Producte der ξ ein, so entsteht eine Form, welche jenen Parameter im 17. Grade enthält, aber nach Entfernung der doppelt zu rechnenden drei, für welche die Ausdrücke (9), und der beiden, für die der unwesentliche lineare Factor in (10) verschwinden, vom 9. Grade bleibt. Daraus folgt:

---

*) Man vergleiche den entsprechenden bekannten Satz aus der Theorie der Flächen dritter Ordnung, Eckardt, Schlömilch's Zeitschrift v. J. 1874, S. 259.

Auf jeder singulären Berührungscurve dritter Ordnung der Brennfläche liegen neun (Berührungs-) Punkte ihrer Rückkehrcurve.

Ist dagegen $\lambda = 0$, so hat man anstatt (10) nur die Bedingung

$$\sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} = 0.$$

Dieser Gleichung dritten Grades entsprechend *gehen durch den Knotenpunkt selbst drei Zweige der Rückkehrcurve*, wie auch zu erwarten war, da der osculirende Kegel desselben nach der vorhin ausgeführten Untersuchung drei Rückkehrkanten besitzt.

In Uebereinstimmung hiermit ergab sich in § IV., dass die Abbildung der Rückkehrcurve durch jeden Knoten von H 12fach hindurchgeht.

§ VII.

Das zu der Jacobi'schen Fläche von vier Flächen zweiten Grades, insbesondere zu der Hesse'schen Fläche der Fläche dritter Ordnung gehörige Strahlensystem.

Anstatt die vorigen Betrachtungen direct für den Fall $n = 3$ zu specialisiren, mag zunächst wieder der allgemeinere Fall von *vier bilinearen Gleichungen, welche in Bezug auf x, y symmetrisch sind*, betrachtet werden.

Vier bilineare Gleichungen

$$\sum x_i y_l a_{kil} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

drücken unter der Voraussetzung

$$a_{kil} = a_{kli}, \quad l, i = 1, 2, 3, 4,$$

aus, dass die Polarebenen von x in Bezug auf die vier Flächen zweiten Grades

$$X_k = \sum x_i x_l a_{kil} = 0$$

sich in einem Punkte y schneiden. Jedem Punkte x der Jacobi'schen Fläche vierter Ordnung

$$\mathsf{H} = \left| \sum x_i a_{kil} \right| = 0 \tag{2}$$

entspricht so ein conjugirter Punkt y derselben Fläche. Da zwei conjugirte Punkte unter der Voraussetzung, dass die Flächen X_k keinen Punkt gemeinsam haben, nicht zusammenfallen können, so sind alle Zahlwerthe, welche sich in symmetrischer Weise auf x und y beziehen, durch 2 zu dividiren. *Das Strahlensystem ist daher von der dritten Classe, siebenter Ordnung, die zugehörige Brennfläche von der* 24. *Ordnung, der Classe* 16, *die Rückkehrcurve von der Ordnung* 90, *die parabolische Curve ein Gebilde von der* 162. *Ordnung. Der Rang der*

Brennfläche ist 42, *die Doppelcurve von der Ordnung* 120. *Das Geschlecht* p_1 *des ebenen Schnittes ist* 43. Die letztere Zahl erhält man auch aus der Betrachtung der Curve 30. Ordnung vom Geschlechte 85, auf welche der ebene Schnitt der Brennfläche jetzt *zwei*deutig abgebildet ist. Denn da zwei conjugirte Punkte nie zusammenfallen, so gilt die von Herrn Zeuthen angegebene Formel*)

$$4(p_1-1)=2(85-1),$$

und ebenso erhält man das Geschlecht π_1 des Tangentenkegels der Brennfläche aus der Gleichung

$$4(\pi_1-1)=152,$$

also wird $\pi_1=39$, und jener Kegel enthält 144 Rückkehrkanten, 66 Wendekanten.

Auf jedem Strahle (xy) liegen die beiden Brennpunkte

$$z^1=x+\lambda_1 y,$$
$$z^2=x+\lambda_2 y,$$

bestimmt durch die quadratische Gleichung

$$\left|\sum(x_s-\lambda y_s)\,a_{ks}\right|=0. \tag{3}$$

Es gehören daher zu jedem Punkte x zwei Punkte ξ^1, ξ^2 vermöge der Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum\xi_i^1(x_s-\lambda_1 y_s)a_{ks}&=0,\\ \sum\xi_i^2(x_s-\lambda_2 y_s)a_{ks}&=0,\end{aligned} \tag{4}$$

und ebenso zwei Punkte ξ^1, ξ^2, welche aus

$$\begin{aligned}\sum\xi_k^1(x_i-\lambda_1 y_i)a_{ki}&=0,\\ \sum\xi_k^2(x_i-\lambda_2 y_i)a_{ki}&=0,\end{aligned} \tag{5}$$

zu bestimmen sind. *Die Punkte* ξ^1, ξ^2 *liegen wieder auf der Fläche* H; *die Punkte* ξ^1, ξ^2 *dagegen nach* (5) *auf dem Cayley'schen Symmetroid* S *mit* 10 *Knoten*

$$S=\left|\sum\xi_k a_{ki}\right|=0. \tag{6}$$

Es entspricht aber nicht nur dem Punkte x von H vermöge der Gleichungen ein zweiter Punkt y derselben Fläche, sondern auch jedem Punktepaare x, y von H ein solches ξ, η von S mittelst der Gleichungen

*) Diese Annalen Bd. III, S. 125.

$$\sum x_i \xi_k a_{kil} = 0,$$

(7)

$$\sum y_i \eta_k a_{kil} = 0,$$

wie dies schon Herr Cayley angeführt hat.*)

Führt man die Formen

$$-\mathsf{A} = \begin{vmatrix} \sum x_i a_{kil} & \alpha_l \\ \beta_k & \end{vmatrix},$$

$$-\mathsf{B} = \begin{vmatrix} \sum y_i a_{kil} & \alpha_l \\ \beta_k & \end{vmatrix},$$

ein, so ist auch

$$-\frac{\partial^2 \mathsf{A}}{\partial \alpha_k \partial \beta_l} = \sigma y_i \xi_k,$$

$$-\frac{\partial^2 \mathsf{B}}{\partial \alpha_k \partial \beta_l} = \tau x_i \eta_k;$$

die quadratische Gleichung (3) wird daher

$$-\sigma \sum \xi_k y_i y_l a_{kil} + \lambda P - \lambda^2 \tau \sum \eta_k x_i x_l a_{kil} = 0. \tag{8}$$

Aus der Gleichung, welche durch Differentiation von (7) entsteht

$$\sum dx_i \xi_k a_{kil} + \sum x_i d\xi_k a_{kil} = 0, \tag{9}$$

folgt

$$\sum dx_i \xi_k y_l a_{kil} = 0, \tag{10}$$

$$\sum d\xi_k x_i x_l a_{kil} = 0. \tag{11}$$

Da auch nach (4) und (5)

$$\sum \xi_k \xi_i' y_s a_{kis} = 0,$$

$$\sum \xi_k' x_i x_l a_{kil} = 0,$$

so hat man

Satz 1. *Die Tangentenebenen von* H *in den conjugirten Punkten* x, y *enthalten die Punkte* ξ^1, ξ^2; *die Tangentenebenen in den entsprechenden Punkten* ξ, η *von* S *die Punkte* ξ^1, ξ^2.

*) First memoir on Quartics, Proceedings of the London Math. Soc. III, S. 49.

Aus der durch Differentiation von (9) entstehenden Gleichung

$$\sum d^2 x_i \xi_k a_{kil} + 2\sum dx_i d\xi_k a_{kil} + \sum x_i d^2 \xi_k a_{kil} = 0,$$

folgt für $d\xi_k^2 \equiv d\xi_k$

$$\sum dx_i d\xi_k x_i a_{kil} = 0,$$

oder nach (9)

$$\sum dx_i dx_i \xi_k a_{kil} = 0,$$

als Bedingung dafür, dass die der Richtung dx auf H entsprechende Richtung $d\xi$ auf S die einer Haupttangente von S ist.

Die Bedingung der parabolischen Punkte von S wird daher

$$\begin{vmatrix} \sum \xi_k a_{kil} & \sum \xi_k y_s a_{kis} & c_i \\ \sum \xi_k y_s a_{kis} & 0 & 0 \\ c_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{Bmatrix} c \\ c \end{Bmatrix} \sum \xi_k y_s y_i a_{kil} = 0, \tag{12}$$

wenn man durch den ersten Factor die mit den c geränderte symmetrische Determinante der Elemente

$$\alpha_{il} = \sum \xi_k a_{kil}$$

bezeichnet. Das heisst:

Satz 2. *Die parabolischen Punkte ξ von S sind dadurch charakterisirt, dass die Tangentenebene von S in dem zugeordneten Punkte η durch ξ geht.*

Die conjugirten Punkte von ξ^1 und ξ^2 sind nach (4) die beiden auf (xy) liegenden Punkte η^1 und η^2

$$\eta^1 = x - \lambda_1 y,$$
$$\eta^2 = x - \lambda_2 y,$$

welche wieder auf H liegen und mit x, y und den entsprechenden beiden Brennpunkten z^1, z^2 je ein harmonisches Paar bilden. Also:

Satz 3. *Jeder Strahl (xy) schneidet die Jacobi'sche Fläche* H *in zwei Punkten η, welche zu x, y und je einem der Brennpunkte z harmonisch liegen.*

Die Tangentenebene im Punkte ξ^1 ist nach (11)

$$\sum X_k \eta_i^1 \eta_i^1 a_{kil} = \sum X_k (x_i - \lambda_1 y_i)(x_i - \lambda_1 y_i) a_{kil} = 0,$$

oder nach (1)

$$(13) \qquad \sum X_k x_i x_l a_{kil} + \lambda_1^2 \sum X_k y_i y_l a_{kil} = 0.$$

Setzt man hier $X_k = \xi_k^2$, so wird nach (5)

$$\sum \xi_k^2 x_i x_l a_{kil} = 0,$$

$$\sum \xi_k^2 y_i y_l a_{kil} = 0,$$

d. h. die Tangentenebene von S im Punkte ξ^1 geht durch ξ^2 und umgekehrt. Das heisst

Satz 4. *Die Geraden* $(\xi^1 \xi^2)$ *sind Doppeltangenten der Fläche S, deren Berührungspunkte in* ξ^1 *und* ξ^2 *fallen. Jedem Paare conjugirter Punkte* x, y *von* H *entspricht so eine Doppeltangente von S, aber auch umgekehrt jeder Doppeltangente von S ein einziges Paar von Punkten* x, y *auf* H, da den Punkten ξ^1, ξ^2 eindeutig wieder nach (5) η^1 und η^2 entsprechen.

Wenn der Coefficient P in (8) verschwindet, so fallen die beiden Brennpunkte z^1, z^2 gleichzeitig mit den Punkten η^2, η^1 zusammen; zugleich coincidiren auch nach (13) die beiden Tangentenebenen in den Punkten ξ^1, ξ^2. Die Punktepaare $(x\,y)$ für welche $P = 0$ wird, bilden, wie man leicht findet, eine Curve 20. Ordnung, die Regelfläche der zugehörigen Strahlen $(x\,y)$ ist ebenfalls von der 20. Ordnung und die auf denselben befindlichen Brennpunkte s bilden eine Curve 60. Ordnung. Also:

Satz 5. *Diejenigen Verbindungslinien conjugirter Punkte von* H, *welche* H *in zwei zu* x, y *harmonisch liegenden Punkten begegnen, bilden eine Regelfläche 20. Ordnung, welche* H *ausser in der von den Punkten* $x\,y$ *gebildeten Curve 20. Ordnung in einer Curve 60. Ordnung schneidet. Den Punkten der ersteren entsprechen Doppeltangentenebenen von S; die letztere bildet mit der zweifach zählenden Curve 18. Ordnung, längs welcher die Brennfläche von* H *berührt wird, den vollständigen Schnitt von* H *mit der Brennfläche.*

Die durch einen Punkt x^0 von H, dessen entsprechender Punkt auf S ξ^0 sein möge, gehenden 6 Strahlen des Systems, welche durch die Gleichungen

$$\sum x_i x_l^0 a_{kil} + \varrho \sum x_l x_i a_{kil} = 0,$$

bestimmt sind, liegen auf der Kegelfläche

$$\sum X_l X_i \xi_k^0 a_{kil} = 0,$$

deren Spitze der Punkt x_0 ist, und welche aus der Tangentenebene von H in x^0 die beiden Richtungen ausschneidet, deren Correspondirende die beiden Haupttangenten von S im Punkte ξ^0 sind. Darnach entspricht dem Punkte $x_i - \lambda_1 y_i$ die Kegelfläche

$$K = \sum X_i X_i \xi_k^1 a_{kil} = 0,$$

welche nach den unter (13) angemerkten Relationen durch die Punkte x, y geht. Aber die Tangentenebene von K im Punkte x ist

$$\sum X_i x_i \xi_k^1 a_{kil} = 0,$$

und dies ist nach III, (23) zugleich die Tangentenebene der Brennfläche im Punkte $x + \lambda_1 y$. Das liefert den Satz:

Satz 6. *Jedem Punkte von* H *entspricht ein von ihm ausgehender Kegel zweiter Ordnung, zu dessen Kanten insbesondere die 6 demselben entsprechenden Strahlen des Systems gehören, und jeder dieser Kegel berührt die Brennfläche in 6 verschiedenen Punkten.*

Das Symmetroid S enthält 10 Knotenpunkte, denen ebenso viele Gerade auf H entsprechen. Die parabolische Curve von S geht durch jeden Knotenpunkt 6 mal hindurch,*) die ihr auf H entsprechende Curve 18. Ordnung, längs deren H von der Brennfläche berührt wird, muss daher jede der 10 Geraden in 6 Punkten treffen. Man hat also den Satz:

Jede der 10 Geraden der Jacobi'schen Fläche H wird von der Brennfläche in 6 Punkten berührt.

Satz 7. *Die drei in einer Ebene liegenden conjugirten Punktepaare $x\,y$ bilden die Ecken eines vollständigen Vierseites.*

Schreibt man nämlich die Bedingung (1) in der Form

$$[x, y] = 0,$$

so sind durch

$$[x^1, y^1] = 0, \quad [x^2, y^2] = 0,$$

zwei conjugirte Punktepaare bezeichnet. Liegen dieselben in einer Ebene, und setzt man demgemäss

$$y^2 \equiv \alpha x^2 + \beta x^1 + \gamma y^1,$$

so wird

$$[x^2, y^2] = [x^2, \alpha x^2 + \beta x^1] + [x^2, \gamma y^1] = 0.$$

Addirt man hierzu

$$\gamma \frac{\beta}{\alpha} [x^1, y^1] = \left[\frac{\beta}{\alpha} x^2, \gamma y^1\right] = 0,$$

*) Mit Hülfe der von Cayley, Sec. Memoir on Quartics, Proceed. III, S. 200 gegebenen Gleichung von S überzeugt man sich leicht, dass die 6 Richtungen im allgemeinen verschieden sind.

so entsteht

$$[x^2,\ \alpha x^2+\beta x^1]+\frac{1}{\alpha}[\alpha x^2+\beta x^1,\ \gamma y^1]=0,$$

oder

$$[\alpha x^2+\beta x^1,\quad \alpha x^2+\gamma y^1]=0;$$

d. h. es sind auch

$$x^3=\alpha x^2+\beta x^1=y^2-\gamma y^1,$$
$$y^3=\alpha x^2+\gamma y^1=y^2-\beta x^1,$$

conjugirte Punkte, welche mit den beiden ersten in der angegebenen Lage sich befinden.

Man betrachte nun drei durch einen willkürlichen Punkt a gehende Strahlen des Systems, welche die conjugirten Paare x^1y^1, x^2y^2, x^3y^3, enthalten. Die beiden Ebenen $X(x^1x^2x^3)$ und $Y(y^1y^2y^3)$ welche übrigens auf vierfache Weise gewählt werden können, schneiden sich in einer Geraden g. Bezeichnet man mit i, k, l irgend drei verschiedene Indices aus der Gruppe 1, 2, 3, so schneiden sich die Geraden $(x^i x^k)$ und $(y^i y^k)$ in einem Punkte P_l. Diese drei Punkte P liegen auf der Geraden g, und ihre conjugirten Punkte Q befinden sich mit ihnen in einer Ebene E, der harmonischen Ebene zu X, Y und der durch g und den Punkt a bestimmten. Die drei Geraden PQ, welche sich gegenseitig in den Punkten A, B, C schneiden, sind die drei in E liegenden Strahlen des Systems. Geht man umgekehrt von der Ebene E aus, und wählt in derselben die drei in gerader Linie befindlichen Punkte, was noch auf vierfache Art geschehen kann, so kann man durch den Punkt A fünf Strahlen des Systems ziehen; jeder derselben wird mit den beiden jetzt eindeutig zugeordneten, welche durch B und C gehen, einen gemeinsamen Punkt a besitzen. Jedem Punkte a entsprechen so im allgemeinen $4 . 35 = 140$ Ebenen E, jeder Ebene E aber 20 Punkte a.

Ist nun a ein Punkt der Rückkehrcurve der Brennfläche, so werden x^1, x^2, x^3 benachbarte Punkte von H, und ebenso gehen die Punkte P in drei benachbarte Punkte ξ^1, die Q in die entsprechenden Punkte η^1 über. Die Gerade g wird also Haupttangente von H, und bildet zugleich die Richtung einer durch ξ^1 gehenden Hauptcurve von H, zu welcher der Durchschnittspunkt A der benachbarten Strahlen PQ gehört. Dann folgt:

Satz 8. *Die harmonischen Ebenen, welche den Punkten der Rückkehrcurve der Brennfläche zugeordnet sind, sind parabolische Ebenen derselben.* Die parabolischen Punkte derselben liegen auf den Strahlen $(\xi^1\eta^1)$, sie gehören zu der Richtung derjenigen Hauptcurve von H, welche nicht mit einer Haupttangente von H zusammenfällt. Jeder parabolischen Ebene der Brennfläche entsprechen 5 Punkte der Rückkehrcurve derselben.

Man kann diese Punkte aber noch anders charakterisiren. Die Bedingung, dass der Punkt $z = x + \lambda_1 y$ ein Punkt der Rückkehrcurve sei, ist nach III, (13)

$$\sum \xi_i^1 \xi_l^1 \xi_k^1 a_{kil} = 0. \tag{14}$$

Verschwindet nun der erste Coefficient in (8) so ist

$$\sum y_i y_l \xi_k a_{kil} = 0, \tag{15}$$

und eine Wurzel von (8) ist $\lambda_1 = 0$. Der entsprechende Werth von ξ^1 ist dann $\xi^1 = y$, und ξ^1 fällt mit ξ zusammen. Da dann aber die Bedingung (15) mit (14) identisch wird, muss jeder Punkt, für den (15) erfüllt ist, zu einer parabolischen Ebene Veranlassung geben. In der That wird, wenn man für λ wieder $\frac{\mu}{\nu}$ schreibt, für $\mu = 0$ die Bedingung, dass der Strahl $(x+dx,\ y+dy)$ den Strahl (xy) schneidet

$$\nu \frac{d\varrho}{\varrho} x_i = x_i d\nu + y_i d\mu + \nu dx_i,$$

und sie liefert

$$dx_i = x_i \tau - \frac{d\mu}{\nu} y_i, \quad \tau = \frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{d\nu}{\nu}$$

während dy_i aus den Gleichungen

$$\sum dy_i x_l a_{kil} = \frac{d\mu}{\nu} \sum y_i y_l a_{kil}$$

zu bestimmen ist.

Setzt man nun

$$d^2 x_i = p x_i + q y_i + r\, dy_i,$$
$$d^2 y_i = p'\, dy_i,$$

so werden die Gleichungen zwischen diesen Differentialen

$$\sum x_i d^2 y_l a_{kil} + 2 \sum dx_i dy_l a_{kil} + \sum d^2 x_i y_l a_{kil} = 0$$

sämmtlich erfüllt, wenn man

$$\frac{d\mu}{\nu} p' + q + 2\tau \frac{d\mu}{\nu} = 0,$$

$$r - 2 \frac{d\mu}{\nu} = 0$$

setzt. Nun entspricht der parabolischen Curve auf S eine von Punkten x gebildete Curve 18. Ordnung, längs welcher die Brennfläche H berührt, und dieser eine von den conjugirten Punkten y gebildete Curve 22. Ordnung; die Geraden (xy) sind dabei Tangenten von H in den Punkten dieser letzteren Curve. *Auf diese Curven ist eine parabolische Curve der Brennfläche eindeutig bezogen, und die Richtung, nach welcher*

drei benachbarte Strahlen in einer Ebene liegen, ist durch eine Haupttangente von H *im Punkte y bezeichnet*, wie aus der Gleichung $d^2 y_i \equiv dy_i$ folgt. Die Ordnung der parabolischen Curve auf der Brennfläche ist, den Gleichungen

$$P - \lambda\tau \sum \eta_k x_i x_l a_{kil} = 0$$

$$\alpha_x + \lambda \alpha_y = 0$$

entsprechend, gleich 102.

Ferner ist die Richtung $h_i \equiv dx_i$, welche der parabolischen Tangente von S im Punkte ξ entspricht, wie aus der unter (12) geführten Betrachtung hervorgeht, bestimmt durch die Gleichungen

$$\sum h_i \xi_k a_{kil} = \varrho \sum \xi_k y_s a_{kls}; \qquad l = 1, 2, 3, 4;$$

$$\sum h_i y_i \xi_k a_{kil} = 0,$$

welche erfüllt sind, wenn man

$$h_i = x_i \tau - \frac{d\mu}{\nu} y_i,$$

setzt. Und so hat man

Satz 9. *Es entsprechen längs der Curve 22. Ordnung denjenigen Haupttangenten von* H, *welche zu parabolischen Ebenen der Brennfläche gehören, oder auch den Richtungen der Strahlen des Systems längs der Berührungscurve 18. Ordnung von* H *mit der Brennfläche, die parabolischen Haupttangenten des Symmetroides S.*

Ausser der eben erwähnten parabolischen Curve 102. Ordnung existirt noch eine parabolische Curve auf der Brennfläche, welche aus 20 ebenen Curven dritter Ordnung besteht, so dass die vollständige parabolische Curve in der That ein Gebilde 162. Ordnung ist. Diese letztere Gruppe von Curven entspricht der Gleichung

$$\sum \zeta_i^1 \zeta_l^1 \xi_k^2 a_{kil} = 0. \tag{16}$$

Denn dem Punkte $\eta^2 = x - \lambda_2 y$ von H entspricht der Kegel

$$\sum X_i X_l \xi_k^2 a_{kil} = 0,$$

dessen Spitze η^2 ist. Setzt man aber $X_i = y_i + \mu \zeta_i^1$ so wird

$$\sum X_i X_l \xi_k^2 a_{kil} = \sum \xi_k^2 y_i y_l a_{kil} + 2\mu \sum y_i \zeta_l^1 \xi_k^2 a_{kil}$$

$$+ \mu^2 \sum \zeta_i^1 \zeta_l^1 \xi_k^2 a_{kil}$$

nach (16) gleich Null für jeden Werth von μ, d. h. dieser Kegel zerfällt in zwei Ebenen, von denen die eine die Ebene x, y, ζ^1 ist. Das

ist aber nur dann möglich, wenn der Punkt ξ_k^2 einer der 10 Knotenpunkte von S ist. Einem solchen Knotenpunkte entspricht eine Gerade g auf H, und die von einem beliebigen Punkte η^2 derselben ausgehenden Strahlen des Systems liegen in zwei durch g gehenden Ebenen E_1, E_2, nämlich denjenigen, in welche jener Kegel zerfällt. Die beiden Curven dritter Ordnung C_1, C_2 in welchen H von E_1 und E_2 geschnitten wird, sind also aus conjugirten Punktepaaren gebildet; ihnen entsprechen singuläre Tangentenebenen der Brennfläche. Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt η^2 von g einen etwa in E_1 liegenden Strahl, welcher H in dem Paare x, y trifft, so ist der zweite Schnittpunkt derselben mit H durch η^1 zu bezeichnen, und der conjugirte Punkt dieses letzteren ξ^1 befindet sich wieder in E_1. Die beiden Punkte z_1, z_2 welche harmonisch zu x, y und η^1, η^2 liegen, sind Punkte der Brennfläche; demnach ist z_2 der Punkt, in dem dieselbe von der parabolischen Ebene E_1 berührt wird. Die Punkte z_2 aber können nur dann auf g fallen, wenn einer der Punkte x auf g rückt, was dreimal geschieht. Daher ist die Curve, längs der die Brennfläche von der Ebene E_1 berührt wird, von der dritten Ordnung, wie behauptet wurde. Und endlich entspricht den Punkten ξ^1 der Curve dritter Ordnung C_1 eine von Punkten ξ^1 gebildete Curve auf S, welche von den Berührungspunkten der von dem Knotenpunkte von S an die Fläche gezogenen Tangenten gebildet wird (singuläre Doppeltangenten von S). Aus den letzten Bemerkungen folgt der von Herrn Cayley*) bereits angegebene Satz:

Jeder Tangentenkegel aus einem der Knotenpunkte des Symmetroides S zerfällt in zwei Kegel 3. Ordnung, von denen jeder dasselbe längs einer Curve 6. Ordnung berührt, denen je eine ebene Curve 3. Ordnung auf der Jacobi'schen Fläche H zugehört.

Wird jetzt vorausgesetzt, *dass die a_{kil} ein für alle Indices symmetrisches System bilden*, so hat man den Fall des zu der *Hesse'schen Fläche der Fläche dritter Ordnung* welche durch die Form

$$f = \sum x_i x_k x_l a_{ikl}$$

bestimmt ist, *gehörigen Strahlensystems*. Die Flächen H und S, und ebenso die Punkte y und ξ, sowie ξ^1, ξ^1 und ξ^2, ξ^2 fallen zusammen. Den im vorigen entwickelten Sätzen entsprechen daher ebenso viel Eigenschaften dieses speciellen Strahlensystemes, die hier nur kurz angeführt werden sollen.**)

*) Third Memoir on Quartics, Proceed. III, S. 247.

**) Die Beziehungen zwischen den Punkten x, y, ζ der Hesse'schen Fläche ergeben in einfachster Weise namentlich auch die Sätze, welche Herr Sturm dargelegt hat. Man vergl. das Capitel IV von dessen synthetischen Untersuchungen über die Fläche dritter Ordnung, sowie die folgenden Citate.

Nach Satz (4) entspricht jedem Strahle $(x\,y)$ eine *Doppeltangente von* H *mit den Berührungspunkten* ξ^1, ξ^2.*) Die 6 Strahlen des Systems, welche durch einen Punkt von H gehen, liegen auf dem Polarkegel zweiten Grades, welcher zu dem conjugirten Punkte gehört, und jeder dieser Kegel berührt die Brennfläche in 6 verschiedenen Punkten.**) *Letztere kann daher auch als Umhüllungsgebilde der speciellen Polarflächen zweiter Ordnung angesehen werden;* man hat so die vollständigste Analogie mit der mehrfachen Erzeugung der Cayley'schen Curve für die Hesse'sche Curve einer ebenen Curve dritter Ordnung.

Die Bedingung für die Punkte der Rückkehrcurve der Brennfläche wird nach (14)

$$\sum \xi_i \xi_k \xi_l a_{ikl} = 0;$$

d. h. *der Punkt* ξ *muss auf der gemeinsamen****) *parabolischen Curve von* H *und* f *liegen.* Hieraus ergiebt sich die Construction derjenigen Strahlen des Systems, welche Rückkehrpunkte der Brennfläche liefern, sowie der Rückkehrpunkte selbst, in folgender Weise. Man construire zu jedem Punkte ξ der gemeinsamen parabolischen Curve von f und H den conjugirten Punkt η, und die von demselben ausgehenden Strahlen des Systems, auf denen conjugirte Punkte x, y liegen.

Die vierten harmonischen Punkte zu x, y *und* η *bilden die gesuchte Rückkehrcurve.* Hierbei ist indessen folgendes zu bemerken. Wenn für einen Punkt x von H auch f verschwindet, so fällt der eine der beiden Punkte ξ, etwa ξ^1, mit x zusammen; der andere, welcher den Gleichungen

$$\sum \xi_i^2 f_i = 0, \qquad \sum \xi_i^2 \mathsf{H}_i = 0$$

genügt, liegt auf der Tangente der gemeinsamen parabolischen Curve von f und H, *welche also selbst eine Doppeltangente von* H *ist.*†) Von den 6 Doppeltangenten, die man von einem Punkte jener letzteren Curve an H ziehen kann, kommt daher hier eine in Wegfall, so dass jedem Punkte derselben fünf Punkte der Rückkehrcurve entsprechen.

Jedem Punkte der Rückkehrcurve entspricht eine parabolische Ebene der Brennfläche, deren parabolischer Punkt eindeutig mit der parabolischen Curve 12. Ordnung von H verknüpft ist. Ist x ein Punkt dieser letzteren, so ist die parabolische Ebene der Brennfläche die durch den Strahl $(x\,y)$ und die parabolische Tangente von H bestimmte. Der parabolische Punkt selbst liegt auf dem Strahle $x\,y$ und

*) Sturm, a. a. O. S. 136, 137.

**) Vgl. Satz 6.

***) Vgl. B. S. 389.

†) Sturm a. a. O. S. 150.

gehört zu der Richtung der zweiten durch x gehenden Hauptcurve von H, d. h. zur Tangente der parabolischen Curve von H, welche eine algebraische Hauptcurve von H ist. *Und die Ordnung dieser parabolischen Curve der Brennfläche ist,* der Gleichung

$$\sigma \sum \mathsf{H}_i y_i - \lambda P = 0,$$

welche für

$$\lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_y}$$

vom Charakter (3, 2) wird, entsprechend, *gleich 72.*

Ausser dieser parabolischen Curve hat man in den 10 singulären Tangentenebenen der Brennfläche, welche zu den Knotenpunkten von H gehören, 10 Curven dritter Ordnung, welche ebenfalls als parabolische Curven anzusehen sind. Und ferner besteht eine *dritte Gruppe parabolischer Curven der Brennfläche aus 20 in den Ebenen der zerfallenden Polarkegel zweiter Ordnung liegenden Curven dritter Ordnung.* Diese 20 Curven bilden mit den 10 eben genannten Curven dritter Ordnung und der vorhin erwähnten Curve von der Ordnung 72 wieder die *vollständige* parabolische Curve 162. Ordnung.*) Endlich folgt noch:

Der von einem Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche H *an diese gelegte Tangentenkegel zerfällt in zwei Kegel dritter Ordnung welche* H *längs der beiden Curven dritter Ordnung berühren, in denen* H *durch den in ein Ebenenpaar zerfallenden Polarkegel des Knotenpunktes geschnitten wird.*

Die Bedingungen für das Auftreten einer Spitze der Rückkehrcurve lauten nach § III, (26) für die Form dritter Ordnung f

$$\sum \xi_i \mathsf{A}_{ik} = \sigma \sum \zeta_i \zeta_l a_{kil}; \qquad k = 1, 2, 3, 4;$$

$$\sum \xi_i \zeta_k \zeta_l a_{ikl} = 0,$$

$$\sum \xi_i k_i = 0,$$

$$\sum \zeta_i \zeta_k \zeta_l a_{ikl} = 0,$$

$$\mathsf{A}_{ik} = \sum (x_s - \lambda y_s) a_{sik}.$$

Nun ist die Fläche

$$\sum X_i X_k \mathsf{A}_{ik} = 0$$

*) Zu demselben Ergebniss führt auch die Betrachtung der Form (25) in § IV; sie verschwindet, wenn $\sum \mathsf{H}_i y_i = 0$ ist, oder wenn alle dreireihigen Unterdeterminanten der A_{ik} Null werden; letzteres führt auf die 20 parabolischen Curven dritter Ordnung.

der zum conjugirten Punkte η von ξ gehörige Polarkegel, und die angegebenen Gleichungen, aus denen

$$\sum \xi_i \xi_k A_{ik} = 0,$$

folgt, sagen aus, dass die Tangentenebene des auf demselben in einer willkürlichen Ebene liegenden Punktes ξ mit der Tangentenebene von H in dem zu ξ conjugirten Punkte zusammenfällt, oder dass jener Kegel die genannte Ebene berührt.

Die Bedingungen hierfür lassen sich, wenn man an Stelle von ξ einen Augenblick x setzt, durch das Verschwinden der folgenden Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{ik} & H_i & c_i \\ H_k & 0 & 0 \\ c_k & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

bei willkürlichen Werthen der c ausdrücken. Wie ich bei einer anderen Gelegenheit*) gezeigt habe, giebt es 60 Punkte dieser Art, welche der parabolischen Curve von H angehören, woraus auf die Existenz von 300 Spitzen der Rückkehrcurve zu schliessen ist.

Dies aus den früheren allgemeinen Untersuchungen hergeleitete Resultat lässt sich auf einem anderen Wege bestätigen. Durch eine Spitze a der Rückkehrcurve gehen vier unendlich nahe Strahlen; denselben entsprechen zwei benachbarte parabolische Tangenten g und g' von H, und zwar so, dass g selbst eine Tangente der parabolischen Curve wird.**) Das letztere aber erfordert, dass die Richtungen der beiden Hauptcurven, welche von einem Punkte der parabolischen Curve von H ausgehen, zusammenfallen.

Dieses Zusammenfallen findet aber nur für diejenigen Punkte von H statt, für welche die Discriminante der quadratischen Gleichung

$$L = P^2 - 4\sigma\tau f \sum H_i y_i,$$

verschwindet. Die Fläche L ist von der 10. Ordnung, sie schneidet H in einer Curve 40. Ordnung. Die Sehnen dieser Curve, welche dem Strahlensystem angehören, bilden eine Regelfläche von der Ordnung 40, welche H in der Curve zusammenfallender Hauptcurvenrichtungen schneidet und längs einer Curve 60. Ordnung berührt, welche letztere aus denjenigen Punkten gebildet ist, die den Berührungspunkten vierpunktiger Tangenten von H als conjugirte entsprechen.

*) B. S. 393.

**) Diese Punkte sind also auch die Asymptotenpunkte der parabolischen Curve von H, in denen dieselbe von der Curve vierpunktiger Berührung berührt wird. Letztere ist, wenn man von den vierfach zählenden singulären Geraden von H absieht, von der 40. Ordnung und berührt daher die Fläche f in 60 Punkten.

Die gesuchten Schnittpunkte von L, f und H aber sind bestimmt durch die Gleichungen

$$P = 0, \quad f = 0, \quad \mathsf{H} = 0,$$

welche in Uebereinstimmung mit dem vorigen auf 60 auf der parabolischen Curve von H liegende Punkte führt, da $P = 0$ selbst eine Fläche fünfter Ordnung darstellt.

Die Brennfläche berührt H längs der Curve 18. Ordnung, längs welcher H selbst von der Fläche

$$\sum \mathsf{H}_i \mathsf{H}_k \mathsf{H}_{ik} = 0$$

berührt wird. Und der Fläche fünfter Ordnung $P = 0$ entsprechend giebt es auch hier eine von conjugirten Punktepaaren $x\,y$ gebildete Curve 20. Ordnung auf H. Die Verbindungslinien $(x\,y)$ schneiden H in den beiden zu x und y harmonisch liegenden Brennpunkten, d. h. in einer Curve 60. Ordnung, welche mit der zweifach zählenden Curve 18. Ordnung den vollständigen Schnitt von H mit der Brennfläche bildet, und die conjugirten Punkte der beiden auf $(x\,y)$ liegenden Punkte jener Curve 60. Ordnung sind die beiden Berührungspunkte der Doppeltangentenebenen von H.*)

Nach der allgemeinen Untersuchung in § V muss das Strahlensystem *40 Hauptpunkte* enthalten. Diese sind hier auch leicht direct nachzuweisen. Denn damit zu einem Werthe von λ in den Gleichungen

$$\sum \xi_i (x_i - \lambda y_i) a_{ikl} = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

unendlich viele ξ gehören können, muss $x_l - \lambda y_l$ selbst ein Knotenpunkt von H sein. Man hat also nur zu untersuchen, wie oft Strahlen des Systems durch einen Knotenpunkt gehen, da dies vier mal geschieht,**) so wird man auch hier auf 40 Hauptpunkte geführt.

Man betrachte nun einen der vier Strahlen s dieser Art, welcher durch den Knotenpunkt A geht, in welchem die drei Geraden a, b, c von H zusammenlaufen.

Da s zwei conjugirte Punkte x, y verbindet, so sind die Ebenen sa, sb, sc Ebenen zerfallender Polarkegel zweiten Grades. *Die drei in denselben liegenden Curven dritter Ordnung gehen daher gleichzeitig durch die beiden Punkte x, y hindurch;* man erkennt so unmittelbar die dreifachen Punkte, welche die Abbildung der parabolischen Curve in jedem der beiden zu dem Hauptpunkte gehörigen Punkte x, y hat,

*) Sturm, a. a. O. S. 141.

**) Es sind dies die Strahlen f, mit deren Betrachtung in anderer Beziehung sich Clebsch, Journal von Crelle-Borchardt Bd. 59, S. 220 und Sturm, a. a. O. S. 168 beschäftigt haben.

und ebenso, dass der Strahl s selbst gemeinschaftliche Tangente der drei Zweige der parabolischen Curve auf der Brennfläche ist.

Ueber die Rückkehrcurve der Brennfläche mag hier nur noch folgende Bemerkung gemacht werden. Nach § IV ist die Abbildung dieser Curve auf H von der Ordnung 100. Aber die Gleichung derselben ist jetzt die gleich Null gesetzte Resultante der Form § IV, (23)

$$-2a_y P\sigma + \lambda D + \lambda^2 E + \lambda^3 F - 2a_x \tau P\lambda^4 = 0.$$

und

$$\Delta = -\sigma \sum \mathsf{H}_i y_i + \lambda P - 6\tau f\lambda^2 = 0,$$

und verschwindet daher mit τ. Demgemäss reducirt sich die Ordnung der Abbildung um 10 Einheiten; in der That haben auch die 10 der Bedingung $\tau = 0$*) entsprechenden Geraden von H die Eigenschaft dass alle zugehörigen Strahlen des Systems sich in demselben Knotenpunkte von H schneiden. Damit steht in Zusammenhang, dass die Rückkehrcurve den singulären Ebenen nicht mehr in 9, sondern nur noch in 6 von den Knotenpunkten verschiedenen Punkten begegnet. Die Resultante selbst ist von der Form

$$Af + BP^2 = 0,$$

die Punkte der parabolischen Curve $f = 0$, $P = 0$, $\mathsf{H} = 0$, gehören also jetzt auch der Rückkehrcurve an, etc.

§ VIII.

Ueber eine Aufgabe aus der Theorie der ebenen Curven.

Sind zwei ebene Curven durch drei biternäre Gleichungen eindeutig auf einander bezogen, so liefert die der Untersuchung des § III über die Rückkehrcurve entsprechende Formel die *Covariante, welche die Spitzen der von den Verbindungsgeraden entsprechender Punkte umhüllten Curve bestimmt.* Dieses Verhältniss soll insbesondere für die Hesse'sche und Steiner'sche Curve einer Curve n. Ordnung $f = 0$, hier noch kurz erläutert werden.

Die Spitzen der Cayley'schen Curve werden demnach charakterisirt durch die Gleichung

$$(1) \qquad \sum \xi_i \xi_k \xi_l [\mu y_s f_{sikl} - 2\nu f_{ikl}] = 0,$$

während aus den Gleichungen

$$\sum \xi_k (f_{ik}\nu - \mu y_s f_{sik}) = 0,$$

folgt

*) B. S. 391.

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sum \zeta_k f_k &= 0, \\ \sum \zeta_k \mathsf{H}_k &= 0, \end{aligned}$$

so dass die Werthe der ζ den Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \mathsf{H}_1 & \mathsf{H}_2 & \mathsf{H}_3 \end{matrix} \right\|$$

proportional sind. Der Punkt

$$z_i = \nu x_i + \mu y_i$$

ist der den Punkten x, y von H und S zugeordnete Punkt der Cayley'schen Curve C. Die Gleichung, welche den Werth von $\mu : \nu$ bestimmt, lautet jetzt

$$(3)\qquad -\nu\sigma \sum y_i y_k y_l f_{ikl} + n(n-1)\tau\mu f = 0.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth in (1) ein, so entsteht

$$(4)\qquad \sum \zeta_i \zeta_k \zeta_l \left(y_s f_{sikl}\, \sigma \sum y_m y_n y_p f_{mnp} - 2\tau n (n-1) f f_{ikl} \right) = 0,$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit σ, so kann man den ersten Term:

$$\sigma^2 y_s f_{sikl} \sum y_m y_n y_p f_{mnp},$$

ersetzen durch

$$f_{sikl} \sum \mathsf{H}_{sm} \mathsf{H}_{np} f_{mnp},$$

Setzt man andererseits

$$\sigma\tau = -\frac{\sigma}{c_x^2} \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = -S,$$

wo S eine in der Theorie der Curven bekannte Covariante*) ist, so ergiebt sich an Stelle von (1) die Covariante

$$(5)\qquad \sum \mathsf{H}_{sm} \mathsf{H}_{np} f_{sikl} f_{mnp} \zeta_i \zeta_k \zeta_k + 2n(n-1) f S \sum \zeta_i \zeta_k \zeta_i f_{ikl} = 0,$$

welche die x in der Ordnung $18n - 39$ enthält, wenn man noch die Werthe der ζ aus (2) einsetzt. Man erhält also

$$3(n-2)(18n-39)$$

Durchschnittspunkte mit H. Aber diese liefern nicht sämmtlich Spitzen von C. Denn für $\nu = 0$ ist $f = 0$ und die ζ werden den x proportional, und man erkennt sofort aus (4) dass die Gleichung (5) in

*) Vgl. Clebsch Ueber einige von Steiner behandelte Curven, Journal von Crelle-Borchardt Bd. 64, S. 292.

den $3n(n-2)$ Wendungspunkten von f quadratisch verschwindet. Andererseits wird für $\mu = 0$ auch $\sum y_i y_k y_l f_{ikl} = 0$, und die ξ sind den y proportional. Die Anzahl dieser Punkte, welche den Wendungspunkten der Steiner'schen Curve entsprechen*), beträgt der Gleichung

$$\left(\sum y_i y_k y_l f_{ikl}\right)^2 \equiv \sum \mathsf{H}_i \mathsf{H}_k y_i y_k \equiv \sum \mathsf{H}_i \mathsf{H}_k \mathsf{H}_{ik} = 0,$$

gemäss

$$3(n-2)(4n-9);$$

mithin bleiben für die Cayley'sche Curve, wie aus anderen Betrachtungen längst bekannt ist,

$$3(n-2)(18n-39) - 6n(n-2) - 3(n-2)(4n-9) = 18(n-2)(2n-5)$$

Rückkehrpunkte. *Die Punkte von* H, *welche zu Rückkehrpunkten von C gehören, werden von einer Curve* $18n - 39$. *Ordnung ausgeschnitten, welche* H *in den Wendungspunkten von f berührt und einfach durch diejenigen Punkte von* H *geht, welche den Wendungspunkten von S entsprechen.*

Bei der *Curve dritter Ordnung* reducirt sich (1) auf die Gleichung

$$\sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} = 0.$$

Jene Punkte sind also dadurch charakterisirt dass der Punkt ξ auf f liegt. Nun liegen die Punkte ξ, d. h. die Schnittpunkte der Tangenten von H in conjugirten Polen dieser Curve, auf H selbst, sie müssen also mit den Wendungspunkten von H zusammenfallen. Berücksichtigt man noch, dass die Berührungspunkte der drei von einem Wendepunkt an eine Curve dritter Ordnung gelegten Tangenten in der harmonischen Polare desselben liegen, so hat man den übrigens aus synthetischen oder an der canonischen Form der Curve dritter Ordnung geführten Untersuchungen bekannten Satz:**)

Die Rückkehrtangenten der Cayley'schen Curve sind die neun harmonischen Polaren der Wendepunkte der Hesse'schen Curve.

Bei den Curven vierter Ordnung wird aus der Bedingung (1)

$$\sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{iks} [\mu y_s - 2\nu x_s] = 0,$$

welche für

$$\eta_s = \mu y_s - 2\nu x_s,$$
$$z_s = \mu y_s + \nu x_s,$$

in

*) Vgl. B. S. 389.

**) Vgl. Hesse, Ueber Curven dritter Ordnung Crelle's J., Bd. 38. Salmon-Fiedler, höhere Ebene Curven S. 187.

$$\sum \eta_s \frac{\partial f}{\partial \xi_s} = 0,$$

übergeht. Der Punkt η ist dadurch bestimmt, dass das Doppelverhältniss

$$(y\ x\ \eta\ z)$$

den Werth -2 hat. Daraus folgt:

Liegt bei einer Curve vierter Ordnung der Punkt η, welcher mit den Punkten y, x, z der Hesse'schen, Steiner'schen und Cayley'schen Curve das Doppelverhältniss -2 bildet, auf der geraden Polare des Schnittpunktes der Tangenten von H und S in den conjugirten Punkten x, y derselben, so ist die Gerade (xy) Rückkehrtangente der Cayley'schen Curve.

München, im März 1887.

Ueber eine besondere Raumcurve 3. Ordnung.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Den nachfolgenden Erörterungen will ich ein rechtwinkliges Coordinatenkreuz zu Grunde legen, dessen positive Z-Axe vertical von oben nach unten gerichtet ist. Um die Betrachtung später nicht unterbrechen zu müssen, treffe ich gleich hier folgende Festsetzungen. Es wird mehrfach von Drehungen um die Z-Axe die Rede sein; der Sinn einer solchen Drehung soll positiv oder negativ genannt werden, je nachdem derselbe gleich oder entgegengesetzt ist dem Sinne derjenigen Drehung, welche die positive X-Axe auf dem kürzesten Wege in die positive Y-Axe überführt. Der Winkel, welchen die starr mit der Z-Axe verbundene positive X-Axe beschreibt, gilt als Mass für die Grösse der Drehung. Dieser „Drehungswinkel" soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem die Drehung in positivem oder negativem Sinne erfolgt.

In den Ebenen

$$z = -e \quad \text{und} \quad z = e$$

von welchen die erste über der zweiten liegt (so dass $2e$ den Abstand beider Ebenen bezeichnet), seien zwei congruente Kreise K und K' gegeben, deren Mittelpunkte auf der Z-Axe liegen. Jeder Punkt $P(Q$ etc.) der Peripherie von K möge mit demjenigen Punkte $P'(Q'$ etc.) der Peripherie von K', welcher senkrecht unter ihm liegt, durch einen unausdehnbaren Faden $p(q$ etc.) verbunden, und letzterer durch ein an seinem unteren Ende angebrachtes Gewicht gespannt werden. Diese Fäden bilden die Erzeugenden eines Kreiscylinders. Ueberdies werde noch irgend ein Punkt der Peripherie von K mit irgend einem *nicht* senkrecht unter ihm liegenden Punkte der Peripherie von K' durch einen Faden f verbunden, welcher wie die übrigen durch ein Gewicht gespannt sei.

Wird nun der Kreis K in geeigneter Weise um die Z-Axe gedreht,

während der Kreis K' festbleibt, so bilden — nach Ausführung der Drehung — die Fäden $p, q, \ldots$ die Erzeugenden der einen Regelschaar und der Faden f eine Erzeugende der anderen Regelschaar eines Rotationshyperboloides. Diejenigen Stellen, in welchen sich der Faden f an die Fäden $p, q, \ldots$ anlegt, mögen auf letzteren in irgend einer Weise kenntlich gemacht werden; etwa (wie bei einem von mir hergestellten Modelle) dadurch, dass man auf jedem Faden $p, q, \ldots$ eine verschiebbare Perle anbringt und diese bis an die betreffende Stelle schiebt.

Hierauf soll der Kreis K, wiederum durch eine Drehung um die Z-Axe, in eine neue Lage gebracht werden.

Es ist nun die Frage, was für eine Curve die auf den Fäden $p, q, \ldots$ kenntlich gemachten Stellen nach Ausführung der letzten Drehung bilden.

Ich will mit α und $(\beta - \alpha)$ die zu der ersten und zweiten Drehung gehörigen Drehungswinkel bezeichnen, ferner mit H_α und H_β die Flächen, welche die Fäden $p, q, \ldots$ nach Ausführung der ersten bez. der zweiten Drehung bilden. Von den beiden auf H_α liegenden Regelschaaren soll die von den Fäden $p, q, \ldots$ dargestellte als „erste", die andere als „zweite" Regelschaar der Fläche bezeichnet werden. Durch die zweite Drehung geht nun jeder Punkt C_α der Fläche H_α in einen bestimmten Punkte C_β der Fläche H_β über, und die aufgeworfene Frage lässt sich offenbar auch so formuliren:

Der Punkt C_α beschreibe auf der Fläche H_α eine Erzeugende der zweiten Regelschaar; was für eine Curve beschreibt dann der entsprechende Punkt C_β auf der Fläche H_β?

Es wird sich also darum handeln die ein-eindeutige Correspondenz zwischen den Punkten der Flächen H_α und H_β, welche durch die Zuordnung der Punkte C_α, C_β definirt ist, einer näheren Untersuchung zu unterziehen. Zu dem Ende stelle ich zunächst die Coordinaten des Punktes C_α als Functionen zweier Parameter dar.

Die beiden Erzeugenden der Fläche H_α, welche durch den Punkt C_α laufen, seien $P_\alpha P'$ und $\Pi_{-\alpha} \Pi'$, wo P_α, $\Pi_{-\alpha}$ Punkte der Kreisperipherie K und P', Π' Punkte der Kreisperipherie K' bedeuten. Aus den Symmetrieverhältnissen der Fläche H_α geht unmittelbar hervor, dass die genannten Erzeugenden Spiegelbilder von einander sind in Bezug auf diejenige Ebene, welche den Punkt C_α mit der Z-Axe verbindet. Bezeichnen daher φ und ψ die Neigungswinkel der nach P' und Π' gezogenen Radien des Kreises K' gegen die positive X-Axe, so bilden die nach P_α und $\Pi_{-\alpha}$ gezogenen Radien des Kreises K mit der positiven X-Axe bezüglich die Winkel $\varphi + \alpha$ und $\psi - \alpha$.

Die Coordinaten der Punkte P', P_α, Π', $\Pi_{-\alpha}$ haben also, der Reihe nach, die folgenden Werthe:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi\ , & y = r\sin\varphi\ , & z = \ \ e, \\ x = r\cos(\varphi+\alpha), & y = r\sin(\varphi+\alpha), & z = -e, \\ x = r\cos\psi\ , & y = r\sin\psi\ , & z = \ \ e, \\ x = r\cos(\psi-\alpha), & y = r\sin(\psi-\alpha), & z = -e, \end{cases}$$

wo r den Radius der Kreise K und K' bedeutet.

Hieraus ergeben sich die Coordinaten des Punktes C_α, welche ich mit $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ bezeichne, in der Form:

$$(2)\quad px_1 = r\cos\frac{\varphi+\psi}{2},\quad px_2 = r\sin\frac{\varphi+\psi}{2},\quad px_3 = \frac{e}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\varphi-\psi+\alpha}{2},$$

$$px_4 = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\varphi-\psi+\alpha}{2},$$

unter p einen unbestimmt bleibenden Proportionalitätsfactor verstanden.

Wird letzterer durch $p\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\psi}{2}$ ersetzt und die Bezeichnung

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \mu,\quad \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \nu$$

eingeführt, so gehen die Gleichungen (2) über in:

$$(4)\qquad \begin{cases} px_1 = r(1-\mu\nu), \\ px_2 = r(\mu+\nu), \\ px_3 = e\left(1+\mu\nu+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}(\mu-\nu)\right), \\ px_4 = \ \ 1+\mu\nu-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\mu-\nu). \end{cases}$$

Das Stück $\varrho = P'P_\alpha$ einer Erzeugenden, welches zwischen den beiden Kreisen K und K' liegt, findet sich unter Benutzung der Gleichungen (1) gleich

$$(5)\qquad \varrho = 2\sqrt{e^2 + r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

und die Entfernung $C_\alpha P_\alpha = \varepsilon$ aus der Proportion

$$(6)\qquad \frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{e+\frac{x_3}{x_4}}{2e} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\mu\nu+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}(\mu-\nu)}{1+\mu\nu-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\mu-\nu)}\right).$$

Die Grössen μ und ν, durch welche sich die Coordinaten des Punktes C_α den Gleichungen (4) zufolge darstellen lassen, nenne ich die zu diesem Punkte gehörenden „Parameter". Die geometrische Bedeutung der Parameter erhellt aus den Gleichungen (3). Alle Punkte, für welche der Parameter μ einen gegebenen Werth besitzt, liegen auf einer Erzeugenden der ersten Regelschaar, die Punkte, für welche

ν einen festen Werth hat, auf einer Erzeugenden der zweiten Regelschaar. Irgend eine Gleichung zwischen μ und ν wird eine auf H_α liegende Curve definiren. Ist die Gleichung algebraisch und zwar in μ vom Grade b, in ν vom Grade a, so wird die Curve jede Erzeugende $\mu = \text{const.}$ in a Punkten, jede Erzeugende $\nu = \text{const.}$ in b Punkten treffen. Die Ordnung der Curve wird also gleich $a + b$ sein. *Gehören in entsprechender Weise zu einer zweiten Curve die Zahlen a', b', so ist die Anzahl der gemeinsamen Punkte beider Curven gleich $ab' + ba'$.*

Um dies zu beweisen, projicire man die beiden Curven von irgend einem auf H_α liegenden Punkte aus. Die Projectionskegel sind bezüglich von der Ordnung $a + b$ und $a' + b'$; die durch das Projectionscentrum gehende Erzeugende der ersten bez. zweiten Regelschaar ist ein a-facher bez. b-facher Strahl des einen Projectionskegels und ein a'-facher bez. b'-facher Strahl des anderen Projectionskegels. Die beiden Kegel durchschneiden sich daher, ausser in den genannten Erzeugenden, noch in $(a+b)(a'+b') - aa' - bb' = ab' + ba'$ Strahlen, und in ebensovielen Punkten müssen sich also die beiden auf H_α liegenden Curven begegnen.

Ich nehme nun zunächst an, dass auch die Fläche H_β ein Hyperboloid ist, dass also H_β nicht etwa den Cylinder, von welchem die Betrachtung ausging, oder den Doppelkegel bedeutet, welcher bei einer Drehung um den Winkel $\beta = \pm\pi$ entsteht. Haben dann die Zeichen

$$\varrho_1,\ \varepsilon_1,\ \mu_1,\ \nu_1$$

für die Fläche H_β und den auf ihr liegenden Punkt C_β die analoge Bedeutung, wie ϱ, ε, μ, ν für H_α und C_α, so ist

$$\mu_1 = \mu \quad \text{und} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon,$$

und also mit Rücksicht auf Gleichung (6):

$$\varrho_1 + \varrho_1 \frac{1 + \mu_1\nu_1 + \cot\frac{\beta}{2}(\mu_1 - \nu_1)}{1 + \mu_1\nu_1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}(\mu_1 - \nu_1)} = \varrho + \varrho \frac{1 + \mu\nu + \cot\frac{\alpha}{2}(\mu - \nu)}{1 + \mu\nu - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\mu - \nu)}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich die Parameter μ, ν aus den Parametern μ_1, ν_1 und umgekehrt diese aus jenen berechnen.

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich zunächst

$$\frac{1 + \mu\nu}{\mu - \nu} = \frac{A(1 + \mu_1\nu_1) + B(\mu_1 - \nu_1)}{C(1 + \mu_1\nu_1) + D(\mu_1 - \nu_1)}, \tag{7}$$

unter A, B, C, D Grössen verstanden, die sich durch $\alpha, \beta, \varrho, \varrho_1$ ausdrücken. Es wird also schliesslich:

$$\begin{cases} \mu = \mu_1, \\ \nu = \dfrac{(A\mu_1 - C)(1 + \mu_1\nu_1) + (B\mu_1 - D)(\mu_1 - \nu_1)}{(A + C\mu_1)(1 + \mu_1\nu_1) + (B + D\mu_1)(\mu_1 - \nu_1)}. \end{cases} \tag{8}$$

Hiernach entspricht der Erzeugenden

$$v = \varkappa$$

die durch die Gleichung

$$(9) \qquad \begin{aligned} &[(C\varkappa - A)\mu_1 + C + A\varkappa](1 + \mu_1 \nu_1) \\ &+ [(D\varkappa - B)\mu_1 + D + B\varkappa](\mu_1 - \nu_1) = 0, \end{aligned}$$

dargestellte Curve, welche von der dritten Ordnung ist, da die Gleichung μ_1 im zweiten Grade, ν_1 im ersten Grade enthält. Die Antwort auf die erhobene Frage lautet also:

„*Die auf den Fäden p, q, ... kenntlich gemachten Stellen bilden auf der Fläche H_β eine Raumcurve* 3. *Ordnung.*“

Die Curve enthält offenbar die Punkte

$$\mu_1 = \nu_1 = +i, \qquad \mu_1 = \nu_1 = -i,$$

da für diese gleichzeitig $1 + \mu_1 \nu_1$ und $\mu_1 - \nu_1$ verschwindet. Diese Punkte sind die imaginären Kreispunkte der $X - Y$-Ebene; denn ihre rechtwinkligen Coordinaten haben nach (4) die folgenden Werthe:

$$px_1 = 2r, \quad px_2 = \pm 2ri, \quad px_3 = 0, \quad px_4 = 0.$$

Also: „*Jene Raumcurve* 3. *Ordnung trifft den Kugelkreis in zwei Punkten.*“

Für die Punkte $\mu_1 = \nu_1 = \pm i$ nimmt der Quotient $\frac{\mu_1 - \nu_1}{1 + \mu_1 \nu_1}$ der Gleichung (9) zufolge die Werthe

$$-\frac{\pm(C\varkappa - A)i + C + A\varkappa}{\pm(D\varkappa - B)i + D + B\varkappa} = -\frac{C \mp Ai}{D \mp Bi}$$

an. Andererseits ist jener Quotient, da er in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, gleich $\frac{d\mu_1 - d\nu_1}{i(d\mu_1 + d\nu_1)}$. Die Werthe des Differentialquotienten $\frac{d\mu_1}{d\nu_1}$ und folglich auch die Tangenten der Curve in jenen Punkten sind daher unabhängig von dem Werthe, welchen die Constante $\varkappa$ besitzt; das heisst:

„*Den Erzeugenden der zweiten Regelschaar der Fläche H_α entspricht auf der Fläche H_β ein System von Raumcurven* 3. *Ordnung, welche sich sämmtlich in den imaginären Kreispunkten der Horizontalebene berühren.*“

Es braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden, dass dieser Satz richtig bleibt, wenn in seiner Aussage H_α mit H_β vertauscht wird, wobei dann unter der „zweiten“ Regelschaar der Fläche H_β die Schaar $\nu_1 = \text{const.}$ zu verstehen ist.

Die hier betrachtete Correspondenz zwischen den Punkten der beiden Flächen H_α und H_β hat den Charakter der Cremona'schen Transformationen. Im Allgemeinen entspricht nämlich jedem Punkte (μ_1, ν_1) von H_β nur *ein* Punkt (μ, ν) von H_α und umgekehrt. Jedoch giebt es auf H_β und ebenso auf H_α „Fundamentalpunkte“, welche eine Ausnahme machen, indem ihnen nicht ein bestimmter Punkt, sondern die sämmt-

lichen Punkte einer auf der anderen Fläche liegenden Curve entsprechen. Die Fundamentalpunkte auf H_β erhält man, wenn man in dem Quotienten, welcher nach (8) den Werth von ν darstellt, Zähler und Nenner gleich Null setzt; denn für die hierdurch bestimmten Werthe von μ, ν, und nur für diese, wird der entsprechende Punkt (μ, ν) unbestimmt, nämlich jeder Punkt der Erzeugenden $\mu = \mu_1$ sein können.

Der Zähler von ν verschwindet nun für alle Punkte der Raumcurve 3. Ordnung, welche der Erzeugenden $\nu = 0$ entspricht und der Nenner von ν für alle Punkte der Raumcurve, welche der Erzeugenden $\nu = \infty$ entspricht. Beide Curven haben nach dem Vorhergehenden vier Punkte gemein, welche zu je zweien in den Punkten $\mu_1 = \nu_1 = \pm i$ zusammenfallen. Es ergiebt sich also:

„*Die imaginären Kreispunkte der Horizontalebene, jeder doppelt gezählt, bilden sowohl auf H_α wie auf H_β die Fundamentalpunkte der Correspondenz. Die entsprechenden Fundamentallinien sind die (imaginären) Erzeugenden $\mu_1 = \pm i$, bez. $\mu = \pm i$.*“

Zur Abkürzung will ich einen Augenblick mit (R) das System der Raumcurve 3. Ordnung bezeichnen, welche auf H_α den Erzeugenden $\nu_1 =$ const. der Fläche H_β entspricht. Eine auf H_α liegende Curve C von der $a+b$, welche jede Erzeugende $\mu =$ const. in a Punkten, jede Erzeugende $\nu =$ const. in b Punkten trifft, wird mit einer Curve des Systemes (R) $2a + b$ Punkte gemein haben. Wenn die Curve C durch die Fundamentalpunkte hindurchgeht, so werden von jenen $2a + b$ Punkten eine bestimmte Zahl x in die Fundamentalpunkte fallen, so dass sich nur $2a + b - x$ Punkte zugleich mit der Curve des Systemes (R) verändern. Hieraus folgt:

„*Einer auf der Fläche H_α angenommenen irreducibeln Curve von der Ordnung $a + b$, welche jede Erzeugende der ersten Regelschaar in a Punkten, jede Erzeugende der zweiten Regelschaar in b Punkten trifft, entspricht auf H_β im Allgemeinen eine irreducible Curve von der Ordnung $3a + b$, welche jeder Erzeugenden $\mu_1 =$ const. in a Punkten, jeder Erzeugenden $\nu_1 =$ const. in $2a + b$ Punkten begegnet. Nur wenn die auf H_α angenommene Curve die Fundamentalpunkte enthält, zerfällt die entsprechende Curve in die mit bestimmter Multiplicität zu rechnenden Fundamentallinien $\mu_1 = \pm i$ und einen weiteren irreducibeln Bestandtheil.*“

Macht man hiernach beispielsweise auf der Fläche H_α die Punkte eines Kegelschnitts kenntlich, welcher durch eine nicht horizontal liegende Ebene ausgeschnitten wird, und bringt hierauf den Kreis K durch eine Drehung um die Z-Axe in eine neue Lage, so werden nach Ausführung der Drehung die kenntlich gemachten Punkte eine Raumcurve 4. Ordnung 2. Species bilden.

Die ausgeschlossenen Fälle, in welchen die Fläche H_β mit dem Cylinder $x^2 + y^2 = r^2$ oder dem oben genannten Doppelkegel zusam-

menfällt, lassen sich leicht direct behandeln. Es ergiebt sich, dass im Allgemeinen einer Curve der Fläche H_α, welche jeder Erzeugenden der ersten Regelschaar in a Punkten, jeder Erzeugenden der zweiten Regelschaar in b Punkten begegnet und welche also von der Ordnung $a + b$ ist, eine Curve von der Ordnung $3a + b$ entspricht, welche in dem unendlich fernen reellen Punkte des Cylinders, bez. in der Spitze des Doppelkegels einen $(a+b)$-fachen Punkt besitzt. Dieser unendlich ferne Punkt des Cylinders und die Spitze des Doppelkegels spielen bei der Correspondenz zwischen den Punkten des Cylinders bez. Doppelkegels und der Fläche H_α die Rolle von Fundamentalpunkten.

Schliesslich mögen hier noch einige Eigenschaften der im Vorstehenden betrachteten Raumcurve 3. Ordnung entwickelt werden, welche eine Folge der besonderen Beziehung dieser Curve zum Kugelkreis sind.

Es seien A, B, C, D die vier Ecken eines Tetraeders, σ irgend eine Ebene. Die Raumcurve 3. Ordnung R, welche die Ecken des Tetraeders und die imaginären Kreispunkte der Ebene σ enthält, möge diese Ebene zum dritten Male in F schneiden.

Wird nun die Curve R von A aus auf die Ebene σ projicirt, so ist die Projectionscurve ein Kegelschnitt, welcher die imaginären Kreispunkte von σ enthält, also ein Kreis. Dieser Kreis geht durch die Punkte, in welchen die Tetraederkanten AB, AC, AD die Ebene σ treffen und überdies durch den Punkt F. Analoges gilt von den Projectionen der Curve R von B, C, D aus. Es ergiebt sich hieraus folgende Erzeugung unserer Curve (zugleich mit einem bekannten Satze über das vollständige Vierseit):

*„Aus vier Geraden einer Ebene σ, von denen keine drei durch einen Punkt laufen, lassen sich vier Dreiseite bilden. Die diesen Dreiseiten umbeschriebenen Kreise schneiden sich in einem bestimmten Punkte F.“**)

---

*) Bekanntlich ist F zugleich der Brennpunkt der Parabel, welche die vier Geraden berührt. — Im Anschluss an die obige Betrachtung fand ich noch folgende Sätze:

„Beschreibt man um jedes der vier Dreiseite, welche sich aus vier Geraden a, b, c, d einer Ebene σ bilden lassen, eine Raumcurve 3. Ordnung, welche durch drei beliebig im Raume angenommene Punkte A, B, C geht, so begegnen sich diese vier Raumcurven stets noch in einem weiteren Punkte D. Die Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ schneiden die Ebene σ in vier Geraden, welche mit den Geraden a, b, c, d zusammen acht Tangenten eines Kegelschnittes bilden.“

„Aus fünf Ebenen α, β, γ, δ, ε, von denen keine vier durch einen Punkt laufen, lassen sich fünf Tetraeder (Vierflache) bilden. Beschreibt man um jedes dieser Tetraeder eine Raumcurve 3. Ordnung, welche durch zwei beliebig im Raume angenommene Punkte A, B geht, so begegnen sich diese fünf Raumcurven, ausser in den Punkten A und B, stets noch in zwei weiteren Punkten C und D. Die Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ und die Ebenen α, β, γ, δ, ε bilden zusammen neun Schmiegungsebenen einer sechsten Raumcurve 3. Ordnung.“

Man bezeichne nun jene vier Geraden als die Durchschnittsgeraden der Ebene σ mit den Seitenflächen eines Tetraeders. Bewegt sich dann σ parallel mit sich fort, während das Tetraeder fest bleibt, so beschreibt der Punkt P eine Raumcurve 3. Ordnung, welche die Ecken des Tetraeders und die imaginären Kreispunkte der Ebene σ enthält."

Es bedeute wieder R eine Curve der hier betrachteten Art, a und b irgend zwei Secanten derselben und σ eine die imaginären Kreispunkte der Curve enthaltende Ebene. Wenn nun ein Punkt P der Curve mit den Secanten a und b durch Ebenen verbunden wird, so werden die Linien, in welchen diese Ebenen die Ebene σ schneiden, mit einander einen von der Wahl des Punktes P unabhängigen Winkel bilden. Durchläuft nämlich der Punkt P die Curve, so beschreiben jene Durchschnittslinien projectivische Strahlbüschel, und das Erzeugniss dieser Büschel ist ein Kreis, da dasselbe die imaginären Kreispunkte der Ebene σ enthält. Wendet man diese Betrachtung auf je zwei von drei Secanten der Curve an, so wird man zu folgendem Satze geführt:

„*Es seien im Raume irgend drei Gerade und eine Ebene gegeben. Ein leuchtender Punkt bewege sich so, dass die von ihm auf der Ebene erzeugten Schattenbilder der drei Geraden ein Dreieck bilden, welches beständig einem gegebenen Dreieck ähnlich bleibt. Dann ist der geometrische Ort, welchen der leuchtende Punkt bei seiner Bewegung beschreibt, eine Raumcurve 3. Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte der gegebenen Ebene geht und die gegebenen Geraden zu Secanten besitzt.*

Die Aufgabe durch eine (reelle) Raumcurve 3. Ordnung, welche den Kugelkreis doppelt trifft, eine Rotationsfläche 2. Grades zu legen, ist leicht zu lösen, da eine solche Fläche durch die Eigenschaft, den Kugelkreis doppelt zu berühren, erklärt werden kann. Man bestimme denjenigen unendlich fernen Kegelschnitt, welcher durch die unendlich fernen Punkte der Raumcurve geht und den Kugelkreis (in zweien dieser Punkte) doppelt berührt. Die gesuchte Rotationsfläche muss offenbar ausser der Raumcurve auch diesen Kegelschnitt enthalten und sie ist hierdurch eindeutig bestimmt. Es folgt also: „*Eine den Kugelkreis doppelt treffende Raumcurve 3. Ordnung liegt stets auf einem und nur auf einem Rotationshyperboloid.*"

Königsberg i. Pr., April 1887.

Ueber die Anzahl der einer algebraischen Differentialgleichung angehörigen selbständigen Transcendenten.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

In meiner Arbeit „über die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten“ (Acta mathematica Bd. 3) habe ich gezeigt, dass es, von den linearen nicht homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung abgesehen, für welche das allgemeine Integral eine ganze lineare Function zweier particulärer Integrale ist, nur noch *eine* Classe von Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, für welche das allgemeine Integral sich als algebraische Function einer endlichen Anzahl von particulären Integralen darstellen lässt, oder für welche die Anzahl der durch sie definirten Transcendenten eine endliche, aber grösser als die Ordnung 1 der Differentialgleichung ist, nämlich die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = Ay^2 + By + C, \tag{1}$$

in welcher A, B, C beliebige algebraische Functionen von x bedeuten, und für welche die Beziehung zwischen dem allgemeinen und drei particulären Integralen lautet

$$y = \frac{c_3 y_1 (y_2 - y_3) + c y_2 (y_3 - y_1)}{c_3 (y_2 - y_3) + c (y_3 - y_1)}, \tag{2}$$

worin c eine willkürliche Constante, c_3 einen numerischen Werth bedeutet. Ich habe ferner gezeigt, dass alle irreductibeln algebraischen Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung, in welchen das allgemeine Integral eine algebraische Function von m oder weniger als m particulären Integralen ist, sich durch Substitutionen, welche aus der abhängigen und unabhängigen Variabeln algebraisch zusammengesetzt sind, aus linearen homogenen irreductibeln Differentialgleichungen müssen herleiten lassen — es soll in den folgenden Zeilen nachgewiesen werden, *dass es stets algebraische irreductible Differentialgleichungen beliebig vorgeschriebener Ordnung giebt, für welche die Anzahl der durch dieselben definirten*

Transcendenten eine endliche, aber grösser als die Ordnung der Differentialgleichung ist.

Wenden wir nämlich auf eine irreductible homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$z^{(m)} + P_1 z^{(m-1)} + \cdots + P_{m-1} z' + P_m z = 0 \tag{3}$$

die Substitution

$$z = e^{\int y\,dx} \tag{4}$$

an, so ergiebt sich eine algebraische Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(m-1)}) = 0, \tag{5}$$

von der zunächst ersichtlich ist, dass sie irreductibel sein wird; denn wenn eines ihrer Integrale y_1 einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(\mu)}) = 0, \tag{6}$$

worin $\mu < m - 1$, genügte, so würde die Zusammenstellung von (6) mit der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - zy = 0 \tag{7}$$

durch Elimination von $y, y', \cdots, y^{(\mu)}$ eine algebraische Differentialgleichung

$$F_1(x, z, z', z'', \cdots, z^{(\mu+1)}) = 0 \tag{8}$$

ergeben, welche mit (3) das Integral $z_1 = e^{\int y_1 dx}$ gemein hätte, was, da $\mu + 1 < m$ ist, der Annahme der Irreductibilität der linearen Differentialgleichung widerspricht. Sei nun $z_1, z_2, \cdots, z_m$ ein System von Fundamentalintegralen der Differentialgleichung (3), deren allgemeines Integral also durch $z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_m z_m$ dargestellt ist, so wird offenbar das allgemeine Integral der transformirten Differentialgleichung (5) die Form haben

$$y = \frac{\frac{dz_1}{dx} + \varkappa_1 \frac{dz_2}{dx} + \varkappa_2 \frac{dz_3}{dx} + \cdots + \varkappa_{m-1} \frac{dz_m}{dx}}{z_1 + \varkappa_1 z_2 + \varkappa_2 z_3 + \cdots + \varkappa_{m-1} z_m}, \tag{9}$$

worin $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_{m-1}$ $m - 1$ willkürliche Constanten bedeuten; setzt man nun $y_1 = \frac{\frac{dz_1}{dx}}{z_1}, \cdots, y_m = \frac{\frac{dz_m}{dx}}{z_m}$, so geht (9) in

$$y = \frac{y_1 z_1 + \varkappa_1 y_2 z_2 + \cdots + \varkappa_{m-1} y_m z_m}{z_1 + \varkappa_1 z_2 + \cdots + \varkappa_{m-1} z_m} \tag{10}$$

über, worin $y_1, y_2, \cdots, y_m$ particuläre Integrale der Differentialgleichung (5) bedeuten. Nimmt man nun noch $m - 1$ speciellen Werthsystemen von $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_{m-1}$ zugehörige particuläre Integrale

$y_{m+1}, y_{m+2}, \cdots, y_{2m-1}$ zu Hülfe, so erhält man $m-1$ Gleichungen der Form

$$(11) \qquad \dot{y}_{m+r} = \frac{y_1 z_1 + \varkappa_{1r} y_2 z_2 + \cdots + \varkappa_{m-1\,r} y_m z_m}{z_1 + \varkappa_{1r} z_2 + \cdots + \varkappa_{m-1\,r} z_m},$$

und somit in (10) und (11) m in $z_1, z_2, \cdots, z_m$ lineare homogene Gleichungen, deren Eliminationsresultat

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} y - y_1 & \varkappa_1(y - y_2) & \cdots & \varkappa_{m-1}(y - y_m) \\ y_{m+1} - y_1 & \varkappa_{11}(y_{m+1} - y_2) & \cdots & \varkappa_{m-11}(y_{m+1} - y_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2m-1} - y_1 & \varkappa_{1\,m-1}(y_{2m-1} - y_2) & \cdots & \varkappa_{m-1\,m-1}(y_{2m-1} - y_m) \end{vmatrix} = 0$$

die algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen Integrale und $2m-1$ particulären Integralen $y_1, y_2, \cdots, y_{2m-1}$ der algebraischen Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung (5) liefert. Es ist somit die Existenz irreductibler algebraischer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung von der angegebenen Eigenschaft erwiesen.

Wir fügen noch einige Worte über das der eben gegebenen Darstellung zu Grunde liegende allgemeine Princip hinzu. Stellt man mit der linearen Differentialgleichung (3) die Substitutionsgleichung

$$(13) \qquad y = \varphi\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots, \frac{d^x z}{dx^x}\right)$$

zusammen, worin φ eine algebraische Function bedeutet, so wird die durch Differentiation ausgeführte Elimination von $z, z', z'', \cdots$ zwischen den Gleichungen (3) und (13) für y eine algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung liefern; soll die Ordnung dieses Eliminationsresultates aber die $m-1^{\text{te}}$ sein, so müssen sich aus (13) und den durch $m-1$ successive ausgeführte Differentiationen entstandenen $m-1$ Gleichungen die Grössen $z, z', z'', \cdots, z^{(m-1)}$ eliminiren lassen, nachdem die höheren Differentialquotienten vermöge der Differentialgleichung (3) herausgeschafft sind; dazu ist aber im Allgemeinen nothwendig, dass die Substitutionsgleichung eine in $z, z', \cdots, z^{(x)}$ homogene lineare von der Form

$$(14) \qquad f_0(x, y)\, z + f_1(x, y)\, z' + \cdots + f_x(x, y)\, z^{(x)} = 0$$

sei, in welcher $f_0, f_1, \cdots, f_x$ algebraische Functionen bedeuten. Differentiirt man diese Gleichung $m-1$ mal nach einander, so erhält man vermöge der Differentialgleichung (3) m lineare homogene Gleichungen in $z, z', \cdots, z^{(m-1)}$, deren Determinante gleich Null gesetzt für y eine algebraische Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(15) \qquad F_1(x, y, y', \cdots, y^{(m-1)}) = 0$$

liefert, für welche nach (14) y eine algebraische Function von $x, z, z', \cdots, z^{(x)}$

$$(16) \qquad y = \omega(x, z, z', \cdots, z^{(x)})$$

ist; zugleich sieht man aus der Form von (14), dass, wenn man in (16) für z den Ausdruck $c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_m z_m$ setzt, der Werth von y nur von $m - 1$ willkürlichen Constanten abhängt, so dass sich das allgemeine Integral von (15) in der Form darstellt

$$(17)\quad y = \omega(x, z_1 + \varkappa_1 z_2 + \cdots + \varkappa_{m-1} z_m,\ z_1' + \varkappa_1 z_2' + \cdots + \varkappa_{m-1} z_m', \cdots, z_1^{(\varkappa)} + \varkappa_1 z_2^{(\varkappa)} + \cdots + \varkappa_{m-1} z_m^{(\varkappa)}).$$

Setzt man nun

$$y_1 = \omega(x, z_1, z_1', \cdots, z_1^{(\varkappa)}),$$

$$y_2 = \omega(x, z_2, z_2', \cdots, z_2^{(\varkappa)}),\ \cdots,\ y_m = \omega(x, z_m, z_m', \cdots, z_m^{(\varkappa)}),$$

bestimmt ferner willkürlich $m\varkappa - 1$ particuläre Systeme von Constanten, welche aus (17) die $m\varkappa - 1$ particulären Integrale

$$y_{m+1},\ y_{m+2},\ \cdots,\ y_{2m},\ y_{2m+1},\ \cdots,\ y_{m(\varkappa+1)-1}$$

liefern, so erhält man im Ganzen $m(\varkappa + 1)$ Gleichungen, aus denen man die $m(\varkappa + 1)$ Grössen

$$z_1, z_2, \cdots, z_m,\ z_1', z_2', \cdots, z_m', \cdots, z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}, \cdots, z_m^{(\varkappa)},$$

welche nach (14) in diesen linear homogen vorkommen, eliminiren kann, und erhält somit für die Differentialgleichung (15) die Beziehung

$$(18)\quad y = \varphi(x, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{m(\varkappa+1)-1}, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_{m-1})$$

als algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen Integrale und $m(\varkappa + 1) - 1$ *particulären Integralen derselben.* In dem speciellen Falle, von dem wir oben ausgingen, war $m = 2$, $\varkappa = 1$ also das allgemeine Integral algebraisch durch 3 particuläre ausdrückbar.

Es war oben der von mir für Differentialgleichungen zweiter Ordnung in meiner Arbeit „über die Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen“*) völlig durchgeführte Satz erwähnt worden, wonach eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale ist, nothwendig durch eine algebraische Substitution aus einer linearen homogenen Differentialgleichung sich muss herleiten lassen; es wird vielleicht nicht ohne Interesse sein, einer neuen Methode zum Beweise dieses Satzes für algebraische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung Erwähnung zu thun, die wir zunächst hier nur für den Fall der Ausdrückbarkeit durch *ein* particuläres Integral darlegen wollen.

Es sollen also alle algebraischen irreductibeln Differentialgleichungen m^{ter} *Ordnung*

$$(19)\quad y^{(m)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(m-1)})$$

angegeben werden, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function nur eines particulären Integrales, der unabhängigen Variabeln und m *willkürlicher Constanten*

*) Journal für Mathematik B. 100 und 101.

(20) $$y = F(x, y_1, c_1, c_2, \cdots, c_m)$$

ist, oder welche nur eine einzige selbständige Transcendente definiren. Da*)

(21) $$y^{(\varrho)} = \sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots, n_\varrho \geq 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + \varrho n_\varrho = \varrho}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \cdots n_\varrho!} \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \cdots (\varrho!)^{n_\varrho}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'\right)^{n_1} \times \frac{\partial^{n_2 + \cdots + n_\varrho} F}{\partial y_1^{n_2 + \cdots + n_\varrho}} y_1''^{n_2} y_1'''^{n_3} \cdots y_1^{(\varrho)^{n_\varrho}}$$

ist, so folgt durch Einsetzen von (20) in (19) mit Benutzung der auch

---

*) Nach der von mir im 27ten Bande der Annalen für eine Function

$$t = f(x, y, z, \cdots),$$

in welcher $x, y, z, \cdots$ von irgend einer Variabeln abhängen, aufgestellten Formel ist das ϱ^{te} Differential von t in symbolischer Form

$$d^\varrho t = \sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots, n_\varrho \geq 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + \varrho n_\varrho = \varrho}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \cdots n_\varrho!} \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \cdots (\varrho!)^{n_\varrho}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots\right)^{n_1} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y + \cdots\right)^{n_2} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x} d^\varrho x + \frac{\partial f}{\partial y} d^\varrho y + \cdots\right)^{n_\varrho},$$

und somit, wenn $y, z, \cdots$ als von x abhängig betrachtet und x als unabhängige Variable angesehen wird, durch Division dieses Ausdruckes mit

$$dx^{n_1 + 2n_2 + \cdots + \varrho n_\varrho} = dx^\varrho,$$

weil ausserdem

$$d^2x = d^3x = \cdots = d^\varrho x = 0$$

ist,

$$\frac{d^\varrho t}{dx^\varrho} = \sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots, n_\varrho \geq 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + \varrho n_\varrho = \varrho}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \cdots n_\varrho!} \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \cdots (\varrho!)^{n_\varrho}} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \cdots\right)^{n_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + \cdots\right)^{n_2} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial y} y^{(\varrho)} + \frac{\partial f}{\partial z} z^{(\varrho)} + \cdots\right)^{n_\varrho},$$

oder endlich, wenn, wie wir es oben brauchen, die Combination

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_{\varrho - 1} = 0, \quad n_\varrho = 1$$

abgesondert wird,

$$\frac{d^\varrho t}{dx^\varrho} = \sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots, n_{\varrho-1} \geq 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + (\varrho-1) n_{\varrho-1} = \varrho}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \cdots n_{\varrho-1}!} \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \cdots (\varrho-1!)^{n_{\varrho-1}}} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \cdots\right)^{n_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + \cdots\right)^{n_2} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial y} y^{(\varrho-1)} + \frac{\partial f}{\partial z} z^{(\varrho-1)} + \cdots\right)^{n_{\varrho-1}} + \frac{\partial f}{\partial y} y^{(\varrho)} + \frac{\partial f}{\partial z} z^{(\varrho)} + \cdots.$$

für y_1 geltenden Gleichung (19) und mit Absonderung des zur Combination $n_1 = n_2 = \cdots = n_{\varrho-1} = 0$, $n_\varrho = 1$ gehörigen Postens

$$(22)\quad \sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots n_{m-1} \geq 0 \\ n_1+2n_2+\cdots+(m-1)n_{m-1}=m}} \frac{m!}{n_1!\, n_2! \cdots n_{m-1}!} \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\cdots(m-1!)^{n_{m-1}}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'\right)^{n_1} \times \frac{\partial^{n_2+\cdots+n_{m-1}} F}{\partial y_1^{n_2+\cdots+n_{m-1}}} y_1''^{n_2} \cdots y_1^{(m-1)n_{m-1}} + \frac{\partial F}{\partial y_1} f(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m-1)})$$

$$= f\left\{x, F, \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1', \cdots, \sum_{\nu_1+2\nu_2+\cdots+(m-1)\nu_{m-1}=m-1} \frac{(m-1)!}{\nu_1!\, \nu_2! \cdots \nu_{m-1}!} \frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\cdots(m-1!)^{\nu_{m-1}}} \times \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'\right)^{\nu_1} \frac{\partial^{\nu_2+\cdots+\nu_{m-1}} F}{\partial y_1^{\nu_2+\cdots+\nu_{m-1}}} y_1''^{\nu_2} \cdots y_1^{(m-1)\nu_{m-1}}\right\}.$$

Da y_1 nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung als der m^{ten} genügen darf, so muss die Gleichung (22) eine in allen in ihr vorkommenden Grössen identische sein. Setzt man nun $\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$ und nimmt zunächst an, dass diese Gleichung überhaupt einen Werth $y_1 = Y_1$ liefert, der dann eine algebraische Function von $x, c_1, c_2, \cdots, c_m$ sein wird, so wird dieser Werth von y_1 in (22) eingesetzt die rechte Seite der Gleichung von $y^{(m-1)}$ frei machen, da dieses nur in dem abzusondernden Posten des letzten Argumentes der f-Function mit $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ multiplicirt vorkommt, und es wird somit auch die linke Seite der Gleichung, aus der der abgesonderte Posten herausfällt, der Identität wegen ebenfalls von $y_1^{(m-1)}$ frei sein müssen; es ist aber $y_1^{(m-1)}$ nur in dem Posten der Summe enthalten, welcher der Combination $n_1 = 1$, $n_2 = 0, \cdots, n_{m-2} = 0$, $n_{m-1} = 1$ entspricht, oder in

$$m\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\right) \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1^{(m-1)},$$

so dass für $y_1 = Y_1$ auch

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = 0$$

sein muss. Dann fällt aber aus der rechten Seite der Gleichung (22) der Ausdruck $y_1^{(m-2)}$ ganz heraus, da er dort nur im vorletzten Argumente mit $\frac{\partial F}{\partial y_1}$, im letzten mit $(m-1)\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\right)\frac{\partial F}{\partial y_1}$ multiplicirt vorkommt, und es muss daher auch wieder die linke Seite der betrachteten Gleichung von $y_1^{(m-2)}$ frei sein; da es dort aber nur in den Posten

$$\frac{m!}{2!\,(m-2)!}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\,y_1''\,y_1^{(m-2)},$$

$$\frac{m!}{2!\,(m-2)!}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y_1}\,y_1'\right)^2\frac{\partial F}{\partial y_1}\,y_1^{(m-2)}$$

$$=\frac{m!}{2!\,(m-2)!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y_1}+2\,\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y_1^2}\,y_1'\,y_1^{(m-2)}+\frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3}\,y_1'^2\,y_1^{(m-2)}\right)$$

vorkommt, so folgt, dass ausser den früheren Bedingungen noch für $y_1 = Y_1$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y_1}=0,\quad \frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y_1^2}=0,\quad \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3}=0$$

sein müssen. Schliesst man so weiter, so folgt zunächst, dass

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)_{y_1=Y_1}=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\right)_{y_1=Y_1}=\cdots=\left(\frac{\partial^m F}{\partial y_1^m}\right)_{y_1=Y_1}=0$$

sein muss, und die successive Differentiation der Gleichung (22) nach x zeigt unmittelbar, dass

$$\left(\frac{\partial^\varrho F}{\partial y_1^\varrho}\right)_{y_1=Y_1}=0$$

sein muss für jedes ganzzahlige ϱ, was nicht möglich ist, da dann F von y_1 frei sein müsste. Es wäre somit die Unmöglichkeit der Beziehung (20) nachgewiesen, wenn nicht noch wesentliche Ausnahmefälle eintreten könnten. Der oben fixirte Werth von Y_1 würde gar nicht existiren, wenn $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ von y_1 unabhängig d. h. F eine lineare Function von y_1 von der Form

$$F = Py_1 + Q \quad \text{also} \quad y = Py_1 + Q \tag{23}$$

wäre, worin P und Q algebraische Functionen von $x, c_1, c_2, \cdots, c_m$ bedeuten. Da aber die durch Einführung dieser Function F in Gleichung (22) hervorgehende Gleichung wiederum eine identische sein muss, also auch bestehen bleibt, wenn statt y_1 irgend ein anderes Integral y_2 der Differentialgleichung (19) gesetzt wird, so wird

$$Y = Py_2 + Q \tag{24}$$

wiederum das allgemeine Integral von (19) vorstellen, und da nach (23)

$$Y = P_1 y_1 + Q_1, \quad y_2 = P_2 y_1 + Q_2,$$

worin P_1, Q_1 und P_2, Q_2 durch Veränderung der Constanten $c_1, c_2, \cdots c_m$ aus P und Q hervorgehen, so folgt aus (24)

$$P_1 y_1 + Q_1 = P(P_2 y_1 + Q_2) + Q,$$

und da y_1 nicht eine algebraische Function von x sein darf,

$$P_1 = PP_2;$$

hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass, weil P, P_1, P_2 in gleicher

Weise algebraisch durch x ausgedrückt sind, dass P eine von x unabhängige Constante sein muss. Dann wird aber aus (23)

$$y^{(r)} = Py_1^{(r)} + Q^{(r)}$$

folgen, und diese Werthe in (19) eingesetzt die in $y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m-1)}$ identische Beziehung liefern

$$Pf(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m-1)}) + Q^{(m)} = f(x, Py_1 + Q, Py_1' + Q', \cdots, Py_1^{(m-1)} + Q^{(m-1)}). \tag{25}$$

Differentiirt man die Gleichung (25) successive nach $y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m-1)}$, so erhalten wir

$$\frac{\partial f(x, y_1, \ldots)}{\partial y_1} = \frac{\partial f(x, Py_1 + Q \ldots)}{\partial (Py_1 + Q)},$$

$$\frac{\partial f(x, y_1, \ldots)}{\partial y_1'} = \frac{\partial f(x, Py_1 + Q \ldots)}{\partial (Py_1' + Q')}, \cdots$$

$$\cdots \frac{\partial f(x, y_1, \ldots)}{\partial y_1^{(m-1)}} = \frac{\partial f(x, Py_1 + Q \ldots)}{\partial (Py_1^{(m-1)} + Q^{(m-1)})},$$

und da in diesen identischen Gleichungen für irgend ein bestimmt gewähltes Werthesystem von $y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m-1)}$ die Argumente $Py_1 + Q$, $Py_1' + Q', \cdots, Py_1^{(m-1)} + Q^{(m-1)}$ vermöge der m in ihnen enthaltenen willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \cdots, c_m$ beliebige Werthe annehmen können, so müssen $\frac{\partial f(x, y_1, \ldots)}{\partial y_1}$, $\frac{\partial f(x, y_1, \ldots)}{\partial y_1'}$, $\cdots$ von den Argumenten $y_1, y_1', \cdots$ unabhängig sein und somit

$$f(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m-1)}) = A + By_1 + Cy_1' + \cdots + Ny_1^{(m-1)}$$

sein, worin $A, B, \cdots, N$ algebraische Functionen von x bedeuten; es wird somit die Differentialgleichung (19) die Form annehmen

$$y^{(m)} = A + By' + Cy'' + \cdots + Ny^{(m-1)}. \tag{26}$$

Für den Fall, dass $\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$ Auflösungen für y_1 besitzt, könnte es aber auch vorkommen, dass

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} f(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m-1)})$$

in dem Ausdrucke (22) für keine Auflösung dieser Gleichung verschwindet, oder dass $f(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m-1)})$ für alle Auflösungen unendlich wird — auch in diesem Falle wären die oben gemachten Schlüsse unstatthaft. Aber dann ist leicht zu sehen, dass, weil jede algebraische Substitution $y = \varphi(x, z)$ die Differentialgleichung (19) in eine derselben Ordnung verwandelt, für welche ebenfalls das allgemeine Integral eine algebraische Function *eines* particulären Integrales ist, man die algebraische Substitution so wählen kann, dass, wenn $z = F(x, z_1, c_1, \cdots, c_m)$ die neue algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale angiebt, im Ausnahmefall

$\frac{\partial F}{\partial z_1}$ von z_1 unabhängig ist, man somit auf den vorigen Fall zurückgeführt wird, so dass die eben erwähnten Ausnahmefälle nur auf solche Differentialgleichungen führen, welche durch in der abhängigen und unabhängigen Variabeln algebraische Substitutionen aus linearen Differentialgleichungen abgeleitet sind. Wir kommen somit zu dem Resultat,

dass nur lineare Differentialgleichungen oder durch algebraische Substitutionen aus solchen abgeleitete die Eigenschaft haben können, dass ihr allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären, der unabhängigen Variabeln und willkürlicher Constanten ist.

Wann dies bei linearen Differentialgleichungen der Fall ist, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Heidelberg, im April 1887.

Sur un théorème de la géométrie à n dimensions.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein.)

Par

Corrado Segre à Turin.

... Dans Votre dernier travail: „Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale*)" Vous Vous servez d'un „Grundsatz" de la géométrie à n dimensions**), sans en donner une démonstration. En voici une qui me parait aussi simple que satisfaisante.

Il s'agit de prouver que: *si une $M_{\sigma+1}$ est telle que par chacun de ses points il passe plus de deux de ses R_σ, elle sera linéaire.* Or soit $R_{n+\sigma-1}$ $(n \geq 3)$ un espace dans lequel se trouve la $M_{\sigma+1}$: en coupant celle-ci par un R_n de cet espace on aura une M_2 et il suffit de prouver que celle-ci est linéaire, c'est-à-dire un plan. Or cette M_2 sera telle que par chacun de ses points passent plus de deux de ses droites: si $n = 3$ elle sera donc un plan. Si $n > 3$ projetons-la sur un R_3 par un R_{n-4} (le tout en R_n): on voit tout-de-suite que si cet R_{n-4} est quelconque 1° la projection sera généralement uniforme, 2° chaque droite de la projection de la M_2 ne sera pas en général la projection de plusieurs droites de celle-ci; donc la projection sera une F_2 de R_3 telle que par chacun de ses points passent plus de deux de ses droites, c. à. d. un plan. Donc aussi la M_2 de R_n sera un plan. Etc. Etc.

Remarquez que ce raisonnement porte aussi à cette autre proposition: *si une $M_{\sigma+1}$ est telle que par chacun de ses points il passe deux de ses R_σ, elle sera quadratique, et par suite elle sera un cône (d'espèce $\sigma - 1$) projetant une quadrique ordinaire.*

Turin, le 17 Mars 1887.

*) Math. Annalen, t. 28.

**) l. c. p. 547.

Ueber einige Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrischen Erscheinungen.

Von

EDUARD RIECKE in Göttingen.*)

Ein besonderes Interesse werden stets diejenigen Untersuchungen für sich in Anspruch nehmen, durch welche verschiedenartige Gebiete der Physik mit einander in Beziehung gesetzt werden. Diess kann geschehen durch neue experimentelle Thatsachen, wenn diese einen Einfluss von Körpern oder von Zuständen derselben auf Erscheinungen verrathen, welche bis dahin als von ihnen unabhängig betrachtet worden waren; der Zusammenhang der Erscheinungen kann aber auch ein nur formaler sein, bedingt durch die Analogie der Gesetze, welche für sonst unvergleichbare Vorgänge gelten. Die Beziehungen der ersten Art, die Erscheinungen des Elektromagnetismus, die magnetische Drehung der Polarisationsebene, die Erzeugung von Wärme durch Arbeit sind von fundamentaler Bedeutung für die Wissenschaft; aber auch die Verfolgung der formalen Analogieen wird nicht ohne Nutzen sein, da dieselben die Uebertragung der für eine gewisse Gruppe von Erscheinungen gefundenen Gesetze auf ganz andere Gebiete gestatten.

Den Gegenstand der folgenden Betrachtungen bilden einige der zwischen Hydrodynamik und Elektricität bestehenden Beziehungen. Die vier ersten Abschnitte betreffen die Bewegung einer reibungslosen Flüssigkeit, welche den Raum erfüllt, der zwischen gewissen geschlossenen Flächen hindurch bis ins Unendliche sich erstreckt. Für eine gewisse stationäre Strömung werden die Drucke bestimmt, welche auf die als Quell- oder Saugflächen auftretenden Grenzflächen der Flüssigkeit wirken. Dabei ergiebt sich eine vollkommene Uebereinstimmung dieser Kräfte mit gewissen elektrostatischen Wirkungen. Der zweite, dritte und vierte Abschnitt behandelt oscillatorische Strömungen der Flüssigkeit von ähnlicher Beschaffenheit wie diejenigen, welche bei

*) Abgedruckt aus den Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1887, Nr. 1.

den bekannten Versuchen von Bjerknes auftreten. Es war zu hoffen, dass diese Betrachtungen zu einer einfacheren physikalischen Anschauung über die Ursachen der eigenthümlichen Bewegungen führen würden, welche Bjerknes auf Grund seiner theoretischen Untersuchungen vorhergesagt hatte und welche er nachher in einer Reihe schöner Versuche verwirklicht hat. Die Rechnung ergab jedoch, dass in unserem Falle die verschiedenen Componenten des wirkenden Druckes eine Resultante erzeugen, welche den von Bjerknes beobachteten Kräften in gewissen Fällen entgegengesetzt ist, in anderen gleich gerichtet sein kann. Die Untersuchungen von Bjerknes haben desshalb ein so allgemeines Interesse erregt, weil sie einen Weg zu eröffnen schienen zu der Reduction der Fernwirkungen insbesondere der Gravitation auf die Wirkungen von Druck und Spannung bei unmittelbarer Berührung, eine Reduction, welche vielen als eines der nächsten und hauptsächlichsten Ziele der Wissenschaft erscheint. Die Untersuchungen von Bjerknes verlieren aber auch dann nicht ihr Interesse, wenn man jener Analogie mit den Gesetzen der Fernwirkung nur eine formale Bedeutung beilegt.

Der fünfte Abschnitt zeigt, dass die zwischen hydrodynamischer und galvanischer Strömung bestehende Analogie auch bei Berücksichtigung der inneren Reibung erhalten bleibt und behandelt insbesondere die Strömung einer reibenden Flüssigkeit zwischen zwei parallelen einander in geringer Entfernung gegenüberstehenden Platten.

I.

Es sei gegeben eine incompressible Flüssigkeit, welche den ganzen Raum erfüllt mit Ausschluss gewisser Hohlräume, deren Begrenzung durch die im Folgenden gemachten Angaben bestimmt wird. Im Raume sei eine beliebige Anzahl von festliegenden Punkten vertheilt; diesen werden gewisse Zahlen $A_1, A_2, A_3 \ldots$ zugeordnet, welche ebensowohl positive als negative Werthe besitzen können. Die Punkte selbst werden im Folgenden gleichfalls durch $A_1, A_2, A_3 \ldots$ bezeichnet. Betrachten wir die Zahlen $A_1, A_2, A_3 \ldots$ als elektrische Ladungen der entsprechenden Punkte, so ist das Potential des ganzen Punktsystems gegeben durch

$$V = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} + \cdots$$

wo unter r_1, r_2, r_3 die Entfernungen eines beliebigen Raumpunktes von den Punkten A_1, A_2, A_3 zu verstehen sind. Wir ordnen nun jedem der Punkte A eine Fläche constanten Potentials zu, welche denselben rings umschliesst. Diese Flächen, welche wir uns starr und unbeweglich denken wollen, mögen die Grenzflächen der Flüssigkeit bilden.

Die ihnen entsprechenden Potentialwerthe werden durch $C_1, C_2, C_3 \ldots$ bezeichnet. Das Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeit sei identisch mit dem elektrischen Potential V. Bezeichnen wir mit $n_1, n_2 \ldots$ die ins Innere der Flüssigkeit hineingehenden Normalen der Flächen $V = C$, so sind die Geschwindigkeiten in der Richtung derselben gegeben durch $\frac{\partial V}{\partial n_1}, \frac{\partial V}{\partial n_2} \cdots$ Die Flüssigkeit wird demnach aus denjenigen Oberflächen, für welche die Constante C einen negativen Werth besitzt, ausströmen, in diejenigen Flächen, welchen positive Werthe von C angehören, einströmen, sie muss an den Grenzflächen der ersten Art stets von neuem erzeugt werden, an den Grenzflächen der zweiten Art immer von neuem verschwinden.

Der Druck, welchen die Flüssigkeit auf ein Element irgend einer Grenzfläche ausübt, ist gegeben durch

$$p = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$$

wenn wir die Dichte der Flüssigkeit durch μ bezeichnen und den in der Flüssigkeit herrschenden constanten Druck gleich Null setzen. In der That übt also die Flüssigkeit in Folge ihrer Bewegung einen Zug auf das betreffende Element der Oberfläche aus, dessen Grösse durch $\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$ bestimmt ist und dessen Richtung mit der in das Innere der Flüssigkeit hineingehenden Normale zusammenfällt.

Nehmen wir an, die Flächen $V = C$ wären hergestellt aus Metall und denken wir uns dieselben bedeckt mit elektrischem Fluidum, dessen Dichtigkeit in einem beliebigen Oberflächenelement gegeben ist durch $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$, so besitzt die so hergestellte elektrische Ladung die folgenden Eigenschaften:

1. Die gesammte Ladung irgend einer Fläche ist gleich der elektrischen Masse A des von ihr umschlossenen Punktes.

2. Für jeden Punkt, welcher in dem von der Flüssigkeit erfüllten Raume liegt, ist das Gesammtpotential der Oberflächenbelegungen gleich dem Potential der elektrischen Massen $A_1, A_2, A_3 \ldots$ Denn es ist:

$$\frac{1}{4\pi}\int V \frac{\partial \frac{1}{r_p}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r_p}\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = V_p,$$

wenn wir unter r_p die Entfernung eines Oberflächenelementes $d\sigma$ von einem beliebigen Punkte p des Flüssigkeitsraumes verstehen, unter V_p den Werth des Potentials V in dem Punkte p. In dem ersten Integral hat aber V an den Grenzflächen der Flüssigkeit die constanten Werthe $C_1, C_2, C_3 \ldots$, somit zerfällt das erste Integral in

ebensoviele einzelne Integrale, als der Flüssigkeitsraum Grenzflächen besitzt und wir erhalten:

$$\frac{1}{4\pi}\int V \frac{\partial \frac{1}{r_p}}{\partial n} d\sigma = \frac{C_1}{4\pi}\int \frac{\partial \frac{1}{r_p}}{\partial n_1} d\sigma_1 + \frac{C_2}{4\pi}\int \frac{\partial \frac{1}{r_p}}{\partial n_2} d\sigma_2 + \cdots = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass in der That

$$-\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r_p} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = V_p.$$

3. Das Potential der Oberflächenbelegung, deren Dichtigkeit gleich $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$ ist, hat im Inneren einer jeden Grenzfläche denselben constanten Werth C wie an der Fläche selbst.

Wenn wir also den Conductoren, deren Grenzflächen durch die Gleichungen $V = C$ bestimmt sind, die Elektricitätsmengen A mittheilen, so sind dieselben im Gleichgewicht, wenn die Dichtigkeit in einem beliebigen Oberflächenelement gegeben ist durch $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$. Die von der Ladung aller Conductoren auf die Einheit der elektrischen Masse an irgend einer der Grenzflächen ausgeübte Kraft ist gleich $-\frac{\partial V}{\partial n}$, wenn dieselbe sich an der äusseren, gleich Null, wenn sie sich an der inneren Seite dieser Oberfläche befindet, im Mittel also gleich $-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial n}$. Auf jedes Element der Oberfläche der Conductoren wird somit ein elektrischer Zug in der Richtung der äusseren Normale ausgeübt, welcher bezogen auf die Flächeneinheit gleich ist $\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$.

Dieser elektrische Zug hat dieselbe Grösse wie der früher betrachtete hydrodynamische, wenn wir die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich $\frac{1}{4\pi}$ setzen.

Wenn die Entfernungen der starren Oberflächen, welche die Flüssigkeit ausströmen oder einsaugen, gross sind im Vergleich mit ihren Dimensionen, so werden die Resultanten der hydrodynamischen Drucke gleich sein den elektrischen Kräften, mit welchen die Punkte A_1, A_2, A_3 ... auf einander wirken.

II.

Wir gehen über zu der Untersuchung von Strömungen, welche *ein von der Zeit abhängendes Geschwindigkeitspotential besitzen*, bei welchen also die Strömung nicht blos die Folge einer den Flüssigkeitstheilchen einmal ertheilten Geschwindigkeit ist, sondern durch be-

schleunigende Druck- oder Zugkräfte mit bestimmt wird, welche auf die Oberfläche der Flüssigkeit wirken.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass das Geschwindigkeitspotential gegeben ist durch

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos \frac{2\pi t}{T},$$

wo r die Entfernung eines beliebigen Raumpunktes von dem im Raume festliegenden Punkte A bezeichnet. Die Bewegungsrichtung ist eine radiale bald gegen den Punkt A hin, bald von demselben weg gerichtet.

Zur Zeit $t = 0$ sei die Oberfläche der Flüssigkeit gebildet von zwei concentrischen Kugeln, deren Mittelpunkt zusammenfällt mit dem Punkte A und welche die Radien a und b besitzen mögen. In Folge der Bewegung der Flüssigkeit sind ihre Grenzflächen einer fortwährenden Veränderung unterworfen, bestehend in einer abwechselnden Contraction und Dilatation der dieselben bildenden Kugeln. Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens ist gegeben durch

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Bezeichnen wir durch r_a den jeweiligen Halbmesser der inneren, durch r_b den der äusseren Kugel, so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung

$$r_a^3 = a^3 - \frac{3T}{2\pi} A \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$r_b^3 = b^3 - \frac{3T}{2\pi} A \sin \frac{2\pi t}{T};$$

die grössten Werthe

$$r_a^3 = a^3 + \frac{3T}{2\pi} A, \qquad r_b^3 = b^3 + \frac{3T}{2\pi} A$$

erreichen diese Radien für

$$t = \frac{3}{4} T, \qquad \frac{7}{4} T \cdots;$$

die grösste Contraction der Grenzflächen findet statt zu den Zeiten

$$t = \frac{T}{4}, \qquad \frac{5T}{4}, \cdots$$

Die Werthe der Radien sind dann gegeben durch

$$r_a^3 = a^3 - \frac{3T}{2\pi} A, \qquad r_b^3 = b^3 - \frac{3T}{2\pi} A.$$

Sind die Bewegungen klein, so sind die Amplituden der Schwingung für die innere und äussere Grenzfläche gegeben durch

$$\frac{T}{\pi} \frac{A}{a^2}, \qquad \frac{T}{\pi} \frac{A}{b^2}.$$

Bezeichnen wir durch n_a und n_b die jeweiligen Abweichungen der Grenzflächen von den dem Ruhezustand entsprechenden Kugeln a und b, so ergiebt sich:

$$n_a = -\frac{T}{2\pi}\frac{A}{a^2}\sin\frac{2\pi t}{T}, \quad n_b = -\frac{T}{2\pi}\frac{A}{b^2}\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Ein beliebiges Element der inneren Grenzfläche der Flüssigkeit besitzt zur Zeit $t = 0$ den Inhalt $d\omega_a$; zu irgend einer anderen Zeit ist dann seine Fläche gegeben durch

$$d\omega_a' = d\omega_a\left(1 + \frac{2n_a}{a}\right).$$

Ebenso ist

$$d\omega_b' = d\omega_b\left(1 + \frac{2n_b}{b}\right).$$

Der Druck der Flüssigkeit ist:

$$p = c + \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{r}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{r^4}\cos^2\frac{2\pi t}{T}.$$

Insbesondere ergiebt sich für die innere Grenzfläche, wenn wir berücksichtigen, dass der Druck hier abhängig ist von n_a und wenn wir dementsprechend nach Potenzen von n_a entwickeln,

$$p_a = c + \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{a^4}\left(1 - 3\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Ebenso wird für die äussere Grenzfläche

$$p_b = c + \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{b}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{b^4}\left(1 - 3\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Zu dem constanten Druck c, welcher in der ruhenden Flüssigkeit herrschen würde, kommen somit noch veränderliche Drucke hinzu, welche als Ursache oder Folge der Bewegung zu betrachten sind. In erster Linie sind diess die Drucke

$$\frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{b}\sin\frac{2\pi t}{T},$$

welche proportional der Amplitude der Schwingung und dem Radius der betreffenden Kugelfläche sind. Dieselben sind positiv in den Zeitintervallen

$$t = 0 \text{ bis } t = \frac{T}{2}, \quad t = T \text{ bis } t = \frac{3}{2}T\cdots;$$

sie werden also während dieser Zeiten hervorgebracht durch Kräfte, welche auf die beiden Grenzflächen der Flüssigkeit wirken und welche in das Innere der Flüssigkeit hinein gerichtet sind. In den Zeitintervallen

$$t = \frac{T}{2} \text{ bis } t = T, \quad t = \frac{3}{2}T \text{ bis } t = 2T\cdots$$

sind die Drucke

$$\frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{b}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

negativ, werden also erzeugt durch äussere nach den angrenzenden Räumen hin gerichtete Zugkräfte.

Betrachten wir ein beliebiges Element der inneren Grenzfläche, so wirkt auf dieses einmal der constante Druck c, sodann der Druck

$$\frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T},$$

welcher abwechselnd positive und negative Werthe besitzt. Im Mittel wird aber dieser Druck während eines längeren Zeitraumes nicht verschwinden wegen der gleichzeitigen Veränderungen, welche die Fläche des betrachteten Elementes erleidet. Wir bestimmen ein beliebiges Element der inneren Grenzfläche dadurch, dass wir seinen Flächeninhalt zur Zeit $t = 0$ gleich $d\omega_a$ setzen. Dasselbe Element hat zu einer späteren Zeit den Inhalt

$$d\omega_a' = d\omega_a\left(1 - \frac{TA}{\pi a^3}\sin\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Die auf dasselbe zur Zeit t ausgeübte Kraft hat somit den Werth

$$\left\{c + \mu\frac{2\pi}{T}\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{a^4}\left(1 - 3\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right)\right\}\left\{1 - \frac{TA}{\pi a^3}\sin\frac{2\pi t}{T}\right\}d\omega_a.$$

Der mittlere Druck, welchen das Element $d\omega_a$ während der Periode von $t = 0$ bis $t = nT$ erleidet, ist gegeben durch

$$\bar{p}_a = \frac{1}{nT}\int_0^{nT}\left\{c + \mu\frac{2\pi}{T}\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{a^4}\left(1 - 3\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right)\right\} \times\left\{1 - \frac{TA}{\pi a^3}\sin\frac{2\pi t}{T}\right\}dt.$$

Vernachlässigen wir bei der Berechnung dieses Integrals die dritte Potenz der Schwingungsamplitude, so ergiebt sich als Mittelwerth des auf das Element $d\omega_a$ ausgeübten Druckes

$$\bar{p}_a = c - \frac{3}{4}\mu\frac{A^2}{a^4}.$$

Ebenso wird für die äussere Grenzfläche

$$\bar{p}_b = c - \frac{3}{4}\mu\frac{A^2}{b^4}.$$

Die Constante c lässt sich so bestimmen, dass der mittlere Druck auf der äusseren oder inneren Oberfläche gleich Null wird. Im ersteren Falle ist

$$\bar{p}_a = -\frac{3}{4}\mu A^2\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}\right),$$

im zweiten Fall

$$\bar{p}_b = \frac{3}{4}\mu A^2\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}\right).$$

Der mittlere Druck entspricht im ersten Falle einem von dem inneren Hohlraum aus auf die Oberfläche der Flüssigkeit wirkenden Zuge, im zweiten Fall einem von dem äusseren Raum ausgeübten Druck.

III.

Wir betrachten nun den Fall einer ins Unendliche sich erstreckenden Flüssigkeit, in welcher eine beliebige Anzahl blasenförmiger Hohlräume eingeschlossen ist. Das Geschwindigkeitspotential sei gegeben durch

$$\varphi = V \cos\frac{2\pi t}{T}$$

wo

$$V = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} + \cdots$$

also ebenso, wie im ersten Abschnitte das Geschwindigkeitspotential selber, identisch ist mit dem elektrostatischen Potentiale der Punkte A, wenn wir unter A die in denselben concentrirten elektrischen Massen verstehen. Zur Zeit $t = 0$ sei die Flüssigkeit begrenzt durch Flächen constanten Potentiales $V = C_1$, $V = C_2$, $V = C_3$, ... welche je einen der Punkte A vollständig umschliessen. Auf irgend einer der Grenzflächen liege das Element $d\omega$; die in das Innere der Flüssigkeit hineingehende Normale sei n, die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Richtung derselben ist:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial V}{\partial n}\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Die Abweichung, welche das Element $d\omega$ zur Zeit t von dem entsprechenden Element der Fläche $V = C$ besitzt, berechnen wir unter der Voraussetzung, dass dieselbe sehr klein bleibt. Dann ergiebt sich durch Entwicklung nach Potenzen von n

$$\frac{dn}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_c} + \frac{\partial^2 V}{\partial n_c^2}\, n\right)\cos\frac{2\pi t}{T},$$

wo unter $\frac{\partial V}{\partial n_c}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial n_c^2}$ diejenigen Werthe zu verstehen sind, welche diese Differentialquotienten an der Fläche $V = C$ besitzen. Führen wir die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial V}{\partial n_c} = \alpha, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial n_c^2} = \beta$$

so ergiebt sich:

$$n = \frac{\alpha}{\beta}\left\{e^{\frac{\beta T}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}} - 1\right\}$$

oder durch Entwicklung von $e^{\frac{\beta T}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}}$

$$n = \frac{T}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial n_c}\sin\frac{2\pi t}{T},$$

wenn $T\frac{\partial^2 V}{\partial n_c^2}$ gegen 1 vernachlässigt wird.

Zur Zeit $t = 0$ ist $n = 0$, d. h. es fällt das Element $d\omega$ der Grenzfläche zusammen mit dem entsprechenden Element der Oberfläche $V = C$. Bei einem positiven Werthe von A ist im Allgemeinen $\frac{\partial V}{\partial n}$ negativ. Die Grenzfläche der Flüssigkeit weicht dann mit wachsender Zeit gegen die Fläche $V = C$ nach innen zurück, um zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ ein Maximum der Contraction zu erreichen; zur Zeit $t = \frac{T}{2}$ geht die Grenzfläche durch die Fläche $V = C$ hindurch, um sich dann nach aussen hin von derselben zu entfernen. Das Maximum der Dilatation findet statt zur Zeit $t = \frac{3}{4}T$.

Die Grenzfläche der Flüssigkeit ist in einer oscillirenden Bewegung begriffen, deren Gleichgewichtslage durch die Fläche $V = C$, deren Amplitude durch

$$\frac{T}{\pi}\cdot\frac{\partial V}{\partial n}$$

gegeben ist.

Verstehen wir unter $d\omega_c$ den Inhalt desjenigen Elementes der Fläche $V = C$, mit welchem das Element $d\omega$ der Grenzfläche der Flüssigkeit für $t = 0$, $\frac{T}{2}$, $T\cdots$ zur Deckung gelangt, bezeichnen wir ferner durch ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien des Elementes $d\omega_c$, so ist:

$$d\omega = d\omega_c + d\omega_c\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)n$$

oder

$$d\omega = d\omega_c + d\omega_c\frac{T}{2\pi}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n_c}\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Der Druck der Flüssigkeit ist gegeben durch

$$p = c + \mu\frac{2\pi}{T}V\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2\cos^2\frac{2\pi t}{T}.$$

Hier ist sowohl V als $\frac{\partial V}{\partial n}$ abhängig von n; durch Entwicklung nach

Potenzen von n ergiebt sich mit derselben Vernachlässigung wie früher für den auf das Element $d\omega$ ausgeübten Druck

$$p = c + \mu \frac{2\pi}{T} C \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n_c}\right)^2\left(1 - 3\sin^2 \frac{2\pi t}{T}\right).$$

Der mittlere Druck, welchen das Element $d\omega$ während der Periode von $t = 0$ bis $t = nT$ erleidet, ist gegeben durch

$$\bar{p} d\omega_c = \frac{1}{nT}\int_0^{nT} p d\omega dt,$$

woraus

$$\bar{p} = c + \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) C \frac{\partial V}{\partial n_c} + \frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial n_c}\right)^2.$$

Man kann diesem Ausdruck noch eine andere Form geben mit Benutzung eines von Beltrami bewiesenen Satzes. Wir haben schon im ersten Abschnitte gezeigt, dass das Potential V für alle ausserhalb der Flächen C liegenden Punkte identisch ist mit dem Potential der Elektricitätsmengen A, wenn dieselben auf den als leitend betrachteten Flächen C im Gleichgewichte sich befinden; das Potential der so bestimmten Oberflächenvertheilung hat dann auch im ganzen Inneren jener Flächen die constanten Werthe C. Nun gilt für jede beliebige Oberflächenvertheilung elektrischer Massen der Satz*):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial n'^2} = 4\pi h\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Da bei der Gleichgewichtsvertheilung der elektrischen Massen auf den Flächen C die Differentialquotienten nach der inneren Normale verschwinden, so ist für diese

$$h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_c}$$

und

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n_c} = -\frac{\partial^2 V}{\partial n_c^2}.$$

Für den mittleren Druck, welcher auf ein Element der Grenzflächen der Flüssigkeit ausgeübt wird, ergiebt sich somit der Ausdruck

$$\bar{p} = c - \frac{\mu}{2} C \frac{\partial^2 V}{\partial n_c^2} + \frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial n_c}\right)^2.$$

Dieser Druck stellt sich dar als eine Summe von drei Componenten, von welchen die erste dem constanten in der ruhenden Flüssig-

*) Beltrami. Intorno ad alcuni nuovi teoremi di Neumann sulle funzioni potenziali. Ann. d. Mat. Ser. II. T. X. 46.

keit herrschenden Drucke entspricht, die beiden anderen abhängig sind von der Lage des betreffenden Oberflächenelementes.

Die *dritte Componente* ist wesentlich positiv und stellt daher *eine Vermehrung des constanten in der ruhenden Flüssigkeit herrschenden Druckes c* dar; $\frac{\partial V}{\partial n_c}$ ist um so grösser, je näher die aufeinanderfolgenden Flächen constanten Potentiales an einander rücken; die durch die dritte Componente bedingte Druckvermehrung ist daher in den einzelnen Stellen der Grenzfläche dem Quadrate des Abstandes von der benachbarten Potentialfläche umgekehrt proportional.

Das Vorzeichen des zweiten Terms wird bestimmt durch das Vorzeichen des constanten Potentialwerthes C und das Vorzeichen von $\frac{\partial V}{\partial n_c}$. Besitzen beide dasselbe Zeichen, so ist die zweite Druckcomponente gleichfalls positiv, besitzen sie entgegengesetztes Zeichen, so ist sie negativ. Der letztere Fall tritt ein, wenn eine Grenzfläche der Flüssigkeit den ihr zugeordneten Punkt A so umschliesst, dass A und C dasselbe Vorzeichen besitzen. Unter dieser Voraussetzung bedingt also die *zweite Druckcomponente* stets eine *Verminderung* des constanten Druckes c und zwar ist diese Verminderung an einer beliebigen Stelle der Grenzfläche dem Abstand der benachbarten Potentialfläche umgekehrt proportional. Ob nun im Ganzen eine Verminderung oder eine Vermehrung des constanten Druckes c zu Stande kommt, das hängt ab von dem Verhältniss der zweiten und dritten Druckcomponente. Ueberwiegt die zweite Componente, so wird der Druck c vermindert. *An einer bestimmten Grenzfläche der Flüssigkeit ist der Druck am grössten da, wo der Abstand derselben von der benachbarten Potentialfläche am grössten, er wird um so kleiner, je kleiner jener Abstand ist. Wird die betrachtete Grenzfläche gebildet durch die Oberfläche eines festen Körpers, der in der Flüssigkeit pulsirt, so wird der letztere getrieben von den Stellen mit grösserem Abstand der Potentiallinien zu den Stellen mit kleinerem Abstand, also entgegengesetzt wie bei den Versuchen von Bjerknes.*

Ueberwiegt hingegen die dritte positive Druckcomponente über die zweite, so findet allenthalben an der Grenzfläche eine *Vermehrung des constanten Druckes c statt, welche um so grösser ist, je geringer der Abstand der benachbarten Potentialfläche.* Es wird somit in diesem Falle der Körper von den Stellen, an welchen die benachbarten Potentialflächen sich dichter zusammenschliessen zu den Stellen mit grösserem Abstand dieser Flächen getrieben.

Dasselbe tritt natürlich dann ein, wenn C und $\frac{\partial V}{\partial n_c}$ gleiches Vorzeichen besitzen und in Folge hiervon die zweite Druckcomponente

ebenfalls positiv ist. *Auch in diesem Falle ist der Sinn der auf den Körper wirkenden translatorischen Kräfte derselbe wie bei Bjerknes.*

IV.

Die in dem vorhergehenden Abschnitte enthaltenen Betrachtungen mögen noch etwas weiter ausgeführt werden in dem Fall, dass nur zwei Hohlräume im Inneren der Flüssigkeit vorhanden sind, und dass die Dimensionen derselben sehr klein sind im Vergleich zu der Entfernung der ihnen zugeordneten Punkte A_1 und A_2.

Die Entfernung der Punkte A_1 und A_2 möge bezeichnet werden durch R. Den Punkt A_1 nehmen wir zum Anfangspunkt, die Richtung A_1A_2 zur x-Axe eines Systems rechtwinkliger Coordinaten. Den Abstand eines beliebigen Raumpunktes von dem Punkte A_1 bezeichnen wir durch r, den Abstand desselben von der x-Axe durch y. Der Werth des Potentiales V in diesem Punkte ist dann:

$$V = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{\sqrt{R^2 - 2Rx + r^2}}$$

oder durch Entwickelung nach Kugelfunctionen

$$V = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{R}\left\{1 + \frac{x}{R} + \frac{3x^2 - r^2}{2R^2}\right\}.$$

Setzen wir $V = C_1$, so ergiebt sich als Gleichung der den Punkt A_1 umhüllenden Fläche constanten Potentiales

$$C_1 = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{R}\left\{1 + \frac{x}{R} + \frac{3x^2 - r^2}{2R^2}\right\}$$

oder mit $x = r\cos\varphi$

$$C_1 = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{R}\left\{1 + \frac{r\cos\varphi}{R} + \frac{r^2(3\cos^2\varphi - 1)}{2R^2}\right\}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{A_1}{C_1R - A_2} = \alpha,$$

so ergiebt sich

$$\frac{r}{R} - \alpha\frac{A_2}{A_1}\cos\varphi\frac{r^2}{R^2} - \alpha\frac{A_2}{A_1}\frac{3\cos^2\varphi - 1}{2}\frac{r^3}{R^3} = \alpha,$$

oder, wenn wir nach Potenzen von α entwickeln und die höheren Potenzen von der fünften an vernachlässigen,

$$\frac{r}{R} = \alpha + \alpha^3\frac{A_2}{A_1}\cos\varphi + \alpha^4\frac{A_2}{A_1}\frac{3\cos^2\varphi - 1}{2}.$$

Die Fläche constanten Potentiales ist in dem vorliegenden Falle eine Rotationsfläche, deren Rotationsaxe die x-Axe ist. Der Krümmungsradius des Meridianschnittes wird gegeben durch

$$\frac{\varrho_1}{R} = \alpha + \alpha^4 \frac{A_2}{A_1} \frac{5 - 9\cos^2\varphi}{2}.$$

Der zweite Hauptkrümmungsradius durch

$$\frac{\varrho_2}{R} = \alpha - \alpha^4 \frac{A_2}{A_1} \frac{1 + 3\cos^2\varphi}{2}.$$

Somit

$$\frac{R}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \frac{1}{\alpha}\left\{1 - \alpha^3 \frac{A_2}{A_1}\left(1 - 3\cos^2\varphi\right)\right\}.$$

Es wird ferner

$$\alpha^2 R^2 \frac{\partial V}{\partial n_c} = - A_1 \left\{1 - 3\alpha^2 \frac{A_2}{A_1} \cos\varphi - 2\alpha^3 \frac{A_2}{A_1}\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\right\};$$

da

$$C_1 = \frac{A_1 + \alpha A_2}{\alpha R},$$

so ergiebt sich

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) C_1 \frac{\partial V}{\partial n_c} = - \frac{\mu A_1^2}{\alpha^4 R^4}\left\{1 + \alpha \frac{A_2}{A_1} + \alpha^3 \frac{A_2}{A_1}\right\} + \frac{3\mu A_1 A_2}{\alpha^2 R^4} \cos\varphi \left\{1 + \alpha\left(\frac{A_2}{A_1} + \cos\varphi\right)\right\},$$

$$\frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial n_c}\right)^2 = \frac{\mu A_1^2}{4\alpha^4 R^4}\left\{1 + 4\alpha^3 \frac{A_2}{A_1}\right\} - \frac{3\mu A_1 A_2}{2\alpha^2 R^4} \cos\varphi \left\{1 + 2\alpha\cos\varphi\right\}.$$

Der ganze Druck, welcher auf ein beliebiges Element der betrachteten Grenzfläche ausgeübt wird, ist daher

$$c + \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) C_1 \frac{\partial V}{\partial n_c} + \frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial n_c}\right)^2 = c - \frac{\mu A_1^2}{4\alpha^4 R^4}\left\{3 + 4\alpha \frac{A_2}{A_1}\right\} + \frac{3\mu A_1 A_2}{2\alpha^2 R^4}\left\{1 + 2\alpha \frac{A_2}{A_1}\right\} \cos\varphi.$$

Hiebei ist in der ersten Klammer α^4, in der zweiten Klammer α^2 vernachlässigt gegen 1.

Haben A_1 und A_2 das gleiche Vorzeichen, pulsiren also die beiden im Inneren der Flüssigkeit befindlichen Körper mit gleicher Phase, so erreicht der Druck seinen grössten Werth für $\varphi = 0$, d. h. in demjenigen Punkte P, welcher auf der die Punkte A_1 und A_2 verbindenden Linie liegt. Beim Uebergang zu irgend einem anderen Punkt der Fläche C_1 nimmt der veränderliche Theil des Druckes ab wie der Cosinus des Winkels φ, den der Radius Vector der betrachteten Stelle mit $A_1 A_2$ bildet. Der Druck ist also am kleinsten an derjenigen Stelle der Oberfläche, welche von der Verlängerung von $A_1 A_2$ getroffen wird. Der Körper C_1 wird somit von der inneren dem Körper C_2 zugewandten Seite nach aussen getrieben. Da die Verhältnisse bei C_2 sich ganz analog gestalten, so kommt eine gegen-

seitige Abstossung der beiden Körper zu Stande, während nach Bjerknes zwei mit derselben Phase pulsirende Kugeln sich anziehen.

Sind im Gegentheil die Vorzeichen von A_1 und A_2 verschieden, so ist das dem $\cos\varphi$ proportionale Glied mit negativem Vorzeichen behaftet, der Druck ist am kleinsten an der Stelle P, am grössten an der gegenüberliegenden Stelle. Die beiden Körper werden von Aussen nach Innen getrieben und an Stelle der Abstossung derselben tritt eine Annäherung, während zwei mit entgegengesetzter Phase pulsirende Kugeln sich abstossen.

V.

Wir betrachten endlich noch die Strömung einer Flüssigkeit mit Berücksichtigung der inneren Reibung. Wenn die Flüssigkeit den ganzen Raum erfüllt, so werden die hydrodynamischen Differentialgleichungen auch in diesem Falle dadurch befriedigt, dass die Strömung ein Geschwindigkeitspotential besitzt, welches der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt. Es ergiebt sich hieraus, dass auch eine mit innerer Reibung behaftete Flüssigkeit im unbegrenzten Raume dieselben Strömungsverhältnisse darbietet, wie die elektrischen Flüssigkeiten, wenn die Elektroden an die Stelle der Quell- und Saug-Flächen der Flüssigkeit gesetzt werden.

Die Analogie der Strömung einer reibenden Flüssigkeit mit der galvanischen Strömung bleibt erhalten, wenn die Flüssigkeit nur nach 2 Dimensionen in die Unendlichkeit sich erstreckt, während sie nach der dritten begrenzt wird von zwei parallelen in kleinem Abstande einander gegenüberstehenden Platten. Um diess zu beweisen, machen wir die Mittelebene der Flüssigkeitsplatte zur xy Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems. Die Dicke der Platte sei $2c$. Die Bedingungsgleichungen sind unter der Voraussetzung kleiner Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k\Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = k\Delta v,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$u = v = 0$ für $z = \pm c$.

Wir setzen

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

und erhalten zur Bestimmung von p und φ die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

$$k\Delta\varphi = p.$$

Machen wir für φ den Ansatz

$$\varphi = \Phi_1 \cos\frac{z\pi}{2c} + \Phi_3 \cos\frac{3z\pi}{2c} + \Phi_5 \cos\frac{5z\pi}{2c} + \cdots,$$

so wird:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi^2}{4c^2}\Phi_1 \cos\frac{z\pi}{2c} - \frac{9\pi^2}{4c^2}\Phi_3 \cos\frac{3z\pi}{2c} - \frac{25\pi^2}{4c^2}\Phi_5 \cos\frac{5z\pi}{2c} - \cdots.$$

Nehmen wir an, dass p nur abhängig ist von x und y, so können wir setzen:

$$p = \frac{4}{\pi} p \cos\frac{z\pi}{2c} - \frac{4}{3\pi} p \cos\frac{3z\pi}{2c} + \frac{4}{5\pi} p \cos\frac{5z\pi}{2c} - + \cdots$$

und erhalten dann:

$$\Phi_1 = -\frac{16c^2}{\pi^3 k} p, \quad \Phi_3 = \frac{16c^2}{27\pi^3 k} p, \quad \Phi_5 = -\frac{16c^2}{125\pi^3 k} p \cdots,$$

$$\varphi = -p\frac{16c^2}{\pi^3 k}\left\{\cos\frac{z\pi}{2c} - \frac{1}{27}\cos\frac{3z\pi}{2c} + \frac{1}{125}\cos\frac{5z\pi}{2c} - + \cdots\right\}.$$

Die Curven constanten Geschwindigkeitspotentiales fallen somit zusammen mit den Horizontalschnitten der Flächen constanten Drucks, wenn wir die xy-Ebene und die beiden die Platte begrenzenden Ebenen uns horizontal gestellt denken.

Bei einer Einströmungs- und einer Ausströmungsstelle setzen wir:

$$p = M \log\frac{a}{b},$$

wo b die Entfernung des betrachteten Punktes von einer durch den Einströmungspunkt gezogenen Verticallinie bezeichnet, a seine Entfernung von einer durch den Ausströmungspunkt gezogenen Verticalen. Die Curven φ = Constans sind dann identisch mit den Curven, deren Punkte beim Durchgang eines elektrischen Stroms durch die Platte dasselbe elektrostatische Potential besitzen; die hydrodynamischen Strömungslinien identisch mit den galvanischen.

Für die Stromstärke, d. h. für das Volumen der Flüssigkeit, welches in der Zeiteinheit durch die Platte hindurchströmt, ergiebt sich der Werth

$$Q = \frac{128c^3 M}{\pi^3 k}\left\{1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \cdots\right\}.$$

Zur experimentellen Prüfung des gefundenen Satzes wurden zwei kreisförmige Glasplatten von 200 mm. Durchmesser gegen die beiden Seiten eines Messingringes gepresst; die Dichtung des so hergestellten Hohlraumes wurde durch zwischengelegte Gummiringe erreicht. Der Einfluss und Abfluss der Flüssigkeit wurde durch zwei im Abstand von 75 mm. senkrecht in die obere Glasplatte eingesetzte Messingröhren vermittelt. Die Flüssigkeit, verdünnter Alcohol, strömte unter an-

gemessenem Drucke aus einem tubulirten Cylinder in die Platte ein. Die Strömungslinien wurden mit Hülfe kleiner in dem Alcohol suspendirter Wachstheilchen bestimmt. An der Einströmungsstelle entwickelt sich ein Wirbel, dessen störender Einfluss noch bis gegen die Mitte zwischen der Einströmungs- und Ausströmungs-Stelle sich bemerklich macht; von da ab aber erwiesen sich die gegen die Ausströmungsstelle convergirenden Stromlinien als kreisförmig. Nur die äussersten derselben waren abgeplattet in Folge der kreisförmigen Begrenzung der Flüssigkeitsplatte.

Die Analogie der Strömung einer reibenden Flüssigkeit mit der galvanischen Strömung erstreckt sich endlich auch auf den Fall der Strömung durch ein Capillarrohr einerseits, einen linearen Leiter andererseits. Denn nach dem Gesetze von Poisseuille ist das gesammte Volumen einer Flüssigkeit, welches in der Zeiteinheit durch den Querschnitt einer cylindrischen Röhre hindurchgeht, gegeben durch

$$Q = \pi \frac{p_o - p_l}{8kl} R^4.$$

Setzen wir

$$Q = \frac{p_o - p_l}{W}, \qquad W = \frac{8kl}{\pi R^4}$$

und bezeichnen wir W als den hydrodynamischen Widerstand der Röhre, so ergeben sich die Sätze:

Bei einer Reihe von hinter einander liegenden Röhren ist die in der Zeiteinheit durchfliessende Flüssigkeitsmenge gleich der Druckdifferenz an den Enden des Systems dividirt durch die Summe sämmtlicher Widerstände.

Bei einer Theilung des Stromes zwischen verschiedenen neben einander liegenden Röhren verhalten sich die den einzelnen entsprechenden Stromstärken wie die reciproken Werthe der Widerstände*).

Das Poisseuille'sche Gesetz lässt endlich noch eine ganz analoge Verallgemeinerung zu wie das Ohm'sche. Sind nämlich p, u, v, w Integrale der Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k\Delta u, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = k\Delta v, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = k\Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

so werden dieselben auch befriedigt durch $\alpha p + \beta$, αu, αv, αw, wo α und β Constante sind. Für einen Hohlraum von beliebiger Form gilt somit der Satz:

*) Eine experimentelle Prüfung dieses Satzes wurde ausgeführt in einer Breslauer Dissertation des Herrn J. B. Rostalski. Beibl. d. Ann. d. Phys. II. 1878.

Der Quotient aus der Druckdifferenz in der Ein- und Ausströmungsstelle und aus der Stärke des Stromes ist eine Constante, welche als der hydrodynamische Widerstand des Raumes bezeichnet werden kann.

Es sei beispielsweise in dem zuvor betrachteten Falle der Strömung zwischen zwei parallelen Platten die Einströmungsfläche gegeben durch eine Fläche constanten Druckes, für welche $a = a_1$ und $b = b_1$, die Ausströmungsfläche durch eine Fläche constanten Druckes mit $a = a_2$ und $b = b_2$, so ist:

$$\frac{p_1 - p_2}{Q} = \frac{\pi^3 k}{128 c^3} \log \frac{a_1 b_2}{b_1 a_2}.$$

Der hydrodynamische Widerstand einer solchen Platte wird also durch den rechts stehenden Ausdruck bestimmt.

Göttingen, im December 1886.

On Recent English Researches in Vortex-motion.

By

A. E. H. Love at Cambridge.

The object of this paper is to give an account of the more recent researches made by English mathematicians in the theory of the motion of vortices in a perfect liquid. I shall for the most part limit myself to the discussion of investigations which have appeared since the publication of Lamb's "Treatise on the motion of Fluids"*), though for the sake of clearness and continuity it will be necessary to bestow at least a passing notice on some writings of an earlier date.

It may be well to state briefly the laws of vortex-motion as deduced by Helmholtz**) and Sir W. Thomson***). Defining the circulation in any circuit as the line-integral of the velocity taken round the circuit, it was proved by the latter (1) that the circulation in any circuit which always consists of the same particles of fluid is constant, (2) that the circulation in any circuit is equal to the surface-integral of vortex-strength over any surface having the circuit for an edge. From the second of these, which is a purely analytical theorem, it follows that the circulation is the same in all circuits which can be continuously deformed into one another without passing out of the region occupied by fluid in irrotational motion. Helmholtz's laws of vortex-motion are immediate deductions from these. They are (1) each vortex remains continually composed of the same particles of the fluid, (2) the strength†) of a vortex-filament is constant for all time and for all points of the filament, (3) a vortex-filament must be closed or have its ends on the boundary of the fluid.

The chief physical interest of vortex-motion lies in the speculations of *Sir W. Thomson* as to the ultimate constitution of matter††). The adherents of the kinetic theory of gases appear to have been driven to

*) Cambridge University Press, 1879.

**) „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen." Crelle, Bd. LV.

***) "On Vortex motion." Trans. Roy. Soc. Edinburgh vol. 25, 1869.

†) The "spin" is the name given to the vector whose components are ξ, η, ζ, it is also called the elementary or molecular rotation. The "strength" of a vortex-filament is the product of the area of its cross-section and the spin about one of its vortex-lines. The "vorticity" of a vortex-motion is said to be given when the volumes and strengths of all the filaments are given.

††) "Vortex Atoms." Phil. Mag. (4), XXXIV. 1867.

assume that the atoms of a gas are at once elastic and infinitely strong and rigid, and that they exert on each other a direct action at a distance. The brilliant discoveries of Helmholtz in the theory of this kind of fluid motion, combined it would seem with some striking experiments, suggested the fundamental idea of these speculations. According to the view of their originator, we are to imagine space to be continuously occupied by an incompressible frictionless fluid, *i. e.* a medium whose motions are determined by the hydrodynamical equations. Some parts of the medium are to be in vortex-motion, and these will necessarily be distributed within certain annular surfaces. The liquid within such a surface is called a vortex, and we are to suppose the atoms of which matter is composed to be such vortices. All the elements of the medium which at any instant form a vortex remain for ever parts of the same vortex. This is the indestructibility and impenetrability of the atom. The vortices may be knotted, or two or more vortices may be linked through each other. In these cases the kind of multiple continuity possessed by the space without or within the vortex is one of its permanent characteristics. This gives us a method of realising different kinds of unalterable atoms which cannot be interchanged. The simple circular ring when undisturbed moves forward with constant velocity in the direction of the circulation through the ring, this realises the external kinetic energy of the atom; it may also vibrate about its circular form, or its section may change shape periodically, and it will thus possess internal energy. The periods of vibration of vortex-atoms for different fundamental modes of deformation should correspond to the lines of the spectrum of the gas composed of them, and the theory of spectrum analysis would require that at least some of the periods should be approximately independent of the energy. It may be observed here that the results obtained later shew that the periods are functions of the energy in all cases except that of a hollow vortex crimped in section.*)

Following up his earlier papers on the general theory of vortex-motion, Sir W. Thomson has considered the theory of the steady motion**) and stability of vortices,***) setting out from the general principle

*) An account of the present state of our knowledge with regard to vortex-motion and the doctrine of vortex-atoms, containing a statement of the results of experimental as well as of theoretical investigations, will be found in a series of memoirs by M. Brillouin, now appearing in the Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

**) A system is said to be in "steady motion" when its motion is similar at any two instants of time. In the case of vortex-motion the term is extended to include all cases in which the forms sizes and velocities and relative configuration of the vortices remain constant.

***) "Vortex Statics." Proc. Roy. Soc. Edin: 1876, and Phil. Mag. (5) X. 1880.

that in steady motion the energy with given vorticity and impulse must fulfil a stationary condition. The motion will be stable if the energy be a thorough maximum or a thorough minimum, but if it be a maximum-minimum its stability cannot be inferred without further investigation. If for the vortex we substitute a perforated solid of the same shape, and suppose the circulations in the different circuits through its perforations to be those required by the vortex-strength of the original vortex, it is clear that to any steady motion of the solid will correspond a steady motion of the vortex; if further every point of the solid be supposed to carry a mark indicating the direction and amount of the vorticity at the corresponding point of the vortex, the distribution of vorticity in the liquid at any instant will be that expressed by these marks. We know that a solid of any shape will have definite modes of steady motion, and we now see that a vortex of the same form as the solid will, for some determinate distribution of vorticity, be capable of steady motion in the same manner as the solid and with the same impulse. This distribution of vorticity being known, we have a solution of the problem, to make the energy stationary with the given vorticity and impulse. As examples of such steady motions we have the Helmholtz ring, a circular vortex-ring with an inner irrotational core, and many cases of knotted and linked vortices. The author treats more at length the case of the circular ring, for which the impulse reduces to an impulsive force without couple. There is just one determinate figure of revolution for which the energy is a maximum, and the ring is stable as regards changes in the form of its section; there are however figures, not of revolution, differing very little from this, which have the same energy with the same vorticity and impulse, so that from the maximum-minimum problem the stability even of the ordinary thin Helmholtz ring cannot be rigidly inferred.

The same author has discussed the stability of vortex-motion within spaces bounded externally by closed surfaces, in a communication to the British Association in 1880.*) In this case the condition for stability is that with given form of boundary and given vorticity the energy is a maximum or minimum. By operations on the boundary the energy may in general be indefinitely increased, so that there is no thorough maximum of energy; but in the case of two-dimensional motion, with given cylindric figure and given vorticity, this is no longer true, and there is a maximum of energy. Except in a few cases, there will be an infinite number of stable steady motions. This is illustrated by the case of a cylinder whose section consists of two nearly complete circles connected by a narrow channel; if a small portion of the fluid

*) "On maximum and minimum energy in vortex motion." Brit. Ass. Rep. 1880, or Nature vol. XXII, p. 618.

be in irrotational motion there will be stable steady motions with this portion distributed in different proportions within the circles. The author gave some cases of the annulment of energy by operations on the boundary which withdraw energy. According to the Helmholtz formula for the energy*) it appears that, if infinitely near to any vortex-filament there is an equal and opposite vortex-filament, the volume-integral term consists of elements which destroy each other identically; if the operations on the boundary can be so conducted that thereafter the elements of the fluid in contact with the boundary are at rest, the energy will be annulled. The operations by which this result could be brought about are not described. Taking however the case of liquid enclosed within a circular cylinder two modes of stable steady motion are described. In the first, for which the energy is a maximum, the rotationally-moving fluid is collected in a circular column concentric with the boundary; in the second, for which the energy is a minimum, it is formed into a thick belt at the boundary. The author proceeds to describe a series of operations to be performed on the boundary, whereby the stable motion with maximum energy may be broken up and transformed into the stable motion with minimum energy. The enclosing case may be supposed constructed of some viscous elastic material. If this be deformed and then held from rotating the central vortex will be thrown into vibration. Waves of corrugation will travel round the case and thereby energy will be consumed and the fluid will lose moment of momentum. Now let the case rotate; the fluid will lose energy, but the moment of momentum remains constant. If the case were again held fixed the energy of the fluid and the moment of momentum would be too small for a return to the original stable steady motion to be possible. This state of motion is broken up, and the way in which it is broken up is by the augmentation of the waves of shorter length. If the case be allowed to rotate at intervals this effect will be increased, and the rotationally-moving liquid will be mixed with the irrotationally-moving liquid in what the author calls a „vortex-sponge". This process may be continued until the sponge occupies the whole enclosure. More energy may now be withdrawn by repeating the operations previously performed on the boundary, and the process may be continued until, when the case is finally held fixed, the condition of minimum energy is arrived at**).

The same author has investigated mathematically the vibrations

*) Lamb. p. 160.

**) Sir W. Thomson is now engaged on this subject, and we may look forward to a revision of this article. See also his papers in the current and forthcoming numbers of the Phil. Mag. „On steady and periodic motions of a perfect incompressible fluid".

of a columnar vortex*). He transforms the equations of hydrodynamics to columnar coordinates $(r, \theta, z,)$ and then supposes all the deviations from the condition of steady motion to be expressed by simple harmonic functions of θ, z and the time. If the steady motion be that of a hollow vortex with irrotational circulation about it revolving within a concentric case, the result is that two systems of waves travel round the cylinder with angular velocity $\omega\left(i \pm \sqrt{N}\right)$, where ω is the angular velocity in the undisturbed motion of points on the internal surface, i is the number of crests in a normal section, and N depends only on the number of crests in a unit length along the generators. In case the vortex contains rotational filaments of uniform vorticity, the periods are given by a transcendental equation which has an infinite number of roots. The solution is simplified if the waves be purely longitudinal or purely sectional. In the first case, if the distance between successive swellings is large compared with the diameter, the velocity of the longitudinal waves is, for the mode of deformation which has the longest period, about $\frac{5}{6}$ of the translational velocity at the surface of the vortex. In the second case the angular velocity of the sectional waves is $i - 1$ times the angular velocity of the vortex, where i is the number of crests on the circumference. The periods are functions of the radius of the vortex column.

In order to complete a vortex theory of matter it is most important to know the way in which the motion of any vortex is altered by the presence of its neighbours. The subject selected for the Adams Prize for 1882 was „A general investigation of the action upon each other of two closed vortices in a perfect incompressible fluid." The prize was awarded to *J. J. Thomson*. His essay**) is divided into four parts. In the first some general results are given, viz: the motion being expressed by Helmholtz's forms***), expressions are obtained for the momentum and angular momentum of the liquid containing vortex-rings, and it is verified that these are constant. A new expression is also obtained for the kinetic energy, which is found useful in the application to the theory of gases. In the remainder of the first part the motion of a single ring is treated. The surface of the undisturbed ring is supposed to be a circular tore, whose sectional radius is very small compared with its aperture. Helmholtz's magnetic analogue†) shews that the velocity produced by any distribution of vortices is

*) Phil. Mag. (5) X.

**) "A Treatise on the motion of Vortex-Rings." London, 1883. (Macmillan & Co.)

***) Lamb, p. 150.

†) Lamb, p. 153. Hicks, Report "On Recent Progress in Hydrodynamics." Brit. Ass. Rep. 1881, p. 64.

proportional to the magnetic force produced by electric currents coinciding in position with the vortex-lines, and such that the strength of the current is proportional to the strength of the vortex; and Maxwell*) has proved that if currents of electricity flow round a tore, whose section is small compared with its aperture, the magnetic effects of the currents are the same as if all the currents were collected into one flowing along the central-line of the tore. Thus the action of a vortex-ring of this shape will be the same as that of one of equal strength condensed along the circular axis. The central-line of the ring when disturbed is supposed to be very nearly circular, viz: referring it to columnar coordinates (ϱ, z, ψ), ϱ differs from the radius of the ring, and z from that at the centre of the ring, by series containing sines and cosines of multiples of ψ with small coefficients. The velocity of the fluid at any point is calculated, as far as the second order in these coefficients, by means of Helmholtz's forms, the vorticity being supposed condensed along the axis. The shape of the ring is taken to be such that all sections through the straight axis remain circular, and have their radius unaltered. The equations of the surface of the ring must satisfy the differential equation of surfaces which always contain the same particles. Substituting for the velocities at the surface the expressions obtained by the method just described, this differential equation gives rise to sufficient equations to determine all the unknown quantities in terms of the time.

Taking m for the strength of the vortex, a for the radius of the central-line, and e for the sectional radius of the undisturbed ring, the results are (1) The angular velocity of the fluid elements round the tangent to the central-line is approximately equal to the spin. (2) The velocity of translation is $V = \frac{m}{2\pi a}\left(\log \frac{8a}{e} - 1\right)$. In the steady motion this is the velocity of points on the central-line; points on any other circle within the vortex (radius ϱ) whose centre is on the axis of the vortex move with velocity $V\frac{a}{\varrho}$. (3) When the ring is disturbed the period of the n^{th} harmonic component vibration is $2\pi/(L.n.\sqrt{n^2-1})$ where

$$4\pi a^2 L = m[\log 64a^2/e^2 - 4f(n) - 1]$$

and

$$f(n) = 1 + 1/3 + 1/5 + \cdots + 1/(2n-1).$$

The first of these was stated by Sir W. Thomson in his note to Tait's translation of Helmholtz's memoir**), and the velocity of translation

*) Electricity and Magnetism vol. II, § 683.

**) Phil. Mag. (4) XXXIII, 1867. p. 511.

was there given as $\frac{m}{2\pi a}\left(\log\frac{8a}{e}-\frac{1}{4}\right)$, which nearly agrees with the result (2). J. J. Thomson's result was also obtained by Lewis*), but, as will be seen below, Hicks's investigation confirms Sir. W. Thomson's statement. As the section of the ring is not in the steady motion an exact circle, the effect is not strictly the same as if the vorticity were condensed along the axis, so that we can hardly expect the method to yield results in which any but the largest terms are correct. The vibrations of the ring cannot be very different from those of the columnar vortex investigated by Sir W. Thomson, and it is accordingly found that the periods for corresponding modes of deformation of the two systems are approximately the same. It may be noted that the periods found are functions of the energy.

In part II is discussed the problem „To find the action of two vortices upon each other which move so as never to approach closer than a large multiple of the diameter of either."

Since the vortices never approach each other very closely the central-line of each vortex-core may be taken to be approximately circular throughout the collision. The velocity of the fluid due to the vortices is then known from the investigation in part I, and at any point of either vortex this must be equal to the velocity of the vortex at that point. We have thus two expressions for the velocity along the radius, and two for that perpendicular to the plane of either vortex, each of them being a series proceeding according to sines and cosines of multiples of the vectorial angle of a point on the corresponding central-line. Equating the coefficients of these series, we obtain sufficient equations to determine the coefficients in the series forming the equation to the central-line of either vortex, *i. e.* the effect of one vortex on the other. The effects of the collision may be divided into (1) the effect upon the radii of the vortex-rings, (2) the deflection of their paths perpendicular to the plane parallel to the original paths of both rings, this we will call the „plane of motion", (3) the deflection of their paths in this plane, (4) the effect on the form of the central-lines. The collisions may be divided into two classes, (a) those in which the shortest distance between the vortices is greater than twice the shortest distance between their original paths, (b) those in which it is less. The effects are given as follows: (p. 63). —

Class (a). If the vortex II be the first to intersect the shortest distance between the directions of motion of the vortices its radius is increased. If its velocity is greater than the velocity of I resolved along the direction of motion of II, it is bent away from the plane of motion,

*) "On the Images of Vortices in a spherical vessel." Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. vol. XVI.

and towards the direction of motion of I in this plane. If its velocity is less than that of I resolved along the direction of motion of II, it is bent away from the plane of motion, and away from the direction of motion of I in this plane. In the same case, if the velocity of I is greater than the velocity of II resolved along the direction of motion of I, then I is bent away from the plane of motion and towards the direction of motion of II in this plane. If the velocity of I is less than that of II resolved along the direction of motion of I, then I is bent away from the plane of motion and away from the direction of motion of II in this plane.

Class (*b*). If the vortex II be the first to intersect the shortest distance between the directions of motion of the vortices its radius is diminished. It is bent from or towards the plane of motion according as the shortest distance between the vortices is greater or less than $2/\sqrt{3}$ times the shortest distance between their original paths, and it is bent from or towards the direction of motion of I according as its velocity is greater or less than the velocity of I resolved along the direction of motion of II. If I be the first to intersect the shortest distance, II is bent in the same manner as before with reference to the plane of motion, but in the opposite way in this plane.

It is also shewn that the central-lines do not remain circular after the collision is over, but become twisted ellipses, vibrating about the circular form with constantly changing ellipticities. The time of vibration is the corresponding free period. It may be noted that the ring which has its radius increased gains energy, but loses translational velocity, and the external energy of the system is diminished by the collision.

Very similar to the above problem is that of finding the motion of a vortex-ring in a fluid in which there is a given irrotational motion. The case where the motion is that of a vortex past a fixed obstacle is discussed, and worked out in the particular case where the obstacle is spherical. The radius of the ring is increased by a quantity whose greatest value is proportional to the volume of the sphere, and varies inversely as the sixth power of the least distance between the vortex and the centre of the sphere. The vortex is attracted towards the sphere, and its path is turned through an angle which varies inversely as the sixth power of the same distance.

In part III the author proceeds to discuss the case of linked vortices. Two rings are supposed to be linked in such a way that the distance between them is small compared with the aperture, but large compared with the sectional diameter, of either. Before the method of part I can be applied, it has to be shewn that the sections of the rings remain approximately circular. The effect of those parts

of ring II which are nearest to any part of ring I in altering the shape of that part, will, under the circumstances contemplated, be great compared with the effect of the remainder; and if these parts of rings I and II can be treated as approximately straight and parallel, the alteration of shape will be comparable with that which takes place in the case of two parallel columnar vortices. It is shewn that two such vortices of strengths m, m', and whose centres are at a distance d, will remain approximately circular, vibrating about the circular form, if their distance be great compared with the diameter of either. In this case they spin round their mean centre with angular velocity $(m + m') / \pi d^2$. We have now to find a method of linking by means of which the rings shall have their nearest parts approximately parallel, and nearly at a constant distance. This is done by the following construction: — describe a tore whose apertural radius is a and sectional radius $\frac{m'}{m+m'} d$, the central-line of the vortex of strength m lies on this tore; describe a second tore, having the same circular axis, but whose sectional radius is $\frac{m}{m+m'} d$, then the central-line of the vortex of strength m' lies on this tore. The central-lines are now to be so arranged that in any plane through the straight axis of the tore the points on the central-lines of the two vortices are at opposite points on the same sectional diameter. The method of part I is applied to find the condition that the motion may be steady. This is a relation between the constants determining the size of the system and the components of the impulse. The motion if steady is stable. The periods of vibration of the system are found, and it is shewn that corresponding to each mode of deformation there are two periods, one long and the other short; these vary with the energy, and are longer the more complex is the linking. The author proceeds to discuss the problem of the motion of n linked vortices of equal strength. It is pointed out that, if n be large, the surface of the tore on which the vortices are linked will approximate to a vortex-sheet, and the motion will become unstable. To throw light on this problem the analogous one of n columnar vortices placed at the corners of a regular polygon inscribed in a circle is solved, and it is shewn that the motion is stable if 3, 4, 5, or 6 vortices are arranged in this way, but unstable if there are 7. It is inferred that probably not more than six vortices can be linked symmetrically round a tore so as to form a stable system.

In part IV the preceding theory is applied to sketch out a vortex-atom theory of gases and a theory of chemical combination. According to the formula for the kinetic energy of a system of vortex-rings investigated in part I, it appears that the temperature of the gas com-

posed of vortex-atoms is very nearly proportional to the sum of the products of the momentum and velocity of its vortex-rings. It is shewn that the pressure of the gas is nearly proportional to the same quantity, and thus we refind Boyle's Law with the kind of defect indicated by Regnault's experiments. After discussing a crucial but probably very difficult experiment to decide between the vortex-atom and the solid-particle theories, the author proceeds to apply his results to the theory of chemical combination. When two vortex-rings of the same sort approach each other in such a way that when nearest together they have nearly equal velocities and nearly coincident planes, they do not separate, but pass alternately through each other. Supposing the vortex-rings to be atoms of a gas, two atoms paired will form a molecule. Any disturbance will tend to separate the molecule into its component atoms. Thus the atoms will be constantly changing partners. If the rings are of different sorts the combination is supposed to form a molecule of a chemical compound. In all cases if the compound is stable the ratio of the time during which the atoms are paired to that during which they are free must be large. The ring-atoms may be simple or complex-ly linked. If two rings are linked in an atom, this can only combine stably with two or an even number of simple rings. Hence from the degree of complexity of an atom of any element we may determine what stable compounds can be formed containing this element, and conversely we may hence infer the kind of complexity of each atom. The valency of several elements is discussed on these principles. The principle that not more than six vortices can be linked together so as to form a stable system is applied to find a limit to the complexity of arrangement of atoms, and shewn to agree with the results of experiment.

On the same subject we may notice a recent paper by the same author*). The principles laid down in his essay are applied to obtain a theory of the electric discharge in gases. It is shewn that, on the vortex-atom theory, the kind of stress which exists in the dielectric medium would be found between the vortically-moving elements of the perfect fluid. Now the electric field is taken to consist of a distribution of velocity in the irrotationally-moving part of the fluid. This disturbance makes the molecules break up more quickly than they otherwise would. If the disturbance in some places becomes so violent as to bring down the ratio of the paired time to the free time to somewhere near the value which it has when the gas is about to be dissociated, any further diminution of the ratio will cause the absorption of a large amount of energy. This energy is drawn from

*) Phil. Mag. (5) XV. 1883.

the electric field, and we have the phenomenon of the electric discharge. Considerations were also adduced to shew that at pressures comparable with the atmospheric pressure the electric strength of a gas would increase as the density decreases, and that at very low pressures the reverse would be the case. Both these results are in accordance with experiment.

I may mention here that a theory of the constitution of the luminiferous ether on the vortex-atom theory has been given by *Hicks**). The perfect fluid required by the theory is incapable of transmitting light-vibrations. The author supposes the medium to be filled with very small and closely packed vortex-atoms, which are portions of the fluid in vortex-motion. A medium thus constructed could transmit light-vibrations and would probably act as a fluid for large motions. The atoms of matter are to be other vortices in the same perfect fluid.

One of the problems presented to a speculator in kinetic theories of matter is the explanation of gravitation between distant masses by the transmission of stress through the intervening medium. Whenever a body in a fluid changes its volume there will be a term proportional to the inverse distance in the velocity-potential**), and two such bodies will appear to act on each other with a force whose principal term varies inversely as the square of the distance between them. A sketch of a vortex-theory of gravitation was first given by Hicks***). He observes that, unless an infinite pressure can be provided, the velocity of elements of the fluid in vortex-motion may be so increased that the pressure sinks to zero; in this case a hollow will be formed. A hollow once existing with circulation round it has similar properties to a vortex, inasmuch as it cannot be destroyed by the action of conservative forces. A hollow vortex with or without rotational filaments may pulsate†), and thus two such vortices will appear to act on each other with a force whose greatest term varies inversely as the square of the distance, when that is great. It was shewn that in the case of spheres the force is an attraction if the periods of pulsation are the same and the phases do not differ by more than a quarter of a period. If this result be true of vortex-atoms, then, in order that gravity may be always an attraction, it is necessary that the period of pulsation should be approximately inde-

---

*) Brit. Ass. Rep. 1885. p. 930.

**) Stokes. "On some cases of Fluid motion." Camb. Phil. Trans. vol. VIII, p. 119. "Reprint of mathematical and physical papers." vol. I, p. 40.

***) "On the problem of two pulsating spheres in a fluid." Camb. Phil. Proc. vol. III, pp. 283 sq.

†) A body is said to pulsate when it changes its volume periodically.

pendent of the energy. If it should be thought that results subsequently obtained are unfavourable to this speculation, it would not follow that we are reduced to explaining the gravitation of matter by attributing the same property arbitrarily to the vortex-atom; on the other hand, when it is remembered how small is the force of gravitation compared with electric and magnetic forces and the molecular forces of cohesion &c., it will be felt as a possibility that the gravitation of masses compacted of vortex-atoms may be a small residual effect, of which our approximate mathematical work has so far failed to take account. At the same time it may be mentioned that, as remarked by Sir W. Thomson*), it is as improbable, not more so, that vortex-atoms should exert on each other a direct action at a distance as that any other atoms should.

Partly to test his theory of gravitation, and partly for its intrinsic interest, Hicks has made an elaborate investigation of the motion of a single vortex-ring. The first step is the determination of functions satisfying Laplace's equation, and suitable for expressing conditions given over the surface of a tore. This was done in the paper on Toroidal Functions**). Taking the two systems of orthogonal circles having common radical axes and limiting points, the figure is rotated round the radical axis perpendicular to the line joining the real limiting points. We thus obtain a system of orthogonal surfaces. Calling the the circle traced out by the limiting points the critical circle, these are

(1) tores $u =$ const. having the same critical circle,

(2) spheres $v =$ const. intersecting in the critical circle,

(3) planes $w =$ const. through the straight axis of the tores.

It is shewn that the functions depend upon zonal spherical harmonics of fractional index, and the zonal functions are expressible in terms of elliptic integrals of the first and second kind whose modulus (k) is $\frac{r}{R+\sqrt{R^2-r^2}}$; where r, $R-r$ are the radii of the section and aperture of the tore. When the section is small compared with the aperture k is small and is nearly equal to $\frac{r}{2R}$. A function satisfying Laplace's equation, and symmetrical about the straight axis, can be expressed in the form $\sqrt{\cosh u - \cos v}\,\Sigma(A_n P_n + B_n Q_n)\cos(nv+\alpha)$, where

*) "Vortex Atoms." Phil. Mag. (4) XXXIV. p. 16.

**) Phil. Trans. 1881. p. 609. In the discovery of these functions, and in an important theorem regarding the solution of Laplace's equation with conditions given over surfaces of revolution, Hicks was anticipated by C. Neumann. The results of his investigation with some applications were given in a pamphlet, "Theorie der Elektricitäts- und Wärme-Vertheilung in einem Ringe", published at Halle in 1864.

P_n, Q_n are zonal harmonics of the first and second kinds having $\sqrt{-1}\cdot u$ for argument and $n-\frac{1}{2}$ for index.

In his next paper Hicks discusses the steady motion and small vibrations of a hollow vortex*). It is shewn that Stokes's stream-function (ψ) can be expressed in the form

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos v}} \sum (A_n R_n + B_n T_n) \cos(nv + \alpha),$$

where

$$R_n = \sinh u \frac{dP_n}{du}, \quad T_n = \sinh u \frac{dQ_n}{du}.$$

The motion of a rigid ring with circulation through its aperture is investigated; and the author proceeds to discuss the motion of a hollow vortex. The form of such a vortex and its motion are conditioned by the fact that the velocity of the fluid relatively to the hollow, when the motion is steady, must be constant over the whole free surface. When the section is small compared with the aperture it is clear that the section is approximately circular, and a first approximation to the motion can be found from the work relating to the rigid tore. The stream-function for the tore held fixed and with fluid streaming past it consists of a term $-\frac{1}{2} V\varrho^2$, where V is the velocity of the stream and ϱ the distance from the axis, together with a series of terms of the form given above, the coefficients in these terms being each one higher in k (the modulus) than the preceding. From this we find the velocity, and the condition is that, to the first order in k, the term in $\cos v$ in the velocity at the surface of the tore is to disappear. This will ensure that, to the lowest order in k, the velocity is constant at the surface of the hollow. The velocity (V) of translation hence found is $V = \frac{\mu}{4\pi a}\left(L - \frac{1}{2}\right)$ where μ is the circulation, $L = \log \frac{4}{k}$, and a is the radius of the critical circle.

The value of k determines the size of the tore. If the section is not exactly circular the defect from circularity can be expressed by making the value of k differ from that for the mean section by a series of sines and cosines of multiples of v with small coefficients; the stream-function will then differ from that in the case of the rigid tore by a new series satisfying the differential equation of Stokes's stream-function, and consequently of the form given above. The condition to be satisfied is that the new stream-function is constant over the surface of the hollow. Since in the old stream-function the terms diminish rapidly, the coefficients in the new stream-function are easily found

*) Phil. Trans. 1884.

in terms of those in the new k. The first coefficient in the latter series is found from the fact that it must destroy the term in $\cos 2v$ in the surface-velocity. The form of the hollow is, to this order of approximation, slightly elliptic, with major axis perpendicular to the plane of the ring and the inner side slightly flatter than the outer*).

It is shewn that the fluid carried forward with the ring is ring-shaped only when the section is very small**), e. g. for $R/r = 100$ the mass is without aperture. The energy of the motion is also found and to the lowest order its expression is

$$\frac{\mu^3}{4\pi V}(L-2)\left(L-\tfrac{1}{2}\right),$$

where V is the velocity of translation.

The small vibrations of the ring are next investigated. It is shewn that if the section is crimped the alteration in volume is small enough to allow us to use the stream-function. The conditions that the surface of the hollow always contain the same particles and that the pressure there is constant solve the problem. The time of vibration is $\frac{\mu\varrho}{2\Pi\sqrt{n(n+1)}}$***), where ϱ is the density, Π the pressure at infinity, and n the number of crests running round the hollow. It is important to notice that this period is independent of the energy of the motion. The pulsations are investigated by means of the velocity-potential, since the stream-function is many-valued. The time of pulsation is $\frac{\mu\varrho}{2\Pi}\sqrt{\log\frac{4}{k}}$, which varies slowly with the energy.

The same author has discussed in a more general manner the motion of the single ring†). He assumes a rotational core of density different from that of the surrounding fluid, an inner hollow with circulation round it, and an additional circulation round the outer surface of the core. For the sake of simplicity it is supposed that the vorticity is constant throughout the rotational core. In the steady motion, the conditions to be satisfied are that the inner and outer surfaces of the core always contain the same particles, and that the pressure is constant over the surface of the hollow and is the same on both sides of the outer boundary of the core. It is shewn that these conditions enable us to solve the problem to any desired order of approximation. The steady motion is known when we know the

*) c. f. "Vortex Statics" Phil. Mag. (5) X. p. 105 and M. J. M. Hill's paper Phil. Trans. 1884, p. 403.

**) Stated by Sir W. Thomson, "Vortex Atoms" Phil. Mag. (4) XXXIV. p. 21.

***) Correctly given in the next paper "Researches on the Theory of Vortex-Rings" Part II. Phil. Trans. 1885, p. 767.

†) "Researches on the Theory of Vortex-Rings" Part. II. Phil. Trans. 1885.

position and size of the hollow, the form of the internal and external boundaries of the core, and the velocity of translation. These are all found for the general case, and the particular cases of no core, continuous core with added circulation, ordinary ring, and hollow vortex with no added circulations, receive special discussion. As mentioned before, the velocity of translation for the ordinary ring is that given by Sir W. Thomson. It is remarked that the effect of increased aperture on the velocity of translation is much diminished after a hollow has been formed. The internal and external energy are also found, and it is noticed that with an internal additional circulation the internal energy is comparable with the external, but decreases as the whole energy increases. The remainder of the memoir is devoted to the discussion of the small sectional vibrations. In the general case, when the section is crimped, the periods depend on a certain biquadratic equation; several special cases are considered. When there is no rotational core the motion is always stable, and the period for each mode of deformation is independent of the energy. For a simple continuous core there are two sets of fluted vibrations, and the ring is unstable unless the ratio of the outer circulation to that due to the core is $> \sqrt{\frac{1}{2}\sigma(\sigma+2)/(\sigma+1)}$, where σ is the ratio of the density of the core to that of the fluid. When there is no added circulation this requires $\sigma < \sqrt{2}$. When there is a hollow and no internal added circulation the simple ring is still stable; but if the core is denser than the surrounding fluid the ring is only stable when the outer added circulation exceeds a certain critical value depending on the densities and the circulations. When there is an inner additional circulation the periods depend on a biquadratic equation. This case is not discussed, but it is stated that the outer added circulation will still be necessary to maintain the stability of a ring with dense core. The pulsations of the hollow ring with rotational filaments are investigated, and it is shewn that the motion is always stable for pulsations.

The memoirs of Hicks and J. J. Thomson are occupied with an attempt to work out some of the more elementary problems of a vortex-atom theory of matter. A quite different train of thought has been followed out by *M. J. M. Hill.* His earlier researches*) are principally connected with the general equations of fluid motion, and need not detain us long here. The main results are similar to those

*) "On some properties of the equations of Hydrodynamics." Quarterly Journal vol. XVII and "On some general equations which include the equations of Hydrodynamics." Camb. Phil. Trans. 1883.

obtained by Clebsch*) a year after the publication of Helmholtz's memoir. It was shewn that the velocity-components can be put in the forms

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial x}\text{**) etc.,}$$

where λ and Ω are surfaces which move so as always to contain the same vortex-lines, and the pressure is given by

$$\frac{p}{\varrho} + V = -\frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\partial \chi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \chi}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \chi}{\partial z}\right|^2\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda^2\left\{\left|\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right|^2\right\}.$$

The functions χ, λ, Ω satisfy certain partial differential equations, viz: the equation of continuity, and the equations expressing that λ and Ω always contain the same particles. This gives us a general method of treating vortex-motion quite different from Helmholtz's, and more allied to the stream-function method employed with such effect by Hicks. Hill***) has developed this method in the cases where there is a stream-function. He shews that the surface separating the fluid moving rotationally from that moving irrotationally may be taken to be any one of the family $\lambda = \text{const.}$ That λ, the spin (ξ), and the stream-function (ψ) are connected by certain equations, and that λ and ξ satisfy certain equations. The equation for ψ was known before. Hence λ and ξ equally with ψ serve for the complete determination of the motion. The author proposes the following methods for solving problems in vortex-motion, when there is a stream-function.

(a) Suppose that any particular integral of the equation in λ is taken, then we know ξ and ψ at every point within $\lambda = 0$, and thus u, v, w, p are known for all points within $\lambda = 0$. Now find a stream-function ψ outside $\lambda = 0$ satisfying the equation of the stream-function, and make ψ outside continuous with ψ inside $\lambda = 0$, the velocity outside is continuous with that inside. If now the value of p calculated from ψ outside is continuous at the surface with that inside $\lambda = 0$, the integral taken of the equation in λ does correspond to a possible case of fluid motion. If on the other hand it be found theoretically impossible to find a stream-function which shall make the velocity and pressure continuous at the surface, then the integral taken of the equation in λ does not correspond to a possible case of fluid motion. It by no means follows that no fluid motion can take place for which

*) Crelle, Bd. LVI.

**) I have changed the notation, to avoid confusion.

***) "On the motion of fluid part of which is moving rotationally and part irrotationally." Phil. Trans. 1884, and — "On the differential equations of cylindrical and annular vortices." Proc. Lond. Math. Soc. vol XVI

the assumed surface separates the rotational from the irrotational parts of the fluid.*)

(b) When the rotational motion is given a method may be derived from Clebsch's forms: — Calculate the quantity $-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\chi = \rho$ (say). Let the potential of a distribution of matter of density ρ inside $\lambda = 0$ be χ' inside, and φ' outside. χ' will in general differ from χ, because χ may contain many-valued terms P satisfying $\nabla^2 P = 0$, and also because $\chi - P$ may be the potential of a distribution of matter part of which is outside $\lambda = 0$. Then $\varphi' + P$ is the velocity-potential of a motion outside $\lambda = 0$ continuous with the given rotational motion inside.

These methods are applied to the solution of the following problems, (1) the motion of an elliptic cylindrical vortex parallel to its major axis, (2) the rotation of such a vortex about its axis in an infinite fluid, and (3) when enclosed in a confocal cylinder, (4) the motion of a fluid in which is a circular cylindrical vortex with vorticity a function of the distance from the axis, (5) the rotational motion within a certain annular surface. The result of (2) is the same as that of Kirchhoff's investigation.**) In (1) and (3) the motion as given by Helmholtz's forms is calculated, and shewn to lead to expressions for the velocity which make the velocity and pressure discontinuous in crossing the surface of the vortex, but in both cases the fluid is shewn to be bounded, and we know that in general for motion in a bounded space the Helmholtz forms require correction unless every vortex-element is within a finite distance of the origin.***) The results are new. The methods proposed would seem to be capable of further extension and application, but no fresh advance has yet been made.

A large class of problems usually considered under vortex-motion is that concerning the motion due to *isolated vortex-filaments*. In two dimensions the velocity- and stream-functions for a vortex are θ and $\log r$, where r is the distance from any point to the vortex, and θ the angle this line makes with a fixed line. When the fluid is bounded internally or externally by a cylindrical surface, we have to find a distribution of vortices which, with the given vortex, will make the surface one across which there is no flow. This distribution is called the "image" of the vortex in the boundary. When the image is known we have only to add the solutions corresponding to the elements of the "object" and the image to obtain the solution of our problem. I shall state the cases solved by English writers, classifying them according to the form of the boundary.

*) See the account of Sir W. Thomson's "Vortex Statics." ante p. 328.

**) "Vorlesungen über Mathematische Physik." Vorlesung XX, § 4, pp. 261 sq.

***) Lamb, p. 154.

(1) Straight lines. Greenhill*) has given the solutions for a single vortex in fluid bounded by one line, by two lines meeting at an angle $\frac{\pi}{n}$, by the sides of an equilateral triangle, by a rectangle. The limiting case of the rectangle when one side moves off to infinity has been discussed by Hicks.**)

(2) Circles. The solutions for a vortex within or without the circle, two vortices equidistant from the centre and equal, or equal and opposite, and within or without the circle, are given by Greenhill in his paper on Plane Vortex-motion.

(3) Straight lines and circles. The solutions for a single vortex in a sector of angle $\frac{\pi}{n}$, or within the curvilinear rectangle bounded by two concentric circles and two radii, are due to Greenhill.*)

(4) Ellipse. The stream-function for a vortex outside or inside an ellipse, and inside a semi-ellipse, has been investigated by Coates,***) the results were deduced from Greenhill's solutions for circles. Some cases are also discussed by Hicks,†) proceeding directly by the method of images.

(5) Other curves. Greenhill††) has given the solutions for a vortex between two confocal Cartesians, proceeding by a method similar to that of Hicks for ellipses, and Basset†††) has found the solution for a vortex inside or outside a cylinder whose transverse section is the inverse of an ellipse with respect to its centre, by inversion from the results obtained by Hicks and Coates.

In three dimensions the problem has not the same simplicity, as the vortex-filament forms a closed curve. It is however still true that an element of a vortex-filament in an unbounded fluid implies at any point a certain velocity determined by Helmholtz's forms.*†) If the fluid be bounded, the expressions must be modified so as to satisfy the

*) "Plane Vortex-motion", Quarterly Journal vol XV, and "Solution by means of Elliptic Functions of some Problems" etc., Quarterly Journal vol XVII also "Some Applications of Weierstrass's Elliptic Functions", Proc. Lond. Math. Soc. vol XVII.

**) "Velocity and Electric Potentials between Parallel Planes," Quarterly Journal vol XV.

***) "Vortex-motion in and about elliptic cylinders." Quarterly Journal vols XV & XVI.

†) "Functional images in ellipses." Quarterly Journal vol. XVII.

††) "On Functional images in Cartesians." Quarterly Journal vol XVIII, and "Some Applications of Weierstrass's Elliptic Functions." Proc. Lond. Math. Soc. vol XVII.

†††) "On the motion of liquid in and about cylinders whose transverse sections are the inverses of confocal ellipses with respect to their centre." Quarterly Journal XIX.

*†) Lamb. p. 152.

boundary conditions, and it may happen that the image of a vortex-filament in the boundary consists of a vortex or a group of vortices. The image of an element of a vortex-filament will be one or more elements of vortex-filaments, but the strength of the image may be a function of position on the object in which case it will vary from point to point on the image. The only case which has been fully worked out is that of a circular vortex-filament in space bounded by a sphere.*) The image of an element of a filament is an element of a filament at the inverse point, and the strengths of the image and the object are inversely proportional to the square roots of their distances from the centre. It is only when the object lies on a sphere concentric with the boundary that the image is a vortex-filament of constant strength. By means of these results Lewis has investigated the motion of a circular vortex-filament within a sphere when it moves symmetrically with respect to a diameter.

Cambridge, May 1887.

Note added September 1887.

Since the above was written, Sir W. Thomson has published two papers on steady and stable vortex-motion in continuation of those considered above.**) The first of these is devoted (1) to shewing how the energy of the motion of a perfect fluid may be indefinitely increased by doing work in a systematic manner on the containing vessel, and then reducing the vessel to rest; (2) to illustrating the subsidence of the motion within a viscously-elastic containing vessel down to the appropriate type of steady stable motion. The second is a revision of the article published in 1880. Some errors are corrected, and some of the statements receive mathematical proof. The conception of vortex-sponge is illustrated by considering a vortex to whose elements is attributed a mutual attraction insensible at sensible distances. In this case, instead of the indefinitely fine drawing out of the sheets of vortex-filaments, we find the vortex breaking up into innumerable detached columns, which, in the steady motion corresponding to any given moment of momentum, revolve uniformly in a cloud. The density of distribution of the vortex-sponge is always similar to that of the cloud of "spindrift" in the new problem. Finally a very simple methode of conducting the operations to be performed in order to transform the stable motion with maximum energy to that with minimum energy is described. This gives a clearer view of the whole problem.

*) Lewis. "On the images of vortices in a spherical vessel." Quarterly Journal vol. XVI.

**) Phil. Mag. (5) XXIII, pp. 459 and 529.

Ueber die ausgezeichneten Untergruppen vom Geschlechte $p = 1$, welche in der Gruppe der linearen ω-Substitutionen enthalten sind.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

In meiner Arbeit über *die Congruenzgruppen der sechsten Stufe**) habe ich von einer transcendenten Modulfunction mehrfach Gebrauch gemacht, welche bei den Substitutionen, die der Identität (mod. 6) congruent waren, sich bis auf eine additive Constante reproducirte:

$$u\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = u(\omega) + \text{const.}$$

Dieselbe war das gemeinsame Integral der vier Curven des Geschlechts $p = 1$, welche wir eindeutig auf die Polygone der vier ausgezeichneten Congruenzgruppen genannter Stufe bezogen.

Zugleich konnten wir unabhängiger $u(\omega)$ als diejenige Function definiren, welche ein Doppeldreieck der ω-Halbebene z. B. das Ausgangsdreieck auf ein geradliniges gleichseitiges Dreieck der u-Ebene abbildete, wobei dann die Theilung des Doppeldreiecks in zwei Elementardreiecke der Theilung des gleichseitigen Dreiecks in zwei geradlinige rechtwinklige entspricht. Das Verhalten von $u(\omega)$ bei den erzeugenden Substitutionen der linearen Gruppe:

$$u(\omega+1) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot u(\omega), \quad u\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -u(\omega) + \text{const.}$$

lehrt uns sodann die Abbildung über das *Ausgangsdreieck* hinaus fortzusetzen. Wir werden die *rechtwinkligen Dreiecke* an ihren freien Seiten wiederholt zur Spiegelung bringen und dann etwa noch die Dreiecke in der gleichen Reihenfolge, wie in der ω-Halbebene, abwechselnd schraffiren und frei lassen**) derart, dass ein schraffirtes

*) Annalen Bd. XXIX, pag. 97.

**) Beispiele von Abbildern, die solchergestalt von Theilen der ω-Halbebene in der u-Ebene entstehen, findet man auf der Figurentafel, welche ich vorgenannter Abhandlung beifügte.

Dreieck jedesmal das Spiegelbild eines freien ist. Bei Ausführung dieser Operation schliessen sich die rechtwinkligen Elementardreiecke in den Eckpunkten jedesmal zu Cyklen von resp. 4, 6 oder 12 Dreiecken zusammen und man übersieht leicht, dass durch unendlich oft wiederholte Spiegelung der Dreiecke an noch freien Seiten die u-Ebene *überall einfach* von congruenten Dreiecken der oben beschriebenen Art überdeckt werden kann.

Aber während $u(\omega)$ eine *eindeutige* Function von ω ist, muss man wohl bemerken, dass umgekehrt $\omega(u)$ eine unendlich vieldeutige Function ist. Wollen wir somit die *gesammte* ω-Halbebene über der *getheilten* u-Ebene zur Darstellung bringen, so müssen wir die letztere *unendlich oft* überdecken, wobei dann die auftretenden Verzweigungspunkte *alle* und *nur* die Punkte der u-Ebene sind, in denen stets *zwölf* Elementardreiecke *ihrer* Theilung im Cyklus zusammenhängen. In der That entsprechen diesen Punkten die reellen rationalen Punkte ω, in denen stets unendlich viele Kreisbogendreiecke zusammenhängen. In dem einzelnen Verzweigungspunkte werden somit stets unendlich viele Blätter der u-Ebene mit einander zusammenhängen und es ist auch nicht schwer den weiteren Nachweis zu führen, dass über jedem der gekennzeichneten Punkte wiederum unendlich viele Verzweigungspunkte beschriebener Art liegen werden.

Hierdurch gewinnen die Punkte ω mit gleichem u eine äusserst einfache Beziehung zu einander. Sie liegen alle in der beschriebenen Riemann'schen Fläche über einem derselben und werden somit alle erreicht, indem wir von einem aus in jeder möglichen Weise Umgänge um die Verzweigungspunkte ausführen. Aber die einmalige Umkreisung eines einzelnen Verzweigungspunktes bedeutet für die ω-Halbebene den Fortgang von ω zu ω', wenn ω und ω' vermöge einer Substitution zusammenhängen, die mit S^6 oder $\omega + 6$ gleichberechtigt ist, und somit kommen wir zu folgendem Satze:

Bildet man alle mit S^6 gleichberechtigten Substitutionen

$$U^{-1} . S^6 . U$$

und macht sie zu den Erzeugenden einer Gruppe, so besteht diese Gruppe aus allen Substitutionen, welche die Function $u(\omega)$ unverändert lassen; oder kurz, *jene ist die Gruppe von u.*

Bereits in meiner genannten Abhandlung habe ich angegeben, dass die Bedeutung von $u(\omega)$ für die Theorie der elliptischen Modulfunctionen durch die Congruenzgruppen der sechsten Stufe in keiner Weise erschöpft ist und meine gegenwärtige Untersuchung soll in diesem Sinne die Ausbeute der Function $u(\omega)$ vervollständigen.

Um sogleich die Hauptgesichtspunkte zu kennzeichnen, nehme man eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index N als gegeben an. Hängen in denjenigen Punkten des Polygons dieser Untergruppe, in

welchen $J = \infty$ wird, jedesmal n Doppeldreiecke zusammen*), so wird das Geschlecht dieses Polygons oder dieser Untergruppe bestimmt durch:

$$p = -N + 1 + \frac{N}{n} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{4}.$$

Fordert man somit insbesondere, dass $p = 1$ sei, so folgt, *dass* $n = 6$ *ist* und umgekehrt gilt der Satz:

Jedes Polygon einer ausgezeichneten Untergruppe, in dem bei $J = \infty$ *stets sechs Doppeldreiecke zusammenhängen, ist vom Geschlechte* $p = 1$.

In Folge dieser Verzweigungsart wird sich in jeder solchen Untergruppe speciell die Substitution $S^6 : \omega' = \omega + 6$ finden und somit, da jene eine ausgezeichnete ist, überhaupt die Gruppe von $u(\omega)$. Erachten wir die Substitutionen, welche $u(\omega)$ ungeändert lassen, als äquivalent mit der Identität, so reducirt sich die einzelne ausgezeichnete Gruppe des Geschlechts $p = 1$ auf eine andere Gruppe, welche freilich auch noch unendlich hoher Ordnung ist, die wir aber holoedrisch isomorph setzen können mit einer ausgezeichneten Gruppe linearer Transformationen von u. Indem wir somit die möglichen Gruppen der letzteren Art aufstellen und beim Rückgang zu den ω-Substitutionen jedesmal die Substitutionen der Gruppe von u hinzusetzen, gelangen wir zu allen ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechts $p = 1$. Zugleich besitzen wir in der Function $u(\omega)$ ein Mittel, eine gewisse arithmetische Definition der gedachten Untergruppen im Anschluss an die Kettenbruchentwicklung**) ihrer Substitutionen anzugeben sowie namentlich auch das Studium der zugehörigen Modulfunctionen einzuleiten.***)

---

*) Cf. Dyck „Ueber reguläre Riemannsche Flächen" Annalen XVII, p. 473.

**) Vergl. hierzu die Einleitung zu der Abhandlung „Ueber die Gruppen der Wurzeln aus k^2" Annalen XXVIII, p. 99.

***) Herr Dyck hat bereits in den gruppentheoretischen Studien (Bd. XX der Ann.) die Fundamentalpolygone der im Folgenden betrachteten Untergruppen aufgezählt. Die ausführliche Betrachtung dieser Gruppen schien mir aber um so weniger überflüssig zu sein, als die Methode, welche ich dabei in Anwendung bringe, der Verallgemeinerung auf höhere Fälle fähig erscheint. Wenn ich übrigens in den vier letzten Abschnitten, wo einige Beispiele für die functionentheoretische Betrachtung herausgegriffen werden, die Beziehungen zur Theilung der elliptischen Functionen durchaus unbeachtet lasse, so geschah dieses vornehmlich deshalb, weil die vorliegenden Fälle in der allgemeinen Theorie der elliptischen Functionen nur einen sehr particulären Charakter tragen ($g_2 = 0$) und also die dort zu Tage tretenden Functionen, als elliptische Functionen eines getheilten Argumentes aufgefasst, nicht das Interesse in Anspruch nehmen können, welches eben diese Grössen als Modulfunctionen von ω aufgefasst naturgemäss verlangen.

Erster Abschnitt.

Die bei Transformation von $u(\omega)$ auftretenden ganzen Zahlen.

§ 1.

Die zahlentheoretische Function $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$.

Bei der getroffenen Normirung von $u(\omega)$ ist die Wirkung der erzeugenden Substitutionen S und T ausgesprochen durch:

$$u(\omega+1) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot u(\omega), \quad u\left(-\frac{1}{\omega}\right) = -u(\omega) + \text{const.}$$

Bezeichnen wir die sechste Einheitswurzel mit ε:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon$$

und denken die Constante in u selbst eingehend derart, dass wir fortan das Product $\frac{1}{\text{const.}} \cdot u(\omega)$ selbst wieder mit $u(\omega)$ bezeichnen, so ist:

$$(1) \qquad u(\omega+1) = \varepsilon\, u(\omega), \quad u\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -u(\omega) + 1.$$

Da eine Potenz von ε stets die Form $a + b\varepsilon$, $(a, b = 0, \pm 1)$ hat, so ist die Wirkung einer beliebigen Substitution dargestellt durch:

$$(2) \qquad u\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \varepsilon^{\nu} \cdot u(\omega) + q + p\varepsilon.$$

Hier bedeuten ν, p, q ganze Zahlen. Dieselben sind *eindeutig* von den Coefficienten der Substitution abhängig, da u selbst eine eindeutige Function von ω ist. Es erscheint somit u multiplicirt mit einer sechsten Einheitswurzel, während als additives Glied rechter Hand eine *ganze algebraische Zahl* auftritt, die aus *dritten Einheitswurzeln* zusammengesetzt ist. Dass dabei auch *jede* ganze Zahl $q + p\varepsilon$ auftritt, erhellt sofort aus den Operationen:

$$u\left(\frac{-1}{\omega+3}\right) = u(\omega) + 1, \quad u\left(\frac{\omega+1}{\omega+2}\right) = u(\omega) + \varepsilon$$

und deren Inversen. Dass es weiter unbegrenzt viele Substitutionen giebt, welche dieselbe Aenderung von u hervorrufen, folgt schon daraus, dass u bei unendlich vielen Substitutionen erhalten bleibt.

Die Zahlen ν, p, q lassen sich leicht auf eine unter ihnen nämlich p zurückführen.

In der That setzen wir in (2) $\omega = i\infty$, so folgt:

$$u\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = q + p\varepsilon,$$

sodass p und q nur von α und γ abhängig sind, was wir durch folgende Schreibweise andeuten wollen:

$$u\left(\begin{matrix}\alpha\omega+\beta\\ \gamma\omega+\delta\end{matrix}\right) = \varepsilon^{\nu} u(\omega) + q\binom{\alpha}{\gamma} + p\binom{\alpha}{\gamma}\cdot\varepsilon.$$

Wenden wir diese Schreibweise einzeln auf die rechte und linke Seite der folgenden Gleichung an:

$$u\left(\frac{(\alpha+\gamma)\omega+\beta+\delta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \varepsilon\, u\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right),$$

so erhalten wir die Identität:

$$\varepsilon^{\nu'} u(\omega) + q\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} + p\binom{\alpha+\gamma}{\gamma}\varepsilon = \varepsilon\left[\varepsilon^{\nu} u(\omega) + q\binom{\alpha}{\gamma} + p\binom{\alpha}{\gamma}\varepsilon\right],$$

d. h. es ist:

$$-p\binom{\alpha}{\gamma} = q\binom{\alpha+\gamma}{\gamma}, \quad p\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} = p\binom{\alpha}{\gamma} + q\binom{\alpha}{\gamma}.$$

Die erste Gleichung giebt uns den Ausdruck von q durch p:

$$q\binom{\alpha}{\gamma} = -p\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}, \tag{3}$$

während die zweite uns folgende für das Symbol p geltende Regel kennen lehrt:

$$p\binom{\alpha}{\gamma} = p\binom{\alpha+\gamma}{\gamma} + p\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}.$$

Die inverse Substitution von $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ ist $\binom{\delta,\ -\beta}{-\gamma,\ \alpha}$. Somit ist:

$$u\left(\begin{matrix}\delta\omega-\beta\\ -\gamma\omega+\alpha\end{matrix}\right) = \varepsilon^{-\nu} u(\omega) + \varepsilon^{-\nu}\left[p\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} - p\binom{\alpha}{\gamma}\varepsilon\right].$$

Andrerseits ist direct:

$$u\left(\begin{matrix}\delta\omega-\beta\\ -\gamma\omega+\alpha\end{matrix}\right) = \varepsilon^{\nu'} u(\omega) - p\binom{\gamma+\delta}{-\gamma} + p\binom{\delta}{-\gamma}\varepsilon.$$

Aus der Vergleichung der additiven Glieder der beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\varepsilon^{\nu} = \frac{p\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} - \varepsilon p\binom{\alpha}{\gamma}}{-p\binom{\gamma+\delta}{-\gamma} + \varepsilon p\binom{\delta}{-\gamma}}, \tag{4}$$

wodurch auch die sechste Einheitswurzel durch Zahlen p ausgedrückt ist.

Bezeichnet man nunmehr einfach $p\binom{\alpha}{\gamma}$ durch $\binom{\alpha}{\gamma}$, so ist:

$$u\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \frac{\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} - \varepsilon\binom{\alpha}{\gamma}}{-\binom{\gamma+\delta}{-\gamma} + \varepsilon\binom{\delta}{-\gamma}}\cdot u(\omega) - \binom{\alpha-\gamma}{\gamma} + \binom{\alpha}{\gamma}\varepsilon$$

§ 2.

Recursionsformeln für die Berechnung von $\binom{\alpha}{\gamma}$.

Die den beiden Substitutionen $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ und $\binom{-\alpha,\ \beta}{\gamma,\ -\delta}$ zugehörenden Doppeldreiecke der ω-Halbebene liegen symmetrisch zur imaginären ω-Axe. Gelangen wir somit zu der ersten Substitution durch die Aufeinanderfolge $S^{a_1}TS^{a_2}T\cdots$ der erzeugenden Substitutionen, so ist die zweite Substitution identisch mit $S^{-a_1}TS^{-a_2}T\cdots$ Nehmen wir hinzu, dass:

$$u(\omega-1)=\varepsilon^5 u(\omega),\qquad \varepsilon^5=1-\varepsilon,$$

so folgt sogleich:

$$u\left(\begin{matrix}-\alpha\omega+\beta\\ \gamma\omega-\delta\end{matrix}\right)=\varepsilon^{5\nu}u(\omega)+\binom{\alpha}{\gamma}-\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}-\binom{\alpha}{\gamma}\varepsilon.$$

Andrerseits folgt wieder direct:

$$u\left(\begin{matrix}-\alpha\omega+\beta\\ \gamma\omega-\delta\end{matrix}\right)=\varepsilon^{5\nu}u(\omega)-\binom{-\alpha-\gamma}{\gamma}+\binom{-\alpha}{\gamma}\varepsilon.$$

Daraus zieht man den Schluss:

$$(1)\qquad \binom{-\alpha}{\gamma}=-\binom{\alpha}{\gamma},\qquad \binom{-\alpha-\gamma}{\gamma}=\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}-\binom{\alpha}{\gamma}.$$

Die erste Formel lehrt, dass ein Zeichenwechsel *einer* der beiden Zahlen α, γ das Zeichen von $\binom{\alpha}{\gamma}$ umkehrt, da ein simultaner Zeichenwechsel ohne Einfluss bleibt. Mit Hülfe der ersten Gleichung schreibt sich die zweite:

$$(2)\qquad \binom{\alpha+\gamma}{\gamma}=\binom{\alpha}{\gamma}-\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}.$$

Formeln (1) und (2) gestatten ein beliebiges $\binom{\alpha}{\gamma}$ auf *eines* oder *zwei* solche zurückzuführen, in denen die obere Zahl positiv und kleiner als γ ist. Zugleich merken wir noch die beiden folgenden aus (2) ohne Weiteres entspringenden Formeln an:

$$(2\,a)\qquad \binom{\alpha+3\gamma}{\gamma}=-\binom{\alpha}{\gamma},\qquad \binom{\alpha+6\gamma}{\gamma}=\binom{\alpha}{\gamma}.$$

Im Weiteren werden wir zu wissen verlangen, wie sich $\binom{\alpha}{\gamma}$ bei Vertauschung von α und γ verhält. Aber es ist:

$$u\left(\begin{matrix}-\gamma\omega-\delta\\ \alpha\omega+\beta\end{matrix}\right)=-u\left(\begin{matrix}\alpha\omega+\beta\\ \gamma\omega+\delta\end{matrix}\right)+1,$$

woraus die identische Gleichung entspringt:

$$-\varepsilon^{\nu}u(\omega)+\binom{\alpha+\gamma}{\alpha}+\binom{-\gamma}{\alpha}\varepsilon=-\varepsilon^{\nu}u(\omega)+1+\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}-\binom{\alpha}{\gamma}\varepsilon.$$

Von den beiden hieraus entstehenden Relationen nenne ich nur die zweite:

$$\binom{\alpha}{\gamma}=\binom{\gamma}{\alpha}. \tag{3}$$

Die drei Recursionsformeln gestatten jedes fragliche $\binom{\alpha}{\gamma}$ zu berechnen, wenn man etwa noch die Anfangswerthe:

$$\binom{1}{0}=0 \quad \text{oder} \quad \binom{1}{1}=1$$

angiebt.

Zusätzlich sei noch Folgendes bemerkt. Die Zahlen α, γ sind zunächst ihrer Natur nach relativ prim. Die Ausdehnung des Zeichens auf beliebige Zahlenpaare soll gegeben sein durch:

$$\binom{\varkappa\cdot\alpha}{\varkappa\cdot\gamma}=\binom{\alpha}{\gamma}. \tag{4}$$

§ 3.

Zwei andere Ausdrucksweisen der sechsten Einheitswurzel ε^{ν}.

Eine beliebige Substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ gebe in ihre Kettenbruchentwicklung aufgelöst:

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}=a_0-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n+\omega}. \tag{1}$$

Dabei wollen wir zuvörderst den Theilnennern a_i keinerlei einschränkende Bedingungen auferlegen, so dass wir die Entwicklung (1) unter einer grossen Reihe coordinirter auswählen können.

Für die sechste Einheitswurzel ε^{ν} in:

$$u\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=\varepsilon^{\nu}\cdot u(\omega)+\text{const.},$$

auf welche wir in diesem Paragraphen allein achtgeben, bestimmt man dann ohne jede Mühe:

$$\nu\equiv\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\cdot 3+\sum_{i=0}^{n}a_i \pmod 6. \tag{2}$$

Daraus entspringt folgender Satz:

Wie man auch insbesondere die Kettenbruchentwicklung (1) *auswählen mag, stets ist die ganze Zahl*

$$\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\cdot 3+\sum_{i=0}^{n}a_i$$

mod. 6 *genommen die nämliche und giebt uns zugleich den Exponenten* ν *der sechsten Einheitswurzel* ε^ν *an, mit welcher die Function* $u(\omega)$ *nach Ausführung der Substitution* (1) *multiplicirt erscheint.*

Eine *dritte* Darstellung eben dieser sechsten Einheitswurzel ε^ν knüpft sofort an die Coefficienten der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$. In der That kann man zeigen, *dass stets:*

$$(3)\quad \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\cdot 3+\sum_{i=0}^{n}a_i\equiv\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)[\alpha\beta+3\beta\gamma+\gamma\delta],\quad (\text{mod. } 6)$$

ist, wobei rechter Hand $\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)$ das Legendresche Zeichen bedeutet. Ich beweise die Congruenz (3) durch den Schluss der vollständigen Induction. Eine kurze Rechnung zeigt, dass sie für $n=1$ gültig ist. Kann man somit zeigen, dass sie für Kettenbrüche mit $(n+1)$ Theilnennern $a_0\,a_1\ldots a_n$ gilt, falls sie für solche mit n Theilnennern $a_0\,a_1\ldots a_{n-1}$ gültig ist, so ist damit ihre allgemeine Richtigkeit dargethan.

Und nun folgt aus (1):

$$\frac{(a_n\alpha-\beta)\,\omega+\alpha}{(a_n\gamma-\delta)\,\omega+\gamma}=a_0-\cfrac{1}{a_1-\cfrac{1}{a_2-\ddots-\cfrac{1}{a_{n-1}+\omega}}}.$$

Da (3) für diesen Kettenbruch in Kraft ist, so haben wir den Ansatz:

$$\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot 3+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\equiv\left(\frac{(a_n\alpha-\beta)^2+(a_n\gamma-\delta)^2}{3}\right)\cdot[(a_n\alpha-\beta)\alpha+3\alpha(a_n\gamma-\delta)+(a_n\gamma-\delta)\gamma],\ (\text{mod. } 6).$$

oder etwas anders geordnet:

$$\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot 3+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\equiv\left(\frac{a_n^2(\alpha^2+\gamma^2)+a_n(\alpha\beta+\gamma\delta)+\beta^2+\delta^2}{3}\right)\cdot[a_n(\alpha^2+3\alpha\gamma+\gamma^2)-\alpha\beta-3\alpha\delta-\gamma\delta],\ (\text{mod. } 6).$$

Hieraus folgt weiter, indem man beiderseits $3+a_n$ hinzufügt:

$$\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\cdot 3+\sum_{i=0}^{n}a_i\equiv a_n+\left(\frac{a_n^2(\alpha^2+\gamma^2)+a_n(\alpha\beta+\gamma\delta)+\beta^2+\delta^2}{3}\right)\cdot$$

$$[a_n(\alpha^2+3\alpha\gamma+\gamma^2)-\alpha\beta-3\beta\gamma-\gamma\delta],\quad (\text{mod. } 6).$$

Man setze abkürzend:

$$S=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\cdot 3+\sum_{i=0}^{n}a_i$$

und betrachte die letzte Congruenz nach einander mod. 2 und mod. 3.

Zuvörderst ist:

$$S\equiv a_n+a_n(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta,\quad (\text{mod. } 2)$$

und da $\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2$ stets ungerade:

$$(A)\quad S\equiv\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta\equiv\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)[\alpha\beta+3\beta\gamma+\gamma\delta],\quad (\text{mod. } 2).$$

Ferner ist:

$$S\equiv a_n+[a_n^2(\alpha^2+\gamma^2)+a_n(\alpha\beta+\gamma\delta)+\beta^2+\delta^2][a_n(\alpha^2+\gamma^2)-(\alpha\beta+\gamma\delta)],\quad (\text{mod. } 3)$$

d. i.

$$S\equiv a_n[1+(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2)+a_n^2-(\alpha\beta+\gamma\delta)^2]-(\alpha\beta+\gamma\delta)(\beta^2+\delta^2),\quad (\text{mod. } 3)$$

oder:

$$S\equiv a_n[1+a_n^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2-2\alpha\delta.\beta\gamma]-(\alpha\beta+\gamma\delta)(\beta^2+\delta^2),\ (\text{mod. } 3).$$

$$S\equiv a_n(a_n^2-1)-(\alpha\beta+\gamma\delta)(\beta^2+\delta^2),\ (\text{mod. } 3).$$

Das erste Glied ist stets durch 3 theilbar. Ueberdies geht aus der eben gegebenen Entwicklung hervor, dass:

$$-1\equiv(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2)+1-(\alpha\beta+\gamma\delta)^2\quad (\text{mod. } 3).$$

Somit dürfen wir schreiben:

$$S\equiv(\alpha\beta+\gamma\delta)(\beta^2+\delta^2)[(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2)+1-(\alpha\beta+\gamma\delta)^2],\ (\text{mod. } 3)$$

d. h. da

$$(\beta^2+\delta^2)^2\equiv 1,\quad (\alpha\beta+\gamma\delta)^3\equiv\alpha\beta+\gamma\delta,\quad (\text{mod. } 3),$$

ist:

$$(B)\quad S\equiv(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\gamma\delta)\equiv\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)[\alpha\beta+3\beta\gamma+\gamma\delta],\ (\text{mod. } 3).$$

Aus (A) und (B) folgt sodann:

$$S\equiv\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)[\alpha\beta+3\beta\gamma+\gamma\delta],\quad (\text{mod. } 6)$$

und somit die allgemeine Gültigkeit der Congruenz*) (3).

---

*) Die hiermit erhaltene dritte Gestalt der sechsten Einheitswurzel zeigt sich übrigens identisch mit der 2^{ten} Potenz der 12^{ten} Einheitswurzel, welche Herr Hurwitz für die lineare Transformation der 12^{ten} Wurzel aus der Discriminante Δ

§ 4.

Darstellung der Zahlen $\binom{\alpha}{\gamma}$ durch die Theilnenner der Kettenbrüche.

Um die ganze Zahl $\binom{\alpha}{\gamma}$ durch die Theilnenner a_i einer beliebigen Kettenbruchentwicklung des irreduciblen Bruches $\frac{\alpha}{\gamma}$:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_{n-1}}}} \tag{1}$$

auszudrücken, setze man in der Gleichung:

$$u\left(\begin{matrix}\alpha\omega+\beta\\ \gamma\omega+\delta\end{matrix}\right) = \varepsilon^{\nu}\, u(\omega) + \binom{\gamma-\alpha}{\gamma} + \binom{\alpha}{\gamma}\varepsilon$$

$\omega = i\infty$, wodurch man den Werth der Function u im rationalen reellen Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ erhält:

$$u\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \binom{\gamma-\alpha}{\gamma} + \binom{\alpha}{\gamma}\varepsilon.$$

Dieses vorausgesetzt schreibe ich in etwas anderer Form:

$$\frac{\alpha'\omega+\alpha}{\gamma'\omega+\gamma} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_{n-1}+\omega}}}$$

sowie überhaupt:

$$\frac{\alpha^{(k)}}{\gamma^{(k)}} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_{n-k-1}}}}.$$

Dann ist nach Formel (2) § 3:

$$u\left(\frac{\alpha'\omega+\alpha}{\gamma'\omega+\gamma}\right) = (-1)^{n+1}\varepsilon^{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}\cdot u(\omega) + \binom{\gamma'-\alpha'}{\gamma'} + \binom{\alpha'}{\gamma'}\varepsilon$$

und da für $\omega = 0$ u der Einheit gleich wird:

$$\binom{\gamma-\alpha}{\gamma} + \binom{\alpha}{\gamma}\varepsilon = (-1)^{n+1}\cdot\varepsilon^{\sum_{i=0}^{n-1}a_i} + \binom{\gamma'-\alpha'}{\gamma'} + \binom{\alpha'}{\gamma'}\varepsilon.$$

---

angiebt (Math. Ann. XVIII, p. 565) oder auch mit der 4^{ten} Potenz derjenigen Einheitswurzel, welche Herr Molien für $\sqrt[2]{\Delta}$ bestimmt hat. (Cf. Berichte der Kgl. sächsischen Gesellsch. d. W. vom 12. Jan. 1885).

Nimmt man hinzu, dass stets:

$$(A) \qquad \varepsilon^{\Theta} = (-1)^{1+\Theta} \cdot \left(\frac{\Theta+2}{3}\right) + (-1)^{1+\Theta}\left(\frac{\Theta}{3}\right)\varepsilon,$$

wobei man für das Legendresche Zeichen den üblichen Zusatz braucht, dass dasselbe verschwinden soll, falls die im Zähler stehende Zahl durch 3 theilbar ist, so folgt:

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right) + (-1)^{n+\sum_{0}^{n-1} a_i} \cdot \left(\frac{\sum_{0}^{n-1} a_i}{3}\right).$$

Genau so zeigt man:

$$\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right) = \left(\frac{\alpha''}{\gamma''}\right) + (-1)^{n-1+\sum_{0}^{n-2} a_i} \cdot \left(\frac{\sum_{0}^{n-2} a_i}{3}\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{\alpha^{(n-2)}}{\gamma^{(n-2)}}\right) = \left(\frac{\alpha^{(n-1)}}{\gamma^{(n-1)}}\right) + (-1)^{2+\sum_{0}^{1} a_i} \cdot \left(\frac{\sum_{0}^{1} a_i}{3}\right),$$

während direct ist:

$$\left(\frac{\alpha^{(n-1)}}{\gamma^{(n-1)}}\right) = (-1)^{1+a_0}\left(\frac{a_0}{3}\right).$$

Durch Addition dieses Gleichungssystems erhält man folgenden Satz:

Die ganzzahlige Summe der Reihe:

$$-(-1)^{a_0}\left(\frac{a_0}{3}\right) + (-1)^{a_0+a_1}\left(\frac{a_0+a_1}{3}\right) - (-1)^{a_0+a_1+a_2}\left(\frac{a_0+a_1+a_2}{3}\right) + \cdots$$

ist von der speciellen Wahl der Kettenbruchentwicklung (1) *unabhängig und giebt uns den Werth der zahlentheoretischen Function* $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ *an:*

$$(2) \qquad \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+\sum_{i=0}^{k} a_i} \cdot \left(\frac{\sum_{i=0}^{k} a_i}{3}\right).$$

Will man eine eindeutige Kettenbruchentwicklung haben, so kann man etwa vorschreiben, dass sämmtliche Theilnenner a_i ungerade Zahlen seien. Dann ist

$$(2a) \qquad \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\sum_{i=0}^{k} a_i}{3}\right).$$

Zugleich gelten von den folgenden Congruenzen jedesmal die *nebeneinander* stehenden *simultan:*

$$n \equiv 1 \pmod 3, \quad \alpha \equiv \gamma \equiv 1 \pmod 2,$$
$$n \equiv 2 \pmod 3, \quad \alpha \equiv 0, \quad \gamma \equiv 1 \pmod 2,$$
$$n \equiv 0 \pmod 3, \quad \alpha \equiv 1, \quad \gamma \equiv 0 \pmod 2.$$

Zweitens könnte man etwa verlangen, dass alle a_i gerade Zahlen seien:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 2a_0 - \frac{1}{2a_1 - \cdot \cdot - \frac{1}{2a_{n-1}}},$$

eine Entwicklung, die indessen nur unter der Bedingung:

$$\alpha \equiv \gamma + 1 \equiv n + 1 \pmod 2$$

statthaft ist. Dann folgt:

$$\binom{\alpha}{\gamma} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\frac{\sum_{i=0}^{k} a_i}{3}}{} \cdot \tag{2b}$$

§ 5.

Betrachtung der Zahlen $\binom{\alpha}{\gamma}$ mod. 2 und mod. 3.

Indem ich für die sechste Einheitswurzel ε^ν die directe Darstellung durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ anwende und dann wieder in der Formel:

$$u\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \varepsilon^\nu \cdot u(\omega) + \binom{\gamma - \alpha}{\gamma} + \binom{\alpha}{\gamma}\varepsilon$$

$\omega = 0$ setze, folgt unter Benutzung von (A) § 4 durch Vergleichung der Coefficienten von ε:

$$\binom{\beta}{\delta} + (-1)^{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta} \binom{\frac{\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right) \cdot (\alpha\beta+\gamma\delta)}{3}}{} = \binom{\alpha}{\gamma},$$

so dass mod. 4 die folgende Congruenz gültig ist:

$$2\left[\binom{\alpha}{\gamma} - \binom{\beta}{\delta}\right] \equiv 2\left(\frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{3}\right), \pmod 4.$$

Nun zeigte sich früher:

$$(\alpha\beta + \gamma\delta)^2 \equiv (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) - 1 \pmod 3$$

und, da weder $\alpha^2 + \gamma^2$ noch $\beta^2 + \delta^2$ durch 3 theilbar sein kann, folgt:

$$\left(\frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{3}\right)^2 \equiv \left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\beta^2+\delta^2}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)\left(\frac{\beta^2+\delta^2}{3}\right), \pmod 3,$$

eine Congruenz, welche man leicht in die folgende Gleichung umsetzt:

$$4\left(\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{3}\right)^2=\left[\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)-\left(\frac{\beta^2+\delta^2}{3}\right)\right]^2.$$

Durch Wurzelziehung folgt in Bezug auf den Modul 4:

$$2\left(\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{3}\right)\equiv\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)-\left(\frac{\beta^2+\delta^2}{3}\right),\ \text{(mod. 4)},$$

so dass endlich im Verein mit obiger Congruenz mod. 4 das folgende Resultat entsteht:

$$2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)-\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)\equiv 2\left(\frac{\beta}{\delta}\right)-\left(\frac{\beta^2+\delta^2}{3}\right).$$

Ich bediene mich nun wieder der andern Schreibweise $\left(\frac{\alpha',\ \alpha}{\gamma',\ \gamma}\right)$ für die Substitution $\left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right)$. Dann ist:

$$2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)-\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)\equiv 2\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)-\left(\frac{\alpha'^2+\gamma'^2}{3}\right)\ \text{(mod. 4)}.$$

Mehrfache Wiederholung derselben Argumentation zeigt:

$$2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)-\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right)\equiv 2\left(\frac{\alpha^{(k)}}{\gamma^{(k)}}\right)-\left(\frac{\alpha^{(k)2}+\gamma^{(k)2}}{3}\right),\ \text{(mod. 4)},$$

sowie schliesslich:

$$2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\equiv 1-\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{3}\right),\ \text{(mod. 4)}. \tag{1}$$

Diese Congruenz enthält das nachfolgende Resultat:

Ist $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ *eine gerade Zahl, so ist eine der Zahlen* α, γ *durch* 3 *theilbar. Ist* $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ *ungerade, so ist weder* α *noch* γ *ein Multiplum von* 3.

Betrachten wir $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ bezüglich der ganzen Zahl 3, so können wir die Darstellung durch die Theilnenner der Kettenbruchentwicklung bedeutend vereinfachen, wie ich solches z. B. für ein gerades γ durchführen will. Unter dieser Bedingung kann man setzen:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=2a_0-\cfrac{1}{2a_1-\cfrac{1}{2a_2-\cdots-\cfrac{1}{2a_{2n-1}}}},$$

so dass

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\left(\frac{\sum_{i=0}^{k}a_i}{3}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{2k}}{3}\right)-\left(\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{2k+1}}{3}\right)\right].$$

Da nun stets

$$\left(\frac{m}{3}\right) \equiv m \pmod 3, \tag{A}$$

so folgt*):

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \equiv a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} \pmod 3. \tag{2}$$

Aber während wir soeben fanden, dass die Betrachtung von $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ mod. 2 gewisse Congruenzbedingungen mod. 3 für α und γ nach sich zog, habe ich l. c. bewiesen, dass die Forderung:

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \equiv \left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right) \pmod 3,$$

abgesehen von der hier vorausgesetzten Bedingung, dass γ und γ' gerade seien, *keinerlei Congruenzbedingungen in Bezug auf irgend einen Modul zwischen α, α', γ, γ' nach sich zieht.* Dass aber hier selbst die Bedingung, γ sei gerade, durchaus unwesentlich ist, ersehe man aus der Identität

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \left(\frac{\alpha}{3\alpha - \gamma}\right).$$

Anders verhält es sich mit der Congruenz:

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\gamma}\right) \equiv \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) + \left(\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}\right) \equiv 0, \pmod 3,$$

welche in der That mit Bedingungen für α und γ mod. 2 äquivalent ist. Um dieselben abzuleiten, seien alle a_i in:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{1}{a_n}}}, \qquad \frac{\alpha+\gamma}{\gamma} = (a_0+1) - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{1}{a_n}}},$$

ungerade Zahlen. Dann schreibt sich die geforderte Congruenz nach § 4, wie folgt:

$$\left(\frac{a_0}{3}\right) + \left(\frac{a_0+a_1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{3}\right) - \left(\frac{a_0+1}{3}\right)$$
$$- \left(\frac{a_0+a_1+1}{3}\right) - \cdots - \left(\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n+1}{3}\right) \equiv 0, \pmod 3,$$

so dass mit Rücksicht auf (A) die folgende Congruenz besteht:

$$(n+1)a_0 + na_1 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n - (n+1)a_0 - na_1 - \cdots - 2a_{n-1}$$
$$- a_n - (n+1) \equiv 0, \pmod 3.$$

*) Ueber die weitere Verwendung dieser Summe der ungeraden Theilnenner für die Theorie des Legendreschen Integralmoduls vergl. man Annalen XXVIII, pag. 99.

Das heisst aber:

$$n \equiv 2, \pmod 3$$

oder nach § 4

$$\alpha \equiv 1, \quad \gamma \equiv 0, \pmod 2.$$

§ 6.

Betrachtung der Zahlen $\binom{\alpha}{\gamma}$ bezüglich der Potenz einer Primzahl.

Bedeutet p eine Primzahl, die grösser ist als 3, r eine beliebige Zahl und sind α, γ zwei beliebige relative Primzahlen, so behaupte ich:

Es lassen sich in allen Fällen zwei relative Primzahlen A, Γ *angeben, so dass:*

$$(1) \qquad \binom{\mathsf{A}}{\Gamma} = \binom{\alpha}{\gamma}, \quad \binom{\mathsf{A}-\Gamma}{\Gamma} = \binom{\alpha-\gamma}{\gamma},$$

während dieselben zugleich den Congruenzen:

$$(2) \qquad \mathsf{A} \equiv m, \quad \Gamma \equiv n, \pmod{p^r}$$

genügen, unter m *und* n *zwei beliebige Reste mod.* p^r *verstanden, die nur nicht zugleich durch* p *theilbar sein sollen.*

In der That, die beiden Gleichungen:

$$u(\omega + 6) = u(\omega), \quad u\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -u(\omega) + 1$$

haben leicht die anderen:

$$u\left(\frac{(\alpha + 6x\gamma)\omega + \beta + 6x\delta}{[\gamma + 6y(\alpha + 6x\gamma)]\omega + \delta + 6y(\beta + 6x\delta)}\right) = u\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right),$$

$$u\left(\frac{[\alpha + 6\eta(\gamma + 6\xi\alpha)]\omega + \beta + 6\eta(\delta + 6\xi\beta)}{(\gamma + 6\xi\alpha)\omega + \delta + 6\xi\beta}\right) = u\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right)$$

zur Folge, wobei x, y, ξ, η unbestimmte ganze Zahlen sind. Es folgt somit, dass wir die Gleichungen (1) befriedigen durch das Zahlenpaar:

$$\mathsf{A} = \alpha + 6x\gamma, \quad \Gamma = \gamma + 6y(\alpha + 6x\gamma),$$

oder auch durch das andere Paar:

$$\mathsf{A} = \alpha + 6\eta(\gamma + 6\xi\alpha), \quad \Gamma = \gamma + 6\xi\alpha.$$

Und nun können wir in allen Fällen über die unbestimmten Zahlen x, y oder ξ, η so verfügen, dass wenigstens eines der angegebenen Zahlenpaare den Congruenzen (2) genügt. Um dieses zu zeigen betrachte man folgende Einzelfälle:

I. $\gamma \gtrless 0, \pmod p$.

Ist dann zugleich m nicht durch p theilbar, so bestimme man x und y aus den lösbaren Congruenzen:

$$6\gamma \cdot x \equiv m - \alpha, \quad 6my \equiv n - \gamma, \pmod{p^r},$$

um durch das erste Zahlenpaar A, Γ den Forderungen (2) zu genügen. Ist zweitens m durch p theilbar, so gilt dieses von n nicht. Wir bestimmen dann nach der soeben gegebenen Regel ein Zahlenpaar A', Γ, so dass:

$$\binom{\mathsf{A}'-\Gamma}{\Gamma} = \binom{\alpha-\gamma}{\gamma}, \quad \binom{\mathsf{A}'}{\Gamma} = \binom{\alpha}{\gamma}$$

und zugleich:

$$\mathsf{A}' \equiv 1, \quad \Gamma \equiv n \pmod{p^r}.$$

Sodann setzen wir:

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}' + 6x\Gamma$$

und genügen den Forderungen (1) und (2) vollständig, indem wir für x die Wurzel der lösbaren Congruenz:

$$6n \cdot x \equiv m - 1, \pmod{p^r}$$

eintragen.

II. $\gamma \equiv 0, \pmod{p}$.

Dann ist nothwendig $\alpha \gtrless 0 \pmod{p}$ und es liefert uns die zweite Gestalt des Zahlenpaares A, Γ in genau analoger Weise, wie unter I. gewünschte Zahlen.

Theilt man die Paare relativer Primzahlen mod. μ in *Classen* ein, indem man zwei Paare α, γ und α', γ' in eine Classe bringt, falls zugleich:

$$\alpha \equiv \alpha', \quad \gamma \equiv \gamma' \pmod{\mu}$$

ist, so folgt der Satz:

Sind e und f beliebige ganze Zahlen, so finden sich in jeder Zahlenpaarclasse (mod. p^r) *Paare α, γ, die den Gleichungen*

$$\binom{\alpha-\gamma}{\gamma} = e, \quad \binom{\alpha}{\gamma} = f$$

genügen.

Ein Specialfall dieses Satzes ist der andere:

Die Forderung, dass sowohl $\binom{\alpha}{\gamma}$ wie $\binom{\alpha-\gamma}{\gamma}$ verschwindet, hat keine Congruenzen für α, γ (mod. p^r) *zur Folge.*

Für $p = 2, 3$ genüge es die Erweiterung des letzten Satzes zu bestimmen. Die Gleichungen:

$$\binom{\alpha}{\gamma} = 0, \quad \binom{\alpha-\gamma}{\gamma} = 0$$

können zufolge des vorhergehenden Paragraphen nur bestehen unter der Bedingung:

$$\gamma \equiv 0 \pmod{2}, \quad \gamma \equiv 0 \pmod{3}.$$

Dass diese Bedingungen die einzigen sind, welche resp. mod. 2^r und mod. 3^r gelten, ist jetzt darzuthun.

Bedeutet demnach i entweder 2 oder 3, so müssen wir Zahlenpaare α, γ nachweisen, die

$$\left(\begin{matrix}\alpha - \gamma \\ \gamma\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\alpha \\ \gamma\end{matrix}\right) = 0 \tag{3}$$

geben, während γ (mod. i^r) einer beliebigen durch i theilbaren, α bezüglich desselben Moduls einer durch i nicht theilbaren Zahl congruent sein soll. Nun ist:

$$\left(\begin{matrix}1 \\ 6\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}5 \\ 6\end{matrix}\right) = 0$$

und somit für irgend ein zu 6 relativ primes α

$$\left(\begin{matrix}\alpha - 6 \\ 6\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\alpha \\ 6\end{matrix}\right) = 0.$$

Wählen wir α nach Vorschrift (mod. i^r), was hiernach stets angeht, und setzen sodann:

$$\gamma = 6 + 6x\alpha,$$

so können wir x so bestimmen, dass γ (mod. i^r) einer durch i theilbaren übrigens willkürlichen Zahl congruent ist, während

$$\left(\begin{matrix}\alpha - \gamma \\ \gamma\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\alpha - 6 \\ 6\end{matrix}\right) = 0, \quad \left(\begin{matrix}\alpha \\ \gamma\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\alpha \\ 6\end{matrix}\right) = 0$$

ist.

Hat die Forderung (3) *Congruenzen* (mod. i^r) *zur Folge, so ist* $r = 1$ *und die einzige geltende Congruenz lautet:*

$$\alpha \equiv +1, \quad \gamma \equiv 0, \quad (\text{mod. } i).$$

§ 7.

Zahlentheoretische Folgerungen.

Die Transformation der n^{ten} Ordnung ausgeübt auf die Function*) $u(\omega)$ führt zur Kenntniss einer Reihe von Relationen zwischen den ganzen Zahlen $\left(\begin{matrix}\alpha \\ \gamma\end{matrix}\right)$, von denen ich hier ein specielles Beispiel entwickeln will.

Versteht man unter n eine zu 6 theilerfremde Zahl und sei $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$ ... ein zum Schema

$$\left(\begin{matrix}1, & 0 \\ 0, & n\end{matrix}\right), \quad (\text{mod. } 6)$$

congruentes Repräsentantensystem, so gilt die Gleichung:

$$\sum u(R_i(\omega)) = \psi(n) \cdot u(\omega), \tag{1}$$

*) Man vergl. die Abhandlungen von Herrn Hurwitz über Classenzahlrelationen, insbesondere Math. Ann. Bd. XXV, p. 189 und Berichte der Königl. Sächs. Gesell. d. Wissenschaften vom 4. Mai 1885.

wo $\psi(n)$ die im n^{ten} Entwicklungscoefficienten*) des Integrals $u(\omega)$ auftretende zahlentheoretische Function ist. Somit bedeutet $\psi(n)$ die Summe über alle positiven ganzen Zahlen ν:

$$\psi(n) = \sum \binom{\nu}{3} \nu,$$

welche mit beliebigen ganzen Zahlen μ Darstellungen von n in der Form:

$$n = 3\mu^2 + \nu^2$$

liefern.

Setzen wir nun für ω in (1) einen rationalen Zahlwerth $\frac{\alpha}{\gamma}$, so wird $u\left(R_i\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right)$ identisch mit einer ganzen complexen Zahl

$$u\left(R_i\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right) = a_i + b_i\varepsilon,$$

wo die a_i, b_i Zahlen der bislang betrachteten Art sind. Setzen wir dann noch

$$u\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = a + b\varepsilon,$$

so folgen die Identitäten:

$$\sum a_i = \psi(n)\, a, \quad \sum b_i = \psi(n)\, b, \tag{2}$$

welche schon deshalb aus dem Rahmen der bisherigen Entwicklungen hinaustreten, weil in ihnen die Function $\psi(n)$ enthalten ist. Zur weitern Erläuterung führe ich nur den einen Fall weiter aus, dass n eine Primzahl der Form $6h + 1$ ist. Dann folgt bei einfachster Wahl der Repräsentanten:

$$u(n\omega) + \sum_{i=0}^{n-1} u\left(\frac{\omega + i(n-1)}{n}\right) = \psi(n) \cdot u(\omega).$$

Setzt man nun $\omega = 1$ und vergleicht die Coefficienten von ε links und rechts, so folgt:

$$\binom{n}{1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{in - i + 1}{n} = \psi(n),$$

oder, da

$$\binom{n}{1} = \binom{n \cdot n - n + 1}{n},$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{in - i + 1}{n} = \psi(n).$$

Diese Relation kann man auf eine noch etwas einfachere Form bringen, indem man i mod. 3 betrachtet und demnach die eine Summe in 3 zerlegt:

*) Ann. XXIX, p. 112, Formel (6).

$$\psi(n) = -\sum_{i=0}^{n} \binom{i-1-in}{n}$$

$$= -\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{3}} \binom{3i-1-3in}{n} - \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{3}} \binom{3i-(3i+1)n}{n}$$

$$- \sum_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} \binom{3i+1-(3i+2)n}{n}.$$

Unter Anwendung der Recursionsformeln folgt weiter:

$$\psi(n) = -\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{3}} (-1)^i \binom{3i-1}{n} + \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{3}} (-1)^i \binom{3i+2n}{n}$$

$$+ \sum_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} (-1)^i \binom{3i+1+n}{n},$$

$$\psi(n) = -\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{3}} (-1)^i \binom{3i-1}{n} - \sum_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} (-1)^{i+\frac{n+2}{3}} \binom{3\left(i+\frac{n+2}{3}\right)-1}{n}$$

$$- \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{3}} (-1)^{i+\frac{2n+1}{3}} \binom{3\left(i+\frac{2n+1}{3}\right)-1}{n}.$$

In der zweiten und dritten Summe ändert man in leicht ersichtlicher Weise die Bedeutung des Summationsbuchstabens i. Dann ist

$$\psi(n) = -\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{3}} (-1)^i \binom{3i-1}{n} - \sum_{i=\frac{n+2}{3}}^{\frac{2n-2}{3}} (-1)^i \binom{3i-1}{3}$$

$$- \sum_{i=\frac{2n+1}{3}}^{n} (-1)^i \binom{3i-1}{n},$$

so dass endlich das Resultat entsteht:

$$\psi(n) = -\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{3i-1}{n},$$

das übrigens auch leicht die andere Form:

$$\psi(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{3i+1}{n}$$

annimmt.

Nach einem bekannten Satze der Zahlentheorie giebt es nur *ein* Paar *positiver* Zahlen μ, ν, welche die Darstellung der Primzahl n in der Form:

(A) $$n = 3\mu^2 + \nu^2$$

leisten. Somit ist:

$$\psi(n) = 2\left(\frac{\nu}{3}\right) \cdot \nu$$

und die Relationen nehmen die Form an:

$$(3) \quad 2\left(\frac{\nu}{3}\right)\nu = -\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{3i-1}{n} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{3i+1}{n}.$$

Indem ich mich hiernach bezüglich der Definition der Zahlen $\binom{\alpha}{\gamma}$ auf die elementare Darstellung derselben durch die Theilnenner der Kettenbrüche berufe, giebt uns Formel (3) eine Lösungsart der Gleichung (A) an.

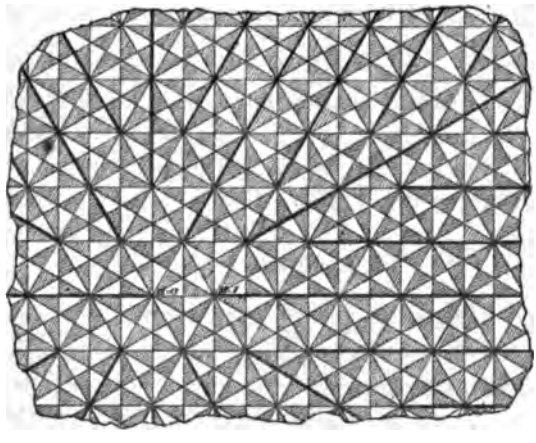
Zweiter Abschnitt.

Aufzählung aller ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechts $p = 1$.

§ 1.

Das Fundamentalpolygon der Gruppe von $u(\omega)$.

Für die Gestalt des Fundamentalpolygons einer Untergruppe hat man im Allgemeinen die Wahl unter einer grossen Reihe von Möglichkeiten; hier, wo es sich um eine Untergruppe vom Index ∞ handelt, sogar unter einer unendlich grossen Reihe. Um somit die Rückverlegung der u-Ebene in ein gestaltlich wohldefinirtes Fundamentalpolygon der Gruppe von $u(\omega)$ innerhalb der ω-Halbebene am einfachsten zu bewirken, müssen wir in möglichst zweckmässiger Weise die unendlich oft überdeckte u-Ebene durch ein Schnittsystem derart zerschneiden, dass wir ein einzelnes Blatt derselben isolirt erhalten. In nebenstehender Figur



ist ein solches Querschnittsystem angedeutet. Dasselbe besteht aus sechs congruenten Sextanten, abgesehen vielleicht von dem Schnitt von $u = 0$ bis $u = -1$. Ueberdies besteht jeder Ausschnitt aus zwei symmetrischen Hälften. So z. B. ist der zwischen den beiden von $u = 1 + \varepsilon$ und $u = 2 - \varepsilon$ ausgehenden Schnitten befindliche Ausschnitt symmetrisch bezüglich der reellen positiven u-Axe. Die übrigen diesem Ausschnitt angehörenden Querschnitte laufen dann der reellen u-Axe parallel und beginnen jeweilen bei einem Punkte $u = n + 1 + n\varepsilon$ oder $u = 2n + 1 - n\varepsilon$.

Wir schliessen daraus, dass das Fundamentalpolygon in der ω-Halbebene aus 12 abwechselnd symmetrischen und congruenten Streifen besteht und es bleibt uns nur noch übrig, die untere Begrenzung in einem derselben zu betrachten. Aber das obere Ufer des Schnittes von $u = 1$ bis $u = +\infty$ bildet sich offenbar auf ein System lückenlos auf einander folgender Halbkreise ab, deren n^{ter} sich mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ in demjenigen reellen rationalen Punkte der ω-Axe berührt, der dem n^{ten} Näherungswerthe des für die Irrationalität $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ geltenden Kettenbruchs

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \cdots$$

zukommt. Somit werden die Halbkreise, in ihren Dimensionen fortwährend abnehmend, sich gegen den *irrationalen Grenzpunkt* $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, den sie nicht erreichen, in's Unbegrenzte häufen. Das untere Ufer des eben betrachteten Querschnitts bildet sich auf ein bezüglich der imaginären ω-Axe symmetrisches Halbkreissystem ab, wobei dann als Grenzpunkt der Punkt $u = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ auftritt. Betrachten wir beide Reihen als *ein* System mit einander zusammenhängender Halbkreise, so dürfen wir unter den Berührungspunkten den Punkt $\omega = 0$ den *Culminationspunkt* nennen. An ihm liegen sechs Doppeldreiecke des Polygons, während bei den übrigen zum Culminationspunkt symmetrisch liegenden Berührungspunkten jedesmal nur drei Doppeldreiecke der Figur verzeichnet sind. Die letztern Punkte besitzen die beiden Grenzpunkte $\omega = \pm\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und übrigens decken sich die symmetrisch zum Culminationspunkte liegenden Halbkreise vermöge der Untergruppe. Wort für Wort dasselbe gilt für den von $u = 2 + \varepsilon$ ausgehenden Querschnitt. Das hierbei auftretende Halbkreissystem wird in der That aus dem ersten durch die Substitution:

$$V(\omega) = \frac{\omega + 2}{2\omega + 5}$$

erhalten. Culminationspunkt wird somit nun $\omega = \frac{2}{5}$, die Grenzpunkte, von denen das neue System von Halbkreisen eingeschlossen ist, werden

$$\omega = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \omega = \frac{51-\sqrt{5}}{118}.$$

Hieraus folgt, dass sich die beiden bislang betrachteten Halbkreissysteme insoweit an einander anschliessen, dass sie nur den einen Punkt $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, dem sie sich von rechts und links her unbegrenzt nähern, offen lassen. Wir wollen diesen Punkt einen *irrationalen Oeffnungspunkt* des Polygons nennen.

Durch Wiederholung der Substitution $V(\omega)$ folgt ein drittes Halbkreissystem, welches mit dem zweiten den irrationalen Oeffnungspunkt $\frac{51-\sqrt{5}}{118}$ umschliesst, und es ist leicht ersichtlich, dass die nämliche Betrachtung ohne Ende fortzusetzen ist. Hierbei aber zeigt sich, dass die einzelnen Halbkreissysteme, als Ganze betrachtet, selbst wieder in ihren Dimensionen fortwährend abnehmen und von links her gegen einen irrationalen Oeffnungspunkt hin verschwinden, der gegeben ist durch den Werth des periodischen Kettenbruches

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

d. i. gegen den Punkt

$$\omega = -1+\sqrt{2}.$$

Eben dieser ist dann auch der Grenzpunkt des anders gearteten Halbkreissystems, das von $\omega = \frac{1}{2}$ aus nach links sich wendet und das untere Ufer des von $u = 1+\varepsilon$ ausgehenden Querschnitts abbildet, so dass wir hiernach das Polygon zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{1}{2}$ im übertragenen Sinne als *geschlossen* betrachten dürfen.

Den einzelnen ganzzahligen Werthen

$$u = a + b\varepsilon$$

entsprechen hierbei im Allgemeinen *zwei* rationale Punkte ω, nur die Culminationspunkte entsprechen ihren Punkten u wechselweise eindeutig. Wählen wir von den fraglichen zwei Punkten, die $a+b\varepsilon$ entsprechen, nach Belieben jedesmal nur einen und benutzen übrigens für den Ausspruch des folgenden Satzes die von Hrn. Cantor eingeführte Terminologie, so kommt:

Bei den hier gewählten Voraussetzungen erscheint das System der ganzen Zahlen

$$a + b\varepsilon$$

vermöge der Function $u(\omega)$ eindeutig abgebildet auf eine abzählbare Mannigfaltigkeit P *der zweiten Ordnung von rationalen Punkten der reellen ω-Axe.*

Die erste Ableitung P′ ist gebildet von den irrationalen Oeffnungspunkten, so dass P′ kein Theiler von P ist. Die zweite Ableitung P″ besteht aus dem Punkte $-1+\sqrt{2}$ und den entsprechenden der übrigen Parallelstreifen des Polygons.

Die explicite Formel, welche dem Punkte $a+b\varepsilon$ die ihnen zukommenden Werthe von ω angiebt, führe ich hier ohne Einzelheiten ihrer Ableitung an:

$$u\left(k\pm\frac{1+\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}}{2+\frac{a_n}{b_n}+\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}}\right)=\varepsilon^k(n+\nu+1+\nu\varepsilon^{\pm 1}).$$

Dabei bedeutet:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{c_n+a_n\sqrt{5}}{2},\qquad b_n=\frac{3a_n+c_n}{2},$$
$$(3+2\sqrt{2})^\nu=\gamma_\nu+\beta_\nu\sqrt{2},\qquad \alpha_\nu=\gamma_\nu-\beta_\nu.$$

§ 2.

Aufzählung aller ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechts 1.

Nach den Erläuterungen der Einleitung reducirte sich das Problem der Aufzählung aller ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechts $p=1$ von ω-Substitutionen auf die Aufstellung der Gruppen gleicher Art gebildet aus linearen u-Transformationen. Um für die Lösung der letzten Aufgabe einen ersten Satz zu zeigen, bezeichne ich in üblicher Weise mit S^n die Substitution

$$S^n=\begin{pmatrix}1, & n\\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Ist dann $V(\omega)$ eine beliebige Substitution und

$$u(V(\omega))=\varepsilon^\nu u(\omega)+a+b\varepsilon,$$

so findet man für die durch S^{-n} transformirte Substitution:

$$u(S^n\cdot V\cdot S_{-n}(\omega))=\varepsilon^\nu u(\omega)+\varepsilon^n(a+b\varepsilon). \tag{1}$$

Ist nun V in irgend einer der fraglichen Untergruppen enthalten, so gilt dasselbe von der gleichberechtigten Substitution $S^n\cdot V\cdot S^{-n}$, also auch von dem Producte

$$V_1=S^nVS^{-n}V.$$

Aber es ist:

$$u(S^n\cdot V\cdot S^{-n}V(\omega))=\varepsilon^{2\nu}u(\omega)+(\varepsilon^n+\varepsilon^\nu)(a+b\varepsilon).$$

Wählt man somit

$$n \equiv \nu + 3, \pmod 6,$$

so folgt:

$$u(V_1 \cdot S^{4\nu}(\omega)) = u(\omega).$$

Dieses heisst aber $V_1 S^{4\nu}$ ist eine Substitution U_1 der Gruppe von u, die aber a priori der fraglichen ausgezeichneten Untergruppe angehört. Somit muss auch endlich

$$S^{4\nu} = V_1^{-1} \cdot U_1$$

dieser Untergruppe angehören, so dass folgt:

$$\nu \equiv 0, \pmod 3.$$

In analoger Weise gehört der ausgezeichneten Untergruppe mit V auch die Substitution

$$V_2 = V \cdot S^{2-\nu} V \cdot S^{\nu-2}$$

an, während:

$$u(V_2(\omega)) = \varepsilon^{2\nu} u(\omega) + (1 + \varepsilon^2)(a + b\varepsilon)$$

ist. Gleiches gilt für:

$$V_3 = V_2 \cdot S^{4-2\nu} \cdot V \cdot S^{2\nu-4},$$

während:

$$u(V_3(\omega)) = \varepsilon^{3\nu} u(\omega).$$

Somit ist wieder:

$$V_3 \cdot S^{3\nu} = U_2$$

eine der Gruppe angehörige Substitution, so dass infolge

$$S^{3\nu} = V_3^{-1} \cdot U_2,$$
$$\nu \equiv 0, \pmod 2$$

sein muss. Dieses heisst in andern Worten:

Jede ausgezeichnete Gruppe Γ *des Geschlechts* $p = 1$ *von* ω*-Substitutionen ist eine Untergruppe der Congruenzgruppe**) *sechster Stufe* Γ_6 *definirt durch:*

$$\alpha\beta + 3\beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0, \pmod 6.$$

Bilden nun:

$$u' = u + a_i + b_i\varepsilon, \quad (i = 1, 2 \cdots \infty)$$

die Substitutionen einer der fraglichen Untergruppen, so haben die Zahlen $a_i + b_i\varepsilon$ offenbar die Eigenschaft, sich durch Addition und Subtraction zu reproduciren. Aber die Untergruppe ist ausgezeichnet; somit findet sich neben der eben geschriebenen Substitution auch die andere:

$$u' = u + \varepsilon(a_i + b_i\varepsilon).$$

Daraus folgert man für das System der ganzen Zahlen $a_i + b_i\varepsilon$ leicht, die andere Eigenschaft, dass das Product einer beliebigen Zahl $m + n\varepsilon$

*) Vergl. meine anfangs cit. Arbeit § 2.

mit einer Zahl des Systems diesem wieder angehört. Das vorliegende System von Zahlen bildet also im Sinne von Herrn Dedekind ein Ideal*). Da aber im Zahlkörper der aus dritten Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen die gewöhnlichen Gesetze der Division noch erhalten bleiben, so sind alle Ideale Hauptideale und somit folgt der Satz:

Alle Substitutionen

$$V(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix},$$

die den Bedingungen:

$$\alpha\beta + 3\beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0, \pmod 6,$$
$$\begin{pmatrix} \gamma - \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \varepsilon \equiv 0, \pmod{a + b\varepsilon}$$

genügen, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe des Geschlechts $p = 1$. Wir erhalten alle Untergruppen dieser Art, wenn wir die ganze complexe Zahl $a + b\varepsilon$ alle Zahlen ihres Körpers durchlaufen lassen.

Bezeichnet man mit $N(a + b\varepsilon)$ die Norm der complexen Zahl $a + b\varepsilon$

$$N(a + b\varepsilon) = a^2 + ab + b^2,$$

so folgert man leicht aus bekannten Sätzen der Zahlentheorie:

Der Index, welcher der vermittelst der Zahl $a + b\varepsilon$ definirten ausgezeichneten Untergruppe in Beziehung auf die Gesammtheit der linearen Substitutionen zukommt, ist $6N(a + b\varepsilon)$.

In diesem Sinne bezeichne ich diese Gruppe mit $\Gamma_{6N(a+b\varepsilon)}$. Einige von den Gruppen Γ sind Congruenzgruppen der 6ten Stufe. In der That folgert man aus I, § 5 leicht die Identität der Gruppen $\Gamma_{6\cdot N(1)}$, $\Gamma_{6\cdot N(1+\varepsilon)}$, $\Gamma_{6\cdot N(2)}$, $\Gamma_{6\cdot N(2+2\varepsilon)}$ resp. mit den Congruenzgruppen 6ter Stufe, die ich l. c. § 2 $\Gamma_6, \Gamma_{18}, \Gamma_{24}, \Gamma_{72}$ nannte.

Congruenzgruppen einer andern als der 6ten Stufe können sich unter den Γ nicht finden. Denn gehörte eine derselben der q^{ten} Stufe an, so wäre auch die Gruppe von u Γ_∞, die ja in allen Γ enthalten ist, Untergruppe einer Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe. Dieses aber gilt, wie wir nun noch zu zeigen haben, nur für $q = 6$.

In der That sind q_1 und q_2 zwei relative Primzahlen und ist eine Untergruppe gegeben, die sich sowohl mod. q_1 wie mod. q_2 auf die Gesammtheit reducirt d. h. die nicht Congruenzgruppe der Stufe q_1 oder q_2 ist, so ist sie auch nicht Congruenzgruppe der Stufe $q_1 \cdot q_2$. Durch Umkehrung dieses Princips finden wir, dass, wenn die Gruppe von u Γ_∞ überhaupt Congruenzgruppe ist, sie nothwendig Untergruppe einer Gruppe der Stufe p^r sein muss, unter p eine Primzahl verstanden. Sei nun zuvörderst $p > 3$, so denken wir uns ein System mod. p^r in-

*) Cf. Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie § 168.

congruenter Substitutionen gebildet und erinnern uns übrigens an die Resultate von I, § 6. Daraus folgt, dass jedesmal von den p^r Substitutionen des gedachten Systems, die bezüglich des ersten und dritten Coefficienten, mod. p^r betrachtet, übereinstimmen, wenigstens eine der hypothetischen Congruenzgruppe $p^{r\,\text{ter}}$ Stufe angehören müsste. Für ein beliebiges Paar α, γ sei diese eine der Gruppe von u und also der Congruenzgruppe $p^{r\,\text{ter}}$ Stufe angehörende Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$; dann gehören eben dieser Gruppe zufolge der Eigenschaften von u auch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\alpha, & 6n\alpha+\beta\\ \gamma, & 6n\gamma+\delta\end{pmatrix}, \qquad n=0,1,2\cdots(p^r-1)$$

an. Reducirt man nun diese p^r Substitutionen mod. p^r, so erhält man gerade die sämmtlichen p^r Substitutionen des Systems der incongruenten Substitutionen, die bezüglich des ersten und dritten Coefficienten α und γ mod. p^r übereinstimmten. Ist somit eine von ihnen in der fraglichen Congruenzgruppe enthalten, so finden sich darin alle:

In der Γ_∞ finden sich Substitutionen von jedem Typus (mod. p^r).

Eine ganz analoge Betrachtung führt für $p=2$ oder 3 zu dem Satz:

Die Γ_∞ führt, mod. p^r reducirt, auf das System der Substitutionen, die der Bedingung

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \qquad (\text{mod. } p)$$

genügen.

Geht man endlich von hier aus wieder zu zusammengesetzten Moduln, so folgt der Schluss:

Die Substitutionen der Γ_∞ genügen nur der einen Congruenz:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } 6),$$

wodurch alle obigen Behauptungen bestätigt werden.

§ 3.

Die Gestalt der Fundamentalpolygone.

Das Fundamentalpolygon irgend einer ausgezeichneten Untergruppe Γ kann man jedesmal aus sechs mit einander congruenten Streifen aufbauen. Aber es ist im Allgemeinen nicht möglich, den einzelnen dieser Streifen aus zwei symmetrisch liegenden Elementarstreifen zusammenzusetzen. Es soll sich zum Schluss noch darum handeln, diejenigen Fälle aufzuzählen, in welchen dieses dennoch eintritt.

Zu dem Ende vergleiche man die beiden vermittelst der conjugirt complexen Zahlen $a+b\varepsilon$ und $a+b\varepsilon^5=a+b-b\varepsilon$ definirten Γ.

Die Polygone dieser beiden Gruppen in der u-Ebene kann man offenbar so fixiren, dass sie symmetrisch bezüglich der reellen u-Axe sind. Demnach werden sie in der ω-Halbebene symmetrisch zur imaginären ω-Axe sein. Genügt somit das einzelne Polygon der anfangs genannten Symmetriebedingung der Elementarstreifen, so sind die Polygone der beiden Γ und also auch diese selbst identisch. Dieses aber heisst: Die beiden ganzen Zahlen $(a+b)-b\varepsilon$ und $a+b\varepsilon$ sind associirt. Hierdurch gewinnen wir sofort für $a+b\varepsilon$ die Einschränkung auf die folgenden sechs Möglichkeiten a, $a(2-\varepsilon)$, $a(1-\varepsilon)$, $a(1-2\varepsilon)$, $a\varepsilon$, $a(1+\varepsilon)$. Hiervon sind associirte Zahlen die erste, dritte und fünfte und ebenso die zweite, vierte und sechste. Da associirte Zahlen auf dieselben Untergruppen führen, so haben wir das Schlussresultat:

Der geforderten Symmetriebedingung) entsprechen nur die Polygone der* $\Gamma_{6\cdot N(a)} = \Gamma_{6a^2}$ *und der* $\Gamma_{6N(a+a\varepsilon)} = \Gamma_{18a^2}$.

Dritter Abschnitt**).

Specielle Untersuchung der $\Gamma_{6N(3)}$.

§ 1.

Zerlegung der G_{54}.

Wenn man die Substitutionen der $\Gamma_{6N(3)}$ mit der Identität äquivalent setzt, reducirt sich die Gesammtheit auf eine endliche G_{54}, die wir darstellen können durch die 54 linearen Transformationen von u:

$$u' = \varepsilon^\nu u + a + b\varepsilon, \quad \nu = 0, 1 \cdots 5, \quad a, b = 0, 1, 2.$$

Um die Zerlegung dieser G_{54} in ihre Untergruppen kurz angeben zu können, schreibe ich einfacher

$$a + b\varepsilon = (a, b),$$

wobei dann a und b nur mod. 3 zu betrachten sind. Zugleich nenne ich zwei verschiedene Substitutionen dann von gleichem Typus, wenn sie bezüglich der Zahl ν übereinstimmen.

Die *neun* Substitutionen

$$u' = \varepsilon u + (a, b)$$

sind die Erzeugenden von *neun gleichberechtigten Cyklen* G_6:

---

*) Das zum Primtheiler der Zahl 7, $1+2\varepsilon$ gehörende, *unsymmetrische* Polygon giebt Herr Dyck in den gruppentheoretischen Studien (Ann. XX) an.

**) Ueber Anlage dieses Abschnitts und Bezeichnungsweise vergl. man meine mehrfach gen. Arbeit im 29. Annalenbde.

$$u' = \varepsilon u + (a, b), \quad = \varepsilon^2 u + (a+2b, a+2b), \quad = \varepsilon^3 u + (b, 2a+2b),$$
$$= \varepsilon^4 u + (2a+b, 2a+b), \quad = \varepsilon^5 u + (2a+2b, a), \quad = u.$$

Innerhalb dieser G_6 finden sich *drei* gleichberechtigte G_3 und *neun* gleichberechtigte G_2.

Diese Gruppen sind sämmtlich vom Geschlechte $p = 0$; sie bedeuten die Drehungen des Polygons um die neun bei $J = \infty$ gelegenen Punkte, die G_2 zugleich die Drehungen um die 27 Punkte, in denen $J = 1$ wird.

Auch die sechs gleichberechtigten Drehungen G_3' um die 18 Punkte mit $J = 0$:

$$u' = \varepsilon^2 u + (a, b), \quad = \varepsilon^4 u + (2b, a+b), \quad = u; \quad a \gtrless b, \pmod 3$$

gehören dem Geschlechte $p = 0$ an.

Dagegen haben $p = 1$ die drei gleichberechtigten Cyklen G_3'':

$$u' = u + (a, b), \quad = u + (2a, 2b), \quad = u; \quad a \gtrless b, \pmod 3$$

und die ausgezeichnete cyklische G_3''':

$$u' = u + (a, b), \quad = u + (2a, 2b), \quad = u; \quad a \equiv b, \pmod 3,$$

welche letztere die in der G_{54} enthaltenen Substitutionen der $\Gamma_{6N(1+\vartheta)}$ zusammenfasst. Ausserdem sind noch folgende nichtcyklische Untergruppen in der G_{54} enthalten:

A. Gruppen mit Substitutionen aller Typen.

Drei gleichberechtigte G_{18}, z. B.

$$u' = \varepsilon^\nu u + (a, b), \quad a \equiv b, \pmod 3.$$

B. Gruppen aus Substitutionen der Typen mit geradem ν.

1. *Eine ausgezeichnete* G_{27}, die Gesammtheit dieser Substitutionen umfassend.

2. *Eine ausgezeichnete* G_9:

$$u' = \varepsilon^{2\nu} u + (a, b), \quad a \equiv b, \pmod 3.$$

3. *Zwei gleichberechtigte* G_9, z. B.

$$u' = \varepsilon^2 u + (a, b), \quad = \varepsilon^4 u + (2b, a+b), \quad a - b \equiv 1, \pmod 3$$

im Verein mit der G_3'''.

C. Gruppen mit Substitutionen der Typen mit durch 3 theilbarem ν.

1. *Eine ausgezeichnete* G_{18}, die Gesammtheit dieser Substitutionen umfassend.

2. *Drei gleichberechtigte* G_6, z. B.

$$u' = \varepsilon^{3\nu} u + (a, b), \quad a \equiv b, \pmod 3.$$

3. *Neun gleichberechtigte* G_6, z. B.

$$u' = \varepsilon^{3\nu} u + (a, b), \quad b \equiv 0, \pmod 3.$$

D. *Ausgezeichnete* G_9 mit den Substitutionen vom Typus

$$u' = u + (a, b).$$

Andere Untergruppen existiren nicht.

§ 2.

Die Hauptmoduln der cyklischen Gruppen G_6, G_2, G_3.

Den neun gleichberechtigten G_6 haben wir *neun* mit einander *gleichberechtigte Hauptmoduln* $\tau_i(\omega)$ $(i = 0, 1 \cdots 8)$ an die Seite zu stellen, wobei wir insbesondere mit τ_0 oder kurz τ den zu der Gruppe $\omega' = \omega + \nu$ gehörenden Modul bezeichnen wollen. Des Näheren wollen wir $\tau(\omega)$ bestimmen durch die Festsetzung:

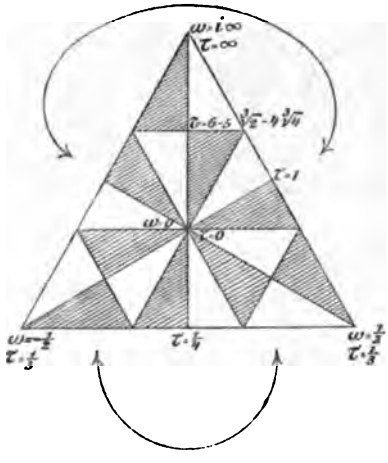
$$\tau(0) = 0, \quad \tau\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{3}, \quad \tau(i\infty) = \infty.$$

Dann findet man durch functionentheoretische Betrachtungen, deren Einzelheiten ich hier übergehen darf, weiter die in nebenstehender Figur angegebene Werthevertheilung. Bezeichnen

$$\omega' = V_i(\omega), \quad (i = 0, 1 \cdots 8)$$

die neun Substitutionen der unter D genannten G_9, wobei dann V_0 die Identität sein soll, so dürfen wir für die gleichberechtigten Functionen τ die Darstellung annehmen:

$$\tau_i(\omega) = \tau\big(V_i(\omega)\big).$$



Alle neun τ_i sind in ihrer algebraischen Abhängigkeit von der absoluten Invariante gemeinsam dargestellt durch:

$$(1) \quad J:J-1:1 = 4(\tau^3 - 9\tau^2 + 6\tau - 1)^3 : (4\tau - 1)(\tau^4 + 17\tau^3 - 30\tau^2 + 14\tau - 2)^2 : -27\tau^6(3\tau - 1)^2.$$

Den Fortgang zu den Hauptmoduln $y_i(\omega)$, resp. $x_i(\omega)$ der Gruppen G_3, G_2 bilden wir durch die Wurzelziehungen:

$$y_i = \sqrt{1 - 4\tau_i}, \quad x_i = \sqrt[3]{1 - 3\tau_i},$$

wobei wir dann die beiden Moduln x_0, y_0 oder kurz x, y als *Galois'sches System* vorliegender Untergruppe mit der Relation vom Geschlechte $p = 1$:

$$(2) \quad 3y^2 = 4x^3 - 1$$

auswählen wollen.

Dann werden *die übrigen $x_i y_i$ rationale Functionen auf der $C_3(2)$* und zwar hier sogar *lineare* Functionen. Zwischenbetrachtungen, die ich hier wieder übergehe, zeigen folgende Form derselben:

$$(3)\quad \begin{aligned} y_i &= \frac{y+\varepsilon^{2i}-\varepsilon^{4i}}{y(\varepsilon^{4i}-\varepsilon^{2i})+1}, \quad y_{i+3} = \frac{1+y+2\varepsilon^{2i}x}{1+y-2\varepsilon^{2i}x}, \quad y_{i+6} = \frac{1-y+2\varepsilon^{2i}x}{1-y-2\varepsilon^{2i}x}, \\ x_i &= \frac{-2x}{\varepsilon^{2i}-(1-\varepsilon^{4i})y}, \quad x_{i+3} = \frac{y-1}{y+1-2\varepsilon^{2i}x}, \quad x_{i+6} = \frac{y+1}{y-1+2\varepsilon^{2i}x}. \end{aligned}$$

$$(i = 0, 1, 2).$$

Hierbei muss jedoch in der Formel für x_0 der Factor -2 rechter Hand unterdrückt werden. In der ersten Reihe sind y_0, y_1, y_2 jedesmal lineare Functionen von einer unter ihnen und gleiches gilt von den beiden folgenden Tripeln y_3, y_4, y_5 etc. Dieser Umstand erklärt sich gruppentheoretisch dadurch, dass in den neun G_6 sich nur drei verschiedene G_3 finden.

§ 3.

Transformation des Coordinatensystems.

Das Galois'sche System (x, y) ist deshalb hier vorangestellt, weil es sich auch im allgemeinen Falle der Γ_{6N} in ganz ähnlicher Weise ansetzen lässt. Daneben haben wir hier ein specielles System, das nicht minder wichtig ist. Wir setzen

$$(1)\quad z_1 = \frac{1-y}{2x}, \quad z_2 = \frac{1+y}{2x}.$$

Dann zeigen die Umkehrungen:

$$x = \frac{1}{z_1+z_2}, \quad y = \frac{z_2-z_1}{z_2+z_1},$$

dass z_1 und z_2 ebenfalls ein Galois'sches System bilden. Dabei geht die C_3, wie man aus (1) sofort berechnet, in die Form:

$$(2)\quad z_1^3 + z_2^3 = 1$$

über, so dass durch (1) der Uebergang vom *kanonischen* zum *singulären* Coordinatensystem*) bewerkstelligt ist. Hierbei hat z_i noch eine ganz besonders einfache Bedeutung. In der That berechnet man aus dem vorhergehenden Paragraphen:

$$y(\omega+1) = -y(\omega), \quad x(\omega+1) = \varepsilon^4 \cdot x(\omega),$$

sodass:

$$(A)\quad z_1^3(\omega+1) = z_2^3(\omega) = 1 - z_1^3(\omega)$$

ist. Weiter sind in der Tabelle (3) § 2 auch die Formeln:

*) Cf. Klein, „Ueber die elliptischen Normalcurven der n^{ten} Ordnung etc.", Abhandlungen der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XIII, Nr. 4.

$$y\left(\begin{smallmatrix}-1\\ \omega\end{smallmatrix}\right) = \frac{2x+y+1}{-2x+y+1}, \quad x\left(\begin{smallmatrix}-1\\ \omega\end{smallmatrix}\right) = \frac{y-1}{-2x+y+1},$$

enthalten, die hier zur Folge haben:

$$z_1\left(\begin{smallmatrix}-1\\ \omega\end{smallmatrix}\right) = \frac{1-\frac{2x+y+1}{-2x+y+1}}{\frac{2y-2}{-2x+y+1}} = \frac{2x}{1-y},$$

oder:

$$z_1^3\left(\begin{smallmatrix}-1\\ \omega\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{z_1^3(\omega)}. \tag{B}$$

Durch (A) und (B) charakterisirt sich z_1^3 als *Hauptmodul zweiter Stufe* $\lambda(\omega)$, so dass das Resultat entsteht:

$$z_1 = \sqrt[3]{\lambda}, \quad z_2 = \sqrt[3]{1-\lambda}. \tag{3}$$

Die Γ_{54} *ist die Gruppe von* $\sqrt[3]{\lambda}$, $\sqrt[3]{1-\lambda}$.

Eine Reihe von Relationen zwischen Grössen x_i, die sich ihrer Einfachheit wegen bemerkenswerth machen, führe ich hier an, weil die Function $\lambda(\omega)$ mit in dieselben eingeht:

$$x_{3n} \cdot x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} = 1, \quad \frac{1}{x_{3n}^3} + \frac{1}{x_{3n+1}^3} + \frac{1}{x_{3n+2}^3} = 1, \quad (n = 0, 1, 2),$$

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} \frac{1}{x_i^\alpha} = (1-\lambda)^{\frac{\alpha}{3}}, \qquad \frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5} \frac{1}{x_i^\alpha} = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{3}},$$

$$\frac{1}{3}\sum_{i=6}^{8} \frac{1}{x_i^\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{\frac{\alpha}{3}}, \quad (\alpha = 1, 2).$$

§ 4.

Construction der Punktgruppen mit $J = 1$ und $J = \infty$ auf der C_3.

Gebrauchen wir x_i, y_i wieder in der Bedeutung des § 2 und setzen in:

$$x' = \varepsilon^{2\nu} \cdot x_i, \quad y' = \varepsilon^{3\mu} \cdot y_i$$

rechts die linearen Ausdrücke in x, y ein, so wird hierdurch die C_3 in

$$3y'^2 = 4x'^3 - 1,$$

d. h. in sich selbst transformirt. Lassen wir μ, ν, i unabhängig von einander Reste resp. mod. 2, 3, 9 durchlaufen, so erhalten wir im Ganzen 54 derartige *Collineationen* der C_3 in sich, dem bekannten Satze entsprechend, dass bei verschwindender Invariante g_2 die Anzahl der Collineationen der Normalcurve C_3 in sich in der That 54 ist.

Bei der geometrischen Interpretation dieser Collineationen, bei der übrigens die transcendente Theorie entbehrt werden kann, haben wir zu beachten, dass *gleichberechtigte Collineationen*, entsprechend den

gleichberechtigten ω-Substitutionen, geometrisch denselben Charakter haben, eine Folge des Umstandes, dass nur Collineationen auftreten. Ich betrachte somit als Beispiele für die G_6 und G_2 resp. die Erzeugenden S und T.

Die Wirkung von S auf die homogen geschriebene C_3:

$$4x_1^3 - 3x_2^2x_3 - x_3^3 = 0$$

ist angezeigt durch:

$$\varrho x_1' = \varepsilon^4 x_1, \quad \varrho x_2' = -x_2, \quad \varrho x_3' = x_3.$$

Die drei festbleibenden Punkte dieser Collineation sind die drei Ecken des Coordinatendreiecks, von denen aber nur die eine, in welcher x_1 und x_3 verschwindet, auf der C_3 gelegen ist. Achten wir somit im Speciellen auf die Verschiebung der Punkte dieser Curve, so erhalten wir den Satz:

Bei der Erzeugenden einer einzelnen der neun gleichberechtigten G_6 bleibt jedesmal nur ein Punkt der C_3 erhalten. Diese neun festbleibenden Punkte bilden das System der Wendepunkte und entsprechen zugleich den neun Punkten mit $J = \infty$.

Die Substitution T war in nichthomogener Form:

$$x' = \frac{y-1}{-2x+y+1}, \quad y' = \frac{2x+y+1}{-2x+y+1}.$$

Die festbleibenden Elemente dieser Collineation erhält man durch die Substitution $x' = x$, $y' = y$ aus den Gleichungen:

$$(x-1)(2x-y+1) = 0, \quad (y+1)(2x-y+1) = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass ausser dem Punkte $x = 1$, $y = -1$ die gerade Linie

$$2x - y + 1 = 0$$

und zwar Punkt für Punkt bei der fraglichen Collineation erhalten bleibt. Die beiden *collinearen Systeme* befinden sich in *perspectivischer Lage;* das Centrum der Collineation ist $x = 1$, $y = -1$, die Axe die soeben gekennzeichnete Gerade. Man beachte weiter, dass die Substitution T der Periode zwei angehört, so dass zwei Punkte sich wechselseitig entsprechen. Die beiden Fluchtlinien fallen übereinander und je zwei zugeordnete Punkte liegen derart mit dem Collineationscentrum auf einer Geraden, dass sie harmonisch getrennt sind durch eben dieses Centrum und den Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit der Axe.

Indem wir nun wieder zur C_3 zurückkehren, bemerken wir, dass das fragliche Centrum ein Wendepunkt, die Axe die ihm zugehörige harmonische Gerade ist. Hieraus folgt auch noch rein geometrisch, dass die C_3 in der That durch die fragliche Operation in sich selbst übergeht und dass je zwei Punkte derselben einander zugeordnet sind, die mit dem Wendepunkt auf einer geraden Linie liegen.

Die festbleibenden Punkte der C_3 sind ausser diesem Wendepunkt noch die drei Berührungspunkte der von ihm aus möglichen Tangenten d. h. die drei Schnittpunkte mit der zugehörigen harmonischen Geraden.

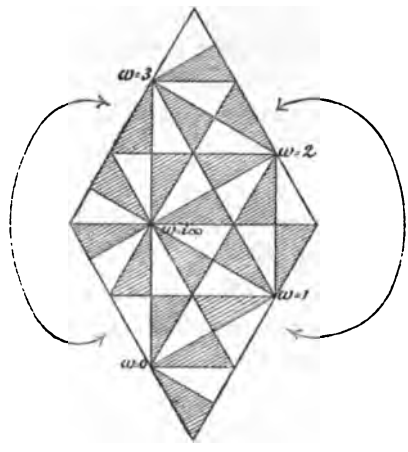
Durch die erlaubte Verallgemeinerung folgt dieses Resultat:

Die $4 \cdot 9$ bei den neun G_2 festbleibenden Punkte sind erstens wieder die neun Wendepunkte, zweitens die 27 Schnittpunkte mit den neun harmonischen Geraden, welche bekanntlich die sextactischen Punkte der C_3 sind. In den letzten 27 Punkten wird $J = 1$.

§ 5.

Die Hauptmoduln der G_3'. Die Punkte mit verschwindendem J.

Unter den cyklischen Untergruppen waren auch noch die G_3' vom Geschlechte $p = 0$, so dass wir ihnen entsprechend noch sechs gleichberechtigte Hauptmoduln $\sigma(\omega)$ zu notiren haben. Ein Beispiel ist der zu nebenstehendem Polygon gehörige Modul $\sigma(\omega)$, der vollständig festgelegt ist durch die Bestimmung:



$$\sigma(i\infty) = 1, \quad \sigma(0) = \sigma(3) = 0, \quad \sigma(1) = \sigma(2) = \infty. \tag{1}$$

Die Function $\sigma(\omega)$ ist auf dem Polygon der Γ_{54} dreiwerthig, lässt sich aber dennoch nicht als lineare Function auf der C_3 darstellen. Um demnach den rationalen Ausdruck von σ durch x und y in Erfahrung zu bringen, verfahre man, wie folgt.

Die Functionen $x(\omega)$ und $\sigma(\omega)$ bilden ein volles Modulsystem der Γ_{54} und gehen in Folge dessen eine algebraische Relation mit einander ein, von der man von vornherein auch noch aussagen kann, dass sie für σ vom zweiten, für x vom dritten Grade ist. Die Heranziehung der Werthevertheilung (1) und der Verzweigung der bezüglichen Flächen giebt als explicite Form dieser Relation:

$$\sigma^2 x(x^2 + x + 1) - \sigma(2x^3 - 2x^2 + x - 1) + x(x-1)^2 = 0. \tag{2}$$

Die Auflösung dieser für σ quadratischen Gleichung muss unter Heranziehung der Grösse y rational geschehen können. In der That ist:

$$\sigma - \frac{(2x^2+1)(x-1)}{2x(x^2+x+1)} = \pm i \sqrt{\frac{(4x^3-1)(x-1)^2}{4x^2(x^2+x+1)^2}},$$

d. h. nach leichter Bestimmung des fraglichen Vorzeichens:

$$\sigma(\omega) = \frac{(x-1)(2x^2 - i\sqrt{3}y + 1)}{2x(x^2+x+1)}.$$

Aber auch diese Form lässt noch eine Vereinfachung zu und führt endlich für σ auf die *rationale Function zweiten Grades*, definirt durch:

$$(3) \qquad (2\varepsilon^2 x + 2\varepsilon^4 y + y + 1)(2\varepsilon^4 x + 2\varepsilon^4 y + y + 1) + \sigma(2x + 2\varepsilon^2 y + y + 1)(2x + 2\varepsilon^4 y + y + 1) = 0.$$

Die allgemeinere Auffassung dieser Gleichung, welche uns σ als *Parameter eines Kegelschnittbüschels* in der Ebene x, y erkennen lässt, giebt uns durch geometrische Interpretation des erhaltenen Resultates ein Mittel, dasselbe gleichmässig auch auf die übrigen mit σ gleichberechtigten Moduln auszudehnen.

Die vier in (3) auftretenden linearen Factoren sind nämlich *Wendepunktslinien*, die folgende eigenartige Lage zu einander darbieten. Durch den den *beiden ersten Linien gemeinsamen Wendepunkt* der C_3:

$$(A) \qquad x = 0, \quad y = -\frac{1 + 2\varepsilon^2}{3}$$

geht auch die vierte Linie:

$$2x + 2\varepsilon^4 y + y + 1 = 0$$

hindurch. Die dritte Linie

$$2x + 2\varepsilon^2 y + y + 1 = 0$$

verbindet zwei von (A) *verschiedene resp. auf der ersten und zweiten Wendepunktslinie liegende Wendepunkte*, schneidet aber die vierte Linie in einem Punkte, der *nicht* zugleich der C_3 angehört. Das Kegelschnittbüschel ist geometrisch definirt durch drei Punkte (Schnittpunkte der ersten und zweiten, der ersten und dritten, der zweiten und dritten Linie) und die Tangente im ersten:

$$2x + 2\varepsilon^4 y + y + 1 = 0.$$

Zugleich sieht man, dass das Kegelschnittbüschel mit der C_3 nur noch drei bewegliche Punkte gemein hat, wie es ja sein muss.

Wenn wir nun durch lineare Transformation der Gleichung (3) zu den gleichberechtigten Moduln übergehen, so müssen wir vorab bedenken, dass bei den 54 Collineationen der C_3 in sich das *einzelne Wendepunktsdreieck als solches erhalten* bleibt. Dieser Umstand ist deshalb von Wichtigkeit, weil gerade *eines* der vier Wendepunktsdreiecke sich mit keiner einzigen seiner drei Seiten an dem Aufbau der Gleichung (3) betheiligt. Dieses ist das Dreieck der drei Wendepunktslinien:

$$(B) \qquad x = 0, \quad y - 1 = 0, \quad y + 1 = 0,$$

welches oben das Dreieck des singulären Coordinatensystems war.

Nach diesen Vorbemerkungen wird man im Stande sein, die nachfolgende Verallgemeinerung des obigen Resultats sofort zu überblicken:

Um die sechs gleichberechtigten Functionen σ gleichmässig darzustellen, gehen wir von einem einzelnen der 9 Wendepunkte aus. Von den vier von ihm ausgehenden Wendepunktslinien gehört eine dem Dreieck (B) an. Diese schalte man aus und nenne die drei übrigen abgekürzt:

$$a_x = 0, \quad b_x = 0, \quad c_x = 0.$$

Auf jeder dieser Linien befinden sich ausser dem gemeinsamen Wendepunkte noch je zwei andere:

$$p_a, p_a'; \quad p_b, p_b'; \quad p_c, p_c'.$$

Man betrachte nun gesondert das Paar der Linien $a_x = 0$, $b_x = 0$. Von den vier Verbindungslinien der Punkte resp.

$$(p_a, p_b), \quad (p_a, p_b'), \quad (p_a', p_b), \quad (p_a', p_b'),$$

die dem ausgewählten Paar entsprechen, schneiden zwei die dritte Linie $c_x = 0$ resp. in den beiden Punkten p_c, p_c'; die beiden übrigen schneiden $c_x = 0$ in Punkten, die *nicht* auf der C_3 liegen. Diese beiden letzten Linien nenne ich:

$$c_x' = 0, \quad c_x'' = 0,$$

und definire die Linien $a_x' = 0$, $a_x'' = 0$, $b_x' = 0$, $b_x'' = 0$ in durchaus analoger Weise. Dann ergiebt sich endlich das Resultat, bei dem ich die sechs σ durch doppelten untern Index unterscheide:

$$(4) \qquad a_x \cdot b_x + \sigma_{0,i} c_x \cdot c_x^{(i)} = 0, \quad a_x \cdot c_x + \sigma_{1,i} b_x \cdot b_x^{(i)} = 0,$$
$$b_x \cdot c_x + \sigma_{2,i} a_x a_x^{(i)} = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Um ein ausführliches Beispiel anzuführen, so sind die vier von dem $\omega = i\infty$ entsprechenden Wendepunkte ausgehenden Wendepunktslinien

$$x = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x - \varepsilon^2 = 0, \quad x - \varepsilon^4 = 0,$$

von denen die erste auszuschliessen ist. Wir können die sechs $\sigma_{k,i}$ dann durch folgende Gleichung, die nur scheinbar dem dritten Grade angehört, gemeinsam darstellen:

$$(5) \qquad -\sigma_{k,i} = \frac{x^3 - 1}{(x - \varepsilon^{2k})^2 (2\varepsilon^{4k} x + 2\varepsilon^{2k} y + y + 1)},$$
$$(k = 0, 1, 2; \quad i = 1, 2).$$

Die übrigen acht Wendepunkte führen in durchaus gleicher Behandlungsweise entweder zu den $\sigma_{k,i}$ direct zurück oder zu den linearen Functionen:

$$\frac{1}{1 - \sigma_{k,i}}, \qquad \frac{\sigma_{k,i} - 1}{\sigma_{k,i}}.$$

Für die Lage der 18 Punkte mit $J = 0$ folgt endlich noch dieses Resultat:

In dem einzelnen der sechs Kegelschnittbüschel (3) *finden sich stets drei Kegelschnitte, welche die C_3 osculiren. Die* 18 *so entstehenden Osculationspunkte bilden die Gruppe der Punkte mit verschwindender Invariante J.*

Vierter Abschnitt.

Genaue Untersuchung der $\Gamma_{6N(4)}$.

§ 1.

Zerlegung der Gruppe G_{96}.

Betrachten wir nun die Zahlen a, b der Substitution

$$u' = \varepsilon^{\nu} u + (a, b)$$

mod. 4, so reducirt sich die gesammte lineare Gruppe auf eine endliche G_{96}, die zuvörderst aus den folgenden *cyklischen* Untergruppen besteht.

Alle Substitutionen vom Typus

$$u' = \varepsilon u + (a, b)$$

sind mit einander gleichberechtigt und erzeugen 16 *gleichberechtigte Cyklen* G_6:

$$u' = \varepsilon u + (a, b),\ = \varepsilon^2 u + (a-b, a+2b),\ = \varepsilon^3 u + (-2b, 2a+2b),$$
$$= \varepsilon^4 u + (-a-2b, 2a+b),\ = \varepsilon^5 u + (-a-b, a),\ = u;\ (a, b = 0, 1, 2, 3).$$

Bei den Erzeugenden dieser G_6 bleibt jedesmal *ein* Punkt mit $J = \infty$ des zugehörigen Fundamentalpolygons an seiner Stelle. Die sechszehn G_6 enthalten überdies alle Substitutionen vom Typus

$$u' = \varepsilon^{2\nu} u + (a, b),$$

die *sechszehn gleichberechtigte* G_3 bilden. Bei den letztern Gruppen bleiben abgesehen von dem einen Punkte bei $J = \infty$ noch je *zwei* bei $J = 0$ gelegene Punkte an ihrer Stelle. Substitutionen vom Typus:

$$u' = \varepsilon^3 u + (a, b)$$

zeigen sich nur *vier* verschiedene in den G_6. Diese geben Veranlassung zu *vier gleichberechtigten* G_2, bei deren einzelner dann immer *vier* bei $J = \infty$ gelegene Punkte fest bleiben. Uebrigens sind diese sämmtlichen Untergruppen dem Geschlechte $p = 0$ zugehörig.

Dasselbe gilt von *zwölf gleichberechtigten* G_2:

$$u' = -u + (a, b),$$

bei denen wenigstens eine der Zahlen a, b ungerade ist. Diese G_2 drehen das Polygon um die 48 bei $J = 1$ gelegenen Punkte.

Dem Geschlechte $p = 1$ gehören die nachfolgenden drei Arten von Cyklen an.

Drei gleichberechtigte G_4 erzeugt aus:

$$u' = u + (1, 0), \quad = u + (0, 1), \quad = u + (1, 3).$$

Drei gleichberechtigte G_4 erzeugt aus:

$$u' = u + (1, 1), \quad = u + (1, 2), \quad = u + (2, 1)$$

und endlich in beiden Arten von Gruppen zugleich enthalten:

Drei gleichberechtigte G_2:

$$u' = u + (2a, 2b).$$

Weiter folgt eine grössere Reihe nichtcyklischer Untergruppen und zwar

A) Gruppen, in welchen sich Substitutionen aller sechs Typen finden:

Vier gleichberechtigte G_{24} z. B.

$$u' = \varepsilon^\nu u + (a, b), \qquad a \equiv b \equiv 0, \pmod 2.$$

B) Gruppen mit Substitutionen der Typen:

$$u' = \varepsilon^{2\nu} u + (a, b).$$

1) *Ausgezeichnete* G_{48}, alle Substitutionen dieser Form umfassend

2) *Vier gleichberechtigte* G_{12} z. B.

$$u' = \varepsilon^{2\nu} u + (a, b), \qquad a \equiv b \equiv 0, \pmod 2.$$

C) Gruppen aus Substitutionen vom Typus:

$$u' = \pm u + (a, b).$$

1) Die Gesammtheit derselben umfassend eine *ausgezeichnete* G_{32}.

2. a) *Drei gleichberechtigte* G_{16}.

$$u' = \pm u + (a, b)$$

resp. entsprechend den drei Congruenzen:

$$a \equiv 0, \quad b \equiv 0, \quad a \equiv b, \pmod 2.$$

b) *Drei gleichberechtigte* G_{16}'

$$u' = u + (a, b), \quad = -u + (c, d)$$

bez. entsprechend den drei Congruenzen:

$$\left.\begin{array}{ll} b \equiv 0, & d \equiv 1 \\ a \equiv 0, & c \equiv 1 \\ a \equiv b, & c \gtrless d \end{array}\right\} \pmod 2.$$

3. a) *Sechs gleichberechtigte* G_8, in den G_{16} enthalten z. B.

$$u' = \pm u + (a, b), \quad b \equiv 0 \pmod 4.$$

b) *Sechs gleichberechtigte* G_8', in den G_{16} enthalten z. B.

$$u' = u + (a, b), \quad = -u + (c, d),$$
$$b \equiv 2a, \quad d \equiv 2c + 2, \pmod 4.$$

c) *Sechs gleichberechtigte* G_8'', in den G_{16}' enthalten z. B.

$$u' = u + (a, b), \quad = -u + (c, d),$$
$$b \equiv 0, \quad d \equiv 1, \quad (\text{mod. } 4).$$

d) *Sechs gleichberechtigte* G_8''', in den G_{16}' enthalten z. B.

$$u' = u + (a, b), \quad = -u + (c, d),$$
$$b \equiv 2a, \quad d \equiv 2c + 1, \quad (\text{mod. } 4).$$

e) *Drei gleichberechtigte* $G_8^{(4)}$, z. B.

$$u' = u + (a, b), \quad = -u + (c, d),$$
$$a \equiv b \equiv c \equiv 0, \quad d \equiv 1, \quad (\text{mod. } 2).$$

f) *Ausgezeichnete* $G_8^{(5)}$:

$$u' = \pm u + (a, b), \quad a \equiv b \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2).$$

4. a) *Sechs gleichberechtigte* G_4'' z. B.

$$u' = u + (a, b), \quad = -u + (c, d),$$
$$a \equiv c \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2),$$
$$b \equiv 0, \quad d \equiv 1, \quad (\text{mod. } 4).$$

b) *Sechs gleichberechtigte* G_4''' z. B.

$$u' = u + (a, b), \quad = -u + (c, d),$$
$$a \equiv 0, \quad c \equiv 1, \quad (\text{mod. } 2),$$
$$b \equiv d \equiv 0, \quad (\text{mod. } 4).$$

c) *Sechs gleichberechtigte* $G_4^{(4)}$ z. B.

$$u' = u + (a, b), \quad = -u + (c, d),$$
$$a \equiv 0, \quad c \equiv 1, \quad (\text{mod. } 2),$$
$$b \equiv 0, \quad d \equiv 1, \quad (\text{mod. } 4).$$

d) *Sechs gleichberechtigte* $G_4^{(5)}$ z. B.

$$u' = \pm u + (a, b), \quad 2a \equiv b \equiv 0, \quad (\text{mod. } 4).$$

D) Gruppen mit Substitutionen vom Typus:

$$u' = u + (a, b).$$

1) Alle Substitutionen dieser Form umfassend eine *ausgezeichnete* G_{16}'''.

2) *Drei gleichberechtigte* $G_8^{(6)}$ z. B.

$$u' = u + (a, b), \quad b \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2).$$

3) *Ausgezeichnete* $G_4^{(6)}$:

$$u' = u + (a, b), \quad a \equiv b \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2).$$

Andere Untergruppen existiren nicht.

§ 2.

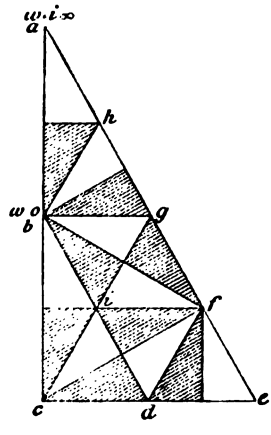
Die Hauptmoduln der Gruppen G_6, G_3, G_2.

Definiren wir genau, wie in § 2 des vorigen Abschnitts, eine zur $\Gamma_{6N(2^\nu)}$ gehörige Function $\tau^{(\nu)}$ dadurch, dass wir verlangen, sie solle auch bei der Substitution $\omega' = \omega + 1$ erhalten bleiben, so können wir dieses $\tau^{(\nu)}$ durch eine Kette von biquadratischen Gleichungen aus der absoluten Invariante J berechnen. Es ist nämlich, wie man durch functionentheoretische Betrachtungen zeigt:

$$\tau^{(\nu-1)} = \frac{\tau^{(\nu)}(\tau^{(\nu)}+8)^3}{64(\tau^{(\nu)}-1)^3}, \tag{1}$$

wobei dann $\tau^{(0)}$ mit J identisch ist.

Gegenwärtig handelt es sich um τ'' oder kurz τ, einen Hauptmodul, den wir durch eine leichte Substitution auch direct als algebraische Function von J definiren könnten. $\tau(\omega)$ bildet seine negative Halbebene auf einen Complex von Dreiecken ab, der in der u-Ebene die nebenstehende Gestalt darbietet. Dabei herrscht dann insbesondere in den mit Buchstaben bezeichneten Ecken die nachstehende Werthevertheilung:



$$\begin{aligned}
&\tau(a) = \infty,\\
&\tau(b) = (1+\sqrt{3})^3,\\
&\tau(c) = 1,\\
&\tau(d) = \left(\frac{-1-\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}}}{2}\right)^3,\\
&\tau(e) = 0,\\
&\tau(f) = (1-\sqrt{3})^3,\\
&\tau(g) = -8, \qquad \tau(h) = -\left(\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}}}{2}\right)^3,\\
&\tau(i) = \left(\frac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{6\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}\right)^3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Um die sechszehn mit $\tau(\omega)$ gleichberechtigten Hauptmoduln darzustellen, bezeichne ich die 16 Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ der ausgezeichneten G_{16}''' mit $V_{i,k}$ und zwar sei dabei:

$$i = \begin{pmatrix}\gamma-\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix},$$

so dass i, k Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, 3 bedeuten und $V_{0,0}$ die Identität ist. Dann sind die fraglichen Functionen dargestellt durch:

$$\tau_{i,k}(\omega) = \tau(V_{i,k}(\omega)), \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Durch die Wurzelziehungen:

$$x_{i,k} = \sqrt[3]{\tau_{i,k}}, \quad y_{i,k} = \sqrt{\tau_{i,k} - 1}$$

gelangen wir sodann zu den Moduln der G_2 und G_3 und wählen aus denselben die beiden $x_{0,0}$, $y_{0,0}$ oder x, y als Galois'sches *System* der Γ_{96} aus. Dieselben sind dann verbunden durch die Relation:

$$y^2 = x^3 - 1. \tag{3}$$

Da G_2 nur eine unter *vier* gleichberechtigten Gruppen ist, so müssen sich die sechszehn $x_{i,k}$ derart viermal zu je vier ordnen, dass jedes $x_{i,k}$ linear abhängig ist von irgend einer demselben Quadrupel angehörigen Function. In diesem Sinne haben wir:

$$x_{2,0}(\omega) = \frac{x+2}{x-1}, \quad x_{0,2}(\omega) = \frac{x+2\varepsilon^4}{\varepsilon^2 x-1}, \quad x_{2,2}(\omega) = \frac{x+2\varepsilon^2}{\varepsilon^4 x-1}. \tag{4}$$

Dem gegenüber sind x, $x_{1,0}$, $x_{3,1}$, $x_{0,3}$ vier Functionen, von denen keine einzige linear von irgend einer unter ihnen abhängt. Diese vier $x_{i,k}$ können wir somit als Hauptmoduln der vier G_2 ansehen, folgern übrigens aus der Form dieser Gruppen auf Grund des Abel'schen Theorems, *dass die fraglichen Hauptmoduln lineare Functionen auf der* C_3 (3) *sind.* In der That findet man durch eingehendere Betrachtung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{3}} \cdot x_{1,0}(\omega) &= \frac{y+(x-1)\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{y-(x-1)\sqrt{9+6\sqrt{3}}}, \\
\frac{1}{1+\sqrt{3}}\, x_{3,1}(\omega) &= \varepsilon^2 \cdot \frac{y+(\varepsilon^1 x-1)\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{y-(\varepsilon^4 x-1)\sqrt{9+6\sqrt{3}}}, \\
\frac{1}{1+\sqrt{3}}\, x_{0,3}(\omega) &= \varepsilon^4 \cdot \frac{y+(\varepsilon^2 x-1)\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{y-(\varepsilon^2 x-1)\sqrt{9+6\sqrt{3}}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Für die $y_{i,k}$ gilt der allgemeine Satz, *dass dieselben Functionen zweiten Grades auf der* C_3 *sind*, wie sich solches analytisch aus Formeln des § 4 dieses Abschnitts sehr leicht ergeben wird. Indessen ist die Form dieser Functionen ziemlich complicirt. Einfach sind nur die drei:

$$\begin{aligned}
-y_{2,0}(\omega) &= \frac{3y}{(1-x)^2}, \quad -y_{0,2}(\omega) = \frac{3y}{(1-\varepsilon^2 x)^2}, \\
-y_{2,2}(\omega) &= \frac{3y}{(1-\varepsilon^4 x)^2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

§ 3.

Die Hauptmoduln der G_2'.

Die zwölf gleichberechtigten G_2' gehören ebenfalls dem Geschlechte $p = 0$ an und liefern somit zwölf neue Hauptmoduln, welche ich mit $\sigma_i(\omega)$, $(i=0, 1, \ldots 11)$ bezeichne. Die allgemeine Form der zugehörigen Substitutionen ist:

$$u' = -u + \text{Const.}$$

Somit lehrt auch hier das Abel'sche Theorem, dass die $\sigma_i(\omega)$ Functionen auf der C_3 sind und führt uns auf folgende zusa fassende Form für dieselben:

$$(1) \qquad \sigma_i(\omega) = \frac{y + \varepsilon^{3\mu}\sqrt{9 \pm 6\sqrt{3}}}{x - \varepsilon^{2\nu}(1 \pm \sqrt{3})}.$$

§ 4.

Anderes Galois'sches System der Γ_{96}.

Man setze $z_0(\omega)$, $z_1(\omega)$, $z_2(\omega)$ folgenden rationalen Fun von x und y gleich:

$$(1) \qquad z_0(\omega) = \frac{x^2 - 2x - 2}{2y}, \quad z_1(\omega) = \frac{x^2 - 2\varepsilon^2 x - 2\varepsilon^4}{2y},$$

$$z_2(\omega) = \frac{x^2 - 2\varepsilon^4 x - 2\varepsilon^2}{2y},$$

so sind die z_i als rationale Functionen auf der C_3 Moduln d

Durch Zusammenfügen der drei Gleichungen folgt:

$$z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^4 z_2 = -\frac{3}{y},$$

sowie

$$z_0 + \varepsilon^4 z_1 + \varepsilon^2 z_2 = -\frac{3}{y} \cdot x.$$

Daraus folgen die Umkehrungen der Gleichungen (1):

$$(2) \qquad x = \frac{z_0 + \varepsilon^1 z_1 + \varepsilon^2 z_2}{z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^4 z_2}, \quad y = -\frac{3}{z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^4 z_2},$$

d. h. z_0, z_1, z_2 bilden ein Galois'sches System der Γ_{96}.

Dieses Modulsystem besitzt einige Vorzüge vor dem Syste Um zunächst die zwischen den z_i bestehenden Relationen aufzu schreibe man zusammenfassend:

$$z_i(\omega) = \frac{x^2 - 2\varepsilon^{2i} x - 2\varepsilon^{4i}}{2y}.$$

Dann folgt:

$$z_i^2 = \frac{x(x^3+8) - 4\varepsilon^{2i}(x^3-1)}{4y^2},$$

so dass mit Rücksicht auf die zwischen x und y bestehende R sich der Ausdruck:

$$z_i^2 + \varepsilon^{2i} = \frac{x(x^3+8)}{4(x^3-1)}$$

von i unabhängig und somit für alle drei z_i als gleichgross Also heisst die gesuchte Relation:

$$(3) \qquad z_0^2 + 1 = z_1^2 + \varepsilon^2 = z_2^2 + \varepsilon^1,$$

so dass das Polygon der Γ_{96} vermöge des Systems der z_i eindeutig auf *eine Raumcurve der vierten Ordnung* bezogen erscheint, die durch die Gleichungen (3) dargestellt wird. Der gemeinsame Ausdruck von $z_i^2 + \varepsilon^{2i}$ lässt sich auch als Product der vier Functionen $x_{i,k}$:

$$x, \quad \frac{x+2}{x-1}, \quad \frac{x+2\varepsilon^1}{\varepsilon^2 x-1}, \quad \frac{x+2\varepsilon^2}{\varepsilon^4 x-1}$$

auffassen und bleibt als symmetrische Function dieser vier Grössen nach § 2 (4) bei derjenigen Gruppe von ω Substitutionen unverändert, die auf das Integral u den folgenden Einfluss ausübt:

$$u' = \pm u + 2a + 2b\varepsilon.$$

Dies ist aber nach früheren Auseinandersetzungen die Gruppe der mod. 3 der Identität congruenten Substitutionen. Die Summe $z_i^2 + \varepsilon^{2i}$ ist somit ein Modul der *dritten* Stufe und erweist sich direct als *Tetraederirrationalität a. Somit ist:*

$$(4) \qquad z_0 = \sqrt{a-1}, \quad z_1 = \sqrt{a-\varepsilon^2}, \quad z_2 = \sqrt{a-\varepsilon^4}.$$

Die Γ_{96} ist die Gruppe, welche durch Simultanstellung von $\sqrt{a-1}$, $\sqrt{a-\varepsilon^2}$, $\sqrt{a-\varepsilon^4}$ definirt ist.

Das Modulsystem der z_i zeichnet sich namentlich deshalb vor dem anderen System x, y aus, weil die C_4 (3) entsprechend den 96 nichtäquivalenten Substitutionen 96 *Collineationen**) in sich zulässt, während für die C_3 ein Gleiches nicht gültig ist. In der That entsteht die Gruppe der 96 fraglichen Collineationen für die homogen geschriebene C_4:

$$z_0^2 + z_3^2 = z_1^2 + \varepsilon^2 z_3^2 = z_2^2 + \varepsilon^4 z_3^2$$

aus den beiden erzeugenden Operationen:

$$z_0' : z_1' : z_2' : z_3' = z_1 : z_2 : z_0 : \varepsilon z_3,$$

$$z_0' : z_1' : z_2' : z_3' = \sqrt{9 + 6\sqrt{3}} \cdot z_3 : (1 + \sqrt{3} - \varepsilon^2) z_2 : (1 + \sqrt{3} - \varepsilon^4) z_1 : \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}\, z_0,$$

welche bez. den ω-Substitutionen $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ entsprechen.

§ 5.

Construction der Punktgruppen für $J = 0, 1, \infty$.

Einem festen Werthe der Invariante J entsprechen im Allgemeinen 96 *discret* liegende Punkte sowohl auf der C_3, wie auf der C_4. Nur für $J = \infty$ fallen die 96 zugehörigen Punkte zu je 6 in 16 Punkte,

*) Hieraus folgt dann noch im Verein mit Gleichung (1) die Behauptung, welche früher bezüglich der mit y gleichberechtigten Moduln gemacht wurde.

für $J = 1$ zu je 2 in 48 und für $J = 0$ zu je 3 in 32 Punkte zusammen. Diese drei Systeme von Punktgruppen kann man auf der einen, wie auf der andern Curve durch lineare Constructionen finden, nur fallen dieselben für die Raumcurve symmetrischer aus, als für die ebene C_3. Uebrigens beweist man die folgenden Behauptungen stets vermöge des Abel'schen Theorems.

Auf der ebenen C_3 markire man zunächst die drei Wendepunkte, welche die y-Axe ausschneidet. Einer derselben liegt unendlich fern und in ihm wird $J = \infty$. Von dort aus gehen noch drei von der Wendetangente verschiedene Tangenten an die C_3, welche dieselbe in drei Punkten berühren, die dann ebenfalls $J = \infty$ tragen. Aber diese drei letzten Punkte sind gewöhnliche Punkte der C_3; so dass von jedem derselben aus nun vier neue Tangenten an die C_3 gelegt werden können. Die 12 solchergestalt entstehenden Berührungspunkte vervollständigen die Gruppe der Punkte die dem Werthe $J = \infty$ entsprechen.

Die 12 zuletzt erhaltenen Punkte machen wir aufs neue zu Ausgangspunkten von je vier Tangenten. Dann erhalten wir in den 48 Berührungspunkten derselben die Gruppe der Punkte, in denen J der Einheit gleich wird.

Die beiden andern auf der y-Axe gelegenen Wendepunkte tragen $J = 0$. Die *sechs* von ihnen ausgehenden Tangenten berühren die C_3 in sechs neuen Punkten mit $J = 0$. Die 24 Berührungspunkte, welche man dann durch nochmaliges Tangentenziehen von den letzten sechs Punkten aus erhält, ergänzen die Gruppe der Punkte mit verschwindender Invariante.

Um nunmehr die gleiche Aufgabe auch für die C_4 zu lösen, denken wir dieselbe, wie am Schluss des vorigen Paragraphen, auf ein homogenes Coordinatentetraeder bezogen. Die sechszehn Punkte, in denen die vier Coordinatenebenen dann die C_4 schneiden, sind die 16 Wendeberührungspunkte der C_4 und zugleich die Punkte mit $J = \infty$.

Jede der Coordinatenebenen wird von den vier Wendeberührungsebenen, die zu den *in ihr* liegenden Wendeberührungspunkten gehören, in vier geraden Linien geschnitten, so dass im Ganzen 16 gerade Linien in der gedachten Art entstehen. Wir machen dieselben zu Trägern von ebensoviel Ebenenbüscheln. Die Ebenen des einzelnen Büschels schneiden auf der C_4 noch *drei* bewegliche Punkte aus, die dann im Allgemeinen von einander getrennt sind. Nur zweimal kommt es, abgesehen vom Wendeberührungspunkt selbst, im einzelnen Büschel vor, dass die drei beweglichen Punkte in einen zusammenrücken. Die $2 \cdot 16$ so entstehenden Punkte sind die Punkte mit verschwindendem J.

Zur Construction der 48 Punkte, in denen J der Einheit gleich wird, verfährt man endlich, wie folgt. Man verbinde einen beliebigen Wendeberührungspunkt der C_4 durch 12 gerade Linien mit denjenigen

zwölf Wendeberührungspunkten, die mit dem ersteren *nicht* derselben Coordinatenebene angehören. Irgend eine Ebene durch eine dieser zwölf Linien schneidet dann die C_4 noch in zwei neuen Punkten. Aber durch jede dieser 12 Linien gehen vier gewöhnliche Tangentialebenen der C_4, für welche also die beiden eben gemeinten Punkte in einen zusammenfallen. Die $4 \cdot 12$ so entstehenden Berührungspunkte bilden die Gruppe der Punkte für $J = 1$.

Fünfter Abschnitt.

Genaue Untersuchung der $\Gamma_{6N(p)}$ für eine Primzahl der Form $p = 6h + 5$.

§ 1.

Zerlegung der G_{6p^2}.

Versteht man unter p eine Primzahl im Körper der reellen ganzen Zahlen, so ist für die Untersuchung der zugehörigen $\Gamma_{6N(p)}$ der Fall, dass p die Form $6h + 5$ hat, von dem andern $p = 6h + 1$ von vornherein zu trennen. Ersterer gestaltet sich deshalb um sehr viel einfacher, weil die Primzahlen der Form $6h + 5$ auch im Zahlkörper der aus dritten Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen den Primzahlcharakter behalten, während dieses nicht von den Primzahlen der andern Form gilt. Ich beginne daher zunächst mit dem einfacheren Fall $p = 6h + 5$. Zur Aufstellung sämmtlicher Untergruppen der *endlichen* G_{6p^2} gelangt man leicht durch folgende Sätze:.

Alle p^2 Substitutionen vom Typus:

$$u' = \varepsilon u + (a, b), \qquad (a, b = 0, 1 \ldots (p-1))$$

sind mit einander gleichberechtigt.

In der That wird die Substitution $u' = \varepsilon u$ vermöge:

$$u' = \varepsilon^2 u + (a, b)$$

in die andere:

$$u' = \varepsilon u + (a, b)$$

transformirt. Somit haben wir:

p^2 mit einander gleichberechtigte cyklische G_6:

$$u' = \varepsilon u + (a, b), \; = \varepsilon^2 u + (a - b, a + 2b), \; = \varepsilon^3 u + (-2b, 2a + 2b),$$
$$= \varepsilon^4 u + (-a - 2b, 2a + b), \; = \varepsilon^5 u + (-a - b, a), \; = u.$$

Weiter zeigt man leicht, dass die p^2 hier auftretenden *zweiten Potenzen:*

$$u' = \varepsilon^2 u + (a - b, a + 2b)$$

alle von einander verschieden sind, so dass sich in den G_6 p^2 *gleichberechtigte* G_3 finden. In gleicher Weise bestimmt man auch die Zahl

der in den G_6 enthaltenen *cyklischen Untergruppen zweiter Ordnung* G_2 *zu* p^2. Alle diese Gruppen sind vom Geschlechte Null und lassen sich übrigens leicht mit den Drehungen des zugehörigen Fundamentalpolygons um die Punkte bei $J = 0, 1, \infty$ identificiren.

Hierüber hinaus haben wir nur noch Substitutionen vom Typus

$$u' = u + (a, b),$$

deren Gesammtheit eine *ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung* p^2 G_{p^2} bildet. Was die hierin enthaltenen Cyklen angeht, so beachte man, dass die obige Substitution eine ist unter *sechs* gleichberechtigten:

$$\begin{aligned} &u' = u + (a, b) \quad , \quad u' = u + (-a, -b), \\ &u' = u + (-b, a+b), \quad u' = u + (b, -a-b), \\ &u' = u + (-a-b, a), \quad u' = u + (a+b, -a). \end{aligned}$$

Schliessen wir die Identität $a = b = 0$ aus, so gelten hier folgende Sätze:

Je zwei neben einander stehende Substitutionen sind zu einander invers oder die eine ist mod. p betrachtet die $(p-1)^{te}$ *Potenz der andern.* Durch Iteration der drei in der ersten Columne stehenden Substitutionen erhält man *drei verschiedene*, aber *gleichberechtigte Cyklen der Ordnung* p G_p. In der That wären etwa die ersten beiden G_p einander gleich, so müsste die Substitution:

$$u' = u + (-b, a+b)$$

eine Potenz von:

$$u' = u + (a, b)$$

sein, d. h. es wäre

$$-b \equiv na, \quad a + b \equiv nb \pmod{p}$$

oder

$$a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

was bei der hier vorausgesetzten Form der Primzahl p nicht angeht. Abgesehen von der Identität giebt es (p^2-1) Substitutionen der Form:

$$u' = u + (a, b).$$

Von diesen enthalten drei gleichberechtigte G_p obiger Form $3(p-1)$ verschiedene. Somit folgt das Resultat:

Die in der G_{p^2} *enthaltenen Cyklen bilden* $\frac{p+1}{3}$ *Systeme von je drei gleichberechtigten* G_p.

Die nichtcyklischen Untergruppen anlangend haben wir folgenden ersten Satz:

Eine Gruppe, in der zwei verschiedene G_6 *enthalten sind, fällt mit der Gesammtheit zusammen.*

In der That wäre eine solche Gruppe gegeben, so könnten wir zu einer mit ihr gleichberechtigten gehen, in welcher die beiden fraglichen G_6 die folgenden sind:

$$u' = \varepsilon u \quad , \quad = \varepsilon^2 u \quad \ldots$$
$$u' = \varepsilon u + (a, b), \quad = \varepsilon^2 u + (a-b, a+2b) \ldots$$

Hiernach finden sich in der fraglichen Untergruppe auch die beiden G_p, deren Erzeugende:

$$u' = u + (a, b), \quad u' = u + (a-b, a+2b)$$

sind. Diese beiden G_p, die man leicht als von einander verschieden nachweist, erzeugen mit einander verbunden die G_{p^2}, welche dann im Verein mit der G_6

$$u' = \varepsilon u, \quad = \varepsilon^2 u \ldots$$

auf die Gesammtheit führt.

Alle Substitutionen vom Typus:

$$u' = \varepsilon^{2\nu} u + (a, b)$$

bilden eine ausgezeichnete G_{3p^2}.

Jede Untergruppe, welche zwei verschiedene G_3 *enthält, fällt mit der* G_{3p^2} *zusammen.*

Diesen letzten Satz zeigt man genau, wie soeben den analogen für die G_{6p^2}.

Alle Substitutionen vom Typus:

$$u' = \pm u + (a, b)$$

bilden eine ausgezeichnete G_{2p^2}. Weitere Untergruppen dieser G_{2p^2} können höchstens der Ordnung $2p$ angehören, sofern dieselben nicht cyklisch sein sollen. In der That aber bildet eine beliebige G_p:

$$u' = u + (na, nb)$$

im Verein mit der G_2

$$u' = -u + (c, d), \quad = u$$

eine G_{2p}:

$$u' = u + (na, nb), \quad u' = -u + (na+c, nb+d)$$

und man zählt leicht ab, dass in dieser Weise überhaupt $\frac{p+1}{3}$ *Systeme von je* $3p$ *gleichberechtigten Untergruppen der Ordnung* $2p$ G_{2p} existiren.

§ 2.

Die Hauptmoduln der G_6, G_3, G_2.

Die p^2 gleichberechtigten Cyklen G_6 definiren ebensoviele *gleichberechtigte Hauptmoduln*, von welchen ich wieder den zur Gruppe:

$$\omega' = \omega + 1 \ldots$$

gehörigen mit $\tau(\omega)$ bezeichne. Die Function $\tau(\omega)$ bildet dann ihre negative (oder positive) Halbebene auf einen Complex von Dreiecken ab, die innerhalb der u-Ebene ein grösseres Dreieck mit den Winkeln

$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ zusammensetzen. Diesen Ecken sollen resp. die Werthe der Function $\tau = 1, 0, \infty$ angehören.

Das der Function $\tau(\omega)$ zukommende Fundamentalpolygon enthält p^2 Doppeldreiecke, von denen eines, dem Werthe $\tau = \infty$, $\omega = i\infty$ entsprechend, isolirt verläuft, während die übrigen an $\frac{p^2-1}{6}$ rationalen Punkten $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ in Cyklen zu je sechs zusammenhängen. Ist für den einzelnen dieser rationalen Punkte

$$i = \binom{\gamma - \alpha}{\gamma}, \quad k = \binom{\alpha}{\gamma},$$

so sei der numerische Werth der Function τ in eben diesem Punkte bezeichnet durch $c_{i,k}$. Denken wir uns dann i, k als *Coordinaten* complexer Zahlen $i + k\varepsilon$, und bilden die mit der eben geschriebenen Zahl associirten, so folgt unter Beachtung der Eigenschaften von $\tau(\omega)$ die Identität

$$c_{i,k} = c_{-k,i+k} = c_{-i-k,i} = \cdots,$$

sowie der Satz, dass die Grössen

$$c_{i,k}, \quad c_{i+k,-k}$$

conjugirt complex sind.

Die Substitutionen der ausgezeichneten G_{p^2} $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ bezeichne ich wieder mit $V_{i,k}(\omega)$, wobei wie oben:

$$i = \binom{\gamma - \alpha}{\gamma}, \quad k = \binom{\alpha}{\gamma}$$

zu setzen ist. Dann sind:

$$\tau_{i,k}(\omega) = \tau(V_{i,k}(\omega)) \tag{1}$$

die p^2 mit $\tau(\omega)$ gleichberechtigten Functionen.

Zu den Hauptmoduln der G_2 und G_3 gehen wir wieder durch einfache Wurzelziehungen und definiren dabei insbesondere als Galois'sches *System* der Γ_{6p^2}:

$$x(\omega) = \sqrt[3]{\tau}, \quad y(\omega) = \sqrt{\tau - 1}$$

mit der Relation:

$$y^2 = x^3 - 1. \tag{2}$$

Die Werthe von x, y im rationalen Punkte $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ sind dann einfach:

$$x = \sqrt[3]{c_{i,k}}, \quad y = \sqrt{c_{i,k} - 1},$$

wobei sich die zu wählenden *Einheitswurzeln* nach der Festsetzung, dass x und y auf der imaginären ω-Axe *reell* und *positiv* werden sollen, allein durch die untern Indices i, k bestimmen.

Bezüglich der mit x gleichberechtigten Functionen gilt nun der Hauptsatz:

Jede Function

$$x_{i,k}(\omega) = x\,(V_{i,k}(\omega))$$

ist auf der C_3*:*

$$y^2 = x^3 - 1$$

eine lineare Function.

In der That zeigt man leicht, dass $x_{i,k}$ Hauptmodul der G_2:

$$u' = -u + (-2i, -2k)$$

ist. Gleiches gilt aber nach dem Abel'schen Theorem auch von

$$\frac{y - \sqrt{c_{2i,2k} - 1}}{x - \sqrt[3]{c_{2i,2k}}},$$

so dass der Ansatz gilt:

$$x_{i,k}(\omega) = \frac{A(y - \sqrt{c_{2i,2k} - 1}) + B(x - \sqrt[3]{c_{2i,2k}})}{C(y - \sqrt{c_{2i,2k} - 1}) + D(x - \sqrt[3]{c_{2i,2k}})}. \tag{3}$$

Hier bedeuten $A, B \ldots$ Constante, die man durch Substitution specieller Werthe gleichfalls durch die c ausdrücken kann.

Eine zweite Art, die $x_{i,k}$ darzustellen, führt auf eine rationale Function zweiten Grades auf der C_3, die indessen nur eine einzige Constante c enthält. Man setze nämlich:

$$U_{i,k}(\omega) = 3 + V_{i,k}(\omega),$$

dann ist:

$$x(U_{i,k}(\omega)) = x\,(V_{i,k}(\omega))$$

und andererseits:

$$u\,(U_{i,k}(\omega)) = -u + (i, k).$$

Bei dieser letzten Substitution bleibt die Function

$$\frac{y + \sqrt{c_{i,k} - 1}}{x - \sqrt[3]{c_{i,k}}} \tag{4}$$

ungeändert und bildet zugleich einen Hauptmodul der zugehörigen G_2:

$$\omega' = U_{i,k}(\omega), \quad \omega' = \omega.$$

Das Product:

$$x(\omega) \cdot x\,(U_{i,k}(\omega))$$

bleibt gleichfalls bei der eben angegebenen G_2 erhalten und muss eine rationale Function *zweiten* Grades vom Hauptmodul derselben sein. Dieser Ansatz führt durch Substitution der Specialwerthe:

$$\frac{y}{x} = \sqrt{x} = \infty; \quad x = 0, \quad y = \pm i$$

auf die Form:

$$x_{i,k}(\omega) = \frac{\sqrt[3]{c_{i,k}}\,x^2 + \sqrt[3]{c_{i,k}^2}\,x - 2 + 2\sqrt{c_{i,k} - 1}\,y}{(x - \sqrt[3]{c_{i,k}})^2}, \tag{5}$$

Für die Functionen y gilt als Hauptsatz:
Jede mit y gleichberechtigte Function:

$$y_{i,k}(\omega) = y(V_{i,k}(\omega))$$

ist eine rationale Function zweiten Grades auf der C_3.
Es ist nämlich:

$$y(U_{i,k}(\omega)) = -y(V_{i,k}(\omega)),$$

sowie nach (4):

$$(6) \qquad \frac{y(U_{i,k}(\omega)) + \sqrt{c_{i,k}-1}}{x(U_{i,k}(\omega)) - \sqrt[3]{c_{i,k}}} = \frac{y(\omega) + \sqrt{c_{i,k}-1}}{x(\omega) - \sqrt[3]{c_{i,k}}}.$$

Durch Substitution des linearen Ausdrucks (3) für

$$x(V_{i,k}(\omega)) = x(U_{i,k}(\omega))$$

in diese letzte Gleichung ist somit die Behauptung dargethan.

§ 3.

Die Hauptmoduln der Untergruppen G_{2p}.

Die am Schluss von § 1 genannten Untergruppen $2p^{ter}$ Ordnung G_{2p} gehören gleichfalls noch dem Geschlechte Null an. Wollen wir somit alle zur Γ_{6p^2} gehörigen Hauptmoduln kennen lernen, so restirt noch die Behandlung dieser G_{2p}. Aber es ist in allen Fällen leicht, aus den Functionen $x_{i,k}$ durch Productbildung den Hauptmodul einer vorgegebenen G_{2p} zu bilden, so dass wir uns bezüglich der rationalen Darstellung dieser Moduln auf der C_3 dann auch sogleich auf die Entwicklungen des vorigen Paragraphen berufen können.

Bedeuten a, b, c, d irgend welche Zahlen aus der Reihe $0, 1 \ldots (p-1)$, so bleibt das Product:

$$(1) \qquad X(\omega) = \prod_{n=0}^{p=1} x_{na+c,\, nb+d},$$

in welchem wir die untern Indices nur mod. p nehmen, bei der Gruppe der Ordnung $2p$:

$$(2) \qquad u' = u + (na, nb), \quad u' = -u + (na - 2c, nb - 2d)$$

unverändert. Da ferner $X(\omega)$ auf dem Polygon der Γ_{6p^2} $2p$ mal unendlich wird, bildet diese Function zugleich den Hauptmodul der durch (2) bezeichneten G_{2p}. Somit folgt als Resultat:

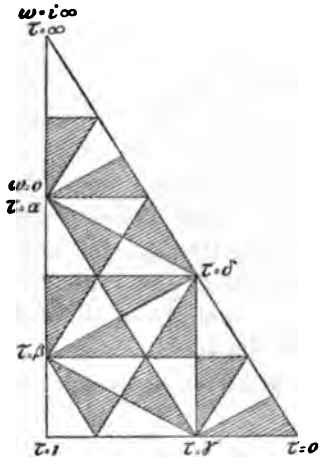
Indem wir in (1) die Zahlen a, b, c, d in jeder Weise auswählen, kommen wir im Ganzen auf $p(p+1)$ verschiedene Functionen $X(\omega)$, die sich in $\frac{p+1}{3}$ Systeme von je $3p$ gleichberechtigten Functionen anordnen und in dieser Anordnung den G_{2p} des § 1 als Hauptmoduln angehören.

§ 4.

Bestimmung der Constanten $c_{i,k}$ für den Fall $p = 5$.

Aus den vorangehenden Erörterungen wird man ersehen, dass die explicite Darstellung der zu einer bestimmten Γ_{6p^2} gehörenden Hauptmoduln jedesmal dann ohne Schwierigkeit geliefert werden kann, wenn es möglich gewesen ist, die numerischen Werthe der Constanten $c_{i,k}$ zu bestimmen. In den Anfangsfällen wird die hierdurch angezeigte Rechnung durchführbar und ich komme hier um so lieber noch auf den Fall $p = 5$ ausführlich zurück, als gerade dieses Beispiel zweckmässig eine Schlussweise illustrirt, die auch oben bei den analogen Rechnungen zum Ziele führte.

Die Function $\tau(\omega)$ des § 2 bildet ihre negative Halbebene auf einen Complex von Kreisbogendreiecken ab, dessen Lage in der u-Ebene durch nebenstehende Figur angegeben ist. Die fraglichen Werthe von τ in den vier Punkten mit $J = \infty$ seien der Kürze wegen jetzt durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet. Dann sind sämmtliche vier Zahlen reell und zwar ist des Näheren:



$$\delta < 0 < \gamma < 1 < \beta < \alpha.$$

Zugleich können wir τ als diejenige *Function von u* auffassen, welche die Abbildung einer Halbebene auf ein geradliniges Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ vermittelt, so zwar, dass in den Ecken des Dreiecks die Werthe $\tau = 1, 0, \infty$ statthaben. Dann sind die Zahlen $\alpha, \ldots, \delta$ die Werthe der Abbildungsfunction in gewissen rationalen Theilpunkten der Seiten. Bei dieser Auffassung ist die *Dimension* des rechtwinkligen Dreiecks in der u-Ebene gleichgültig.

Nun gehöre zur $\Gamma_{6.10^2}$ die Function $t(\omega)$ genau so, wie $\tau(\omega)$ zur $\Gamma_{6.5^2}$; dann ist zuvörderst:*)

$$\tau = \frac{t(t+8)^3}{64(t-1)^3}. \tag{1}$$

Zugleich sind die Dimensionen des zu t gehörenden rechtwinkligen Dreiecks gegenüber dem obigen gerade die doppelten. Dieser Umstand hat insbesondere zur Folge, dass in dem rationalen Theilpunkte der Seite, in dem $t = \alpha$ ist, $\tau = \beta$ wird. Desgleichen müssen auch umgekehrt die Werthe $t = \beta$, $\tau = \alpha$ in Formel (1) einander entsprechen.

*) Cf. Formel (1) pag. 383.

Die Fortsetzung der Betrachtung zeigt dann, dass durchaus in derselben Weise den Werthen $t = \gamma, \delta$ resp. die Werthe $\tau = \delta, \gamma$ in (1) entsprechen müssen. Der hieraus entspringende Ansatz:

$$\alpha = \frac{\beta(\beta+8)^3}{64(\beta-1)^3}, \quad \beta = \frac{\alpha(\alpha+8)^3}{64(\alpha-1)^3},$$
$$\gamma = \frac{\delta(\delta+8)^3}{64(\delta-1)^3}, \quad \delta = \frac{\gamma(\gamma+8)^3}{64(\gamma-1)^3}$$

zeigt sich für die Bestimmung der vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hinreichend, was wir zunächst für α und β durch die nachfolgende Rechnung beweisen.

Aus dem Product der beiden ersten Gleichungen folgt durch Ausziehen der dritten Wurzel unter Rücksicht auf die für α, β geltende Ungleichung die nachfolgende symmetrische Beziehung:

$$\frac{(\alpha+8)(\beta+8)}{16(\alpha-1)(\beta-1)} = 1,$$

welche sich noch einfacher in der Form:

(A) $$5\alpha\beta = 8(\alpha+\beta) + 16$$

schreibt. Desgleichen folgt aus den beiden ersten Gleichungen:

$$\alpha - 1 = \frac{(\beta^2-20\beta-8)^2}{64(\beta-1)^3}, \quad \beta - 1 = \frac{(\alpha^2-20\alpha-8)^2}{64(\alpha-1)^3},$$

so dass hier durch Elimination des Productes $(\alpha-1)(\beta-1)$:

$$\frac{\alpha^2-20\alpha-8}{\alpha-1} = \pm\frac{\beta^2-20\beta-8}{\beta-1}$$

folgen würde. Ueber das doppelte Vorzeichen entscheidet die Bemerkung, dass die Function τ in der Mitte der grösseren Kathete den Werth*) $10+6\sqrt{3}$ annimmt, so dass für α, β die Ungleichung gilt:

$$\beta < 10+6\sqrt{3} < \alpha.$$

Nun kann man die letzte Gleichung auch in die Form setzen:

$$\frac{(\alpha-10-6\sqrt{3})(\alpha-10+6\sqrt{3})}{\alpha-1} = \pm\frac{(\beta-10-6\sqrt{3})(\beta-10+6\sqrt{3})}{\beta-1},$$

woraus sich das untere Vorzeichen als das richtige ergiebt. Hierdurch erhalten wir eine zweite in α und β symmetrische Gleichung, die sich in geordneter Form so darstellt:

(B) $$\alpha\beta[(\alpha+\beta)-38] - (\alpha+\beta)^2 + 12(\alpha+\beta) + 16 = 0.$$

Aus (A) und (B) folgt für $(\alpha+\beta)$ die quadratische Gleichung:

(C) $$(\alpha+\beta)^2 - 76(\alpha+\beta) - 176 = 0,$$

aus welcher sich die *positive* Grösse

*) Cf. Formel (2) pag. 383.

$$\alpha + \beta = 38 + 18\sqrt{5} = \frac{4-\sqrt{5}}{8} \cdot (1+\sqrt{5})^5.$$

ergiebt.

Mit Hülfe von (A) findet sich dann weiter:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{16}{\sqrt{5}}(9+4\sqrt{5}) = \frac{(1+\sqrt{5})^6}{4\sqrt{5}},$$

so dass α und β die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - \frac{4-\sqrt{5}}{8} \cdot (1+\sqrt{5})^5 \cdot x + \frac{(1+\sqrt{5})^6}{4\sqrt{5}} = 0$$

sind. Dieses führt endlich zum Resultat:

$$\alpha, \beta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 \left[-1 + 3\sqrt{5} \pm 3\sqrt{6}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}\right]$$

oder

$$\alpha, \beta = 19 + 9\sqrt{5} \pm \frac{21+9\sqrt{5}}{2}\sqrt{6 - \frac{6}{\sqrt{5}}},$$

wobei für α jedesmal das obere Zeichen gilt.

Die Berechnung von γ und δ weicht von der soeben gegebenen Entwicklung nur dadurch ab, dass wir an einer einzigen Stelle das entgegengesetzte Vorzeichen zu wählen haben. Man kommt dann zu dem Schlussresultat:

$$\gamma, \delta = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4 \left[-1 - 3\sqrt{5} \pm 3\sqrt{6}\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}\right]$$

oder

$$\gamma, \delta = 19 - 9\sqrt{5} \pm \frac{21-9\sqrt{5}}{2}\sqrt{6 + \frac{6}{\sqrt{5}}},$$

wobei das obere Vorzeichen der Zahl γ angehört.

Sechster Abschnitt.

Genaue Untersuchung der $\Gamma_{6N(p)}$ für eine Primzahl der Form $p = 6h + 1$.

§ 1.

Zerlegung der G_{6p^2}.

Die Structur der Gruppe G_{6p^2} ist im gegenwärtigen Falle, wo $p \equiv 1 \pmod 6$ ist, etwas complicirter, wie solches bereits bei Gelegenheit der cyklischen Untergruppen der G_{6p^2} hervortritt. Unverändert zwar übertragen sich die Angaben über die G_6, G_2, G_3, indem wir auch hier p^2 *gleichberechtigte* G_6 und darin *ebensoviele gleichberechtigte*

G_2 *und* G_3 haben, die dem Geschlechte Null angehören und sich leicht mit den Drehungen des Polygons um die Punkte bei $J = 0, 1, \infty$ identificiren lassen. Anders indessen werden die Verhältnisse für die Cyklen aus Substitutionen vom Typus:

$$u' = u + (a, b),$$

da jetzt die Congruenz:

(A) $$a^2 + ab + b^2 \equiv 0, \pmod{p}$$

Lösungen zulässt.

Man bezeichne nun die beiden complexen Primfactoren von p durch $s_1 + t_1\varepsilon$ und $s_2 + t_2\varepsilon$:

$$p = (s_1 + t_1\varepsilon)(s_2 + t_2\varepsilon)$$

und betrachte die beiden Gruppen der Ordnung p G_p:

$$u' = u + (ns_i, nt_i),$$

so genügt das Zahlenpaar (ns_i, nt_i) der Congruenz (A), während zugleich:

$$s_2 = s_1 + t_1, \quad t_2 = -t_1$$

ist.

Aus diesen letzten Bedingungen folgert man leicht, dass *die beiden* G_p *von einander verschieden* sind, sowie den weitern Satz, dass *jede mit einer Erzeugenden:*

$$u' = u + (s_i, t_i)$$

gleichberechtigte Substitution eine Potenz derselben:

$$u' = u + (\nu s_i, \nu t_i)$$

ist. Auf Grund dieses letzten Satzes sind *die beiden* G_p *ausgezeichnete Untergruppen;* (sie geben offenbar den Antheil an, welchen die $\Gamma_{6N(s_i + t_i\varepsilon)}$ an der G_{6p^2} haben).

Durch die beiden G_p werden die $2p - 1$ verschiedenen incongruenten Lösungen der Congruenz (A) erschöpft. Die restirenden Zahlenpaare lassen dieselbe Behandlung zu, wie im Falle $p = 6h + 5$ und führen auf $\frac{p-1}{3}$ *Systeme von je drei gleichberechtigten* G_p.

Auch die Anzahl der nichtcyklischen Untergruppen ist bedeutend grösser. Wir haben zunächst

A) Untergruppen mit Substitutionen aller Typen:

Zwei Systeme von je p gleichberechtigten G_{6p}, z. B.

$$u' = \varepsilon^\nu u + (a, b), \quad a + b\varepsilon \equiv 0 \pmod{s_i + t_i\varepsilon}.$$

B) Untergruppen mit Substitutionen der Typen

$$u' = \varepsilon^{2\nu} u + (a, b):$$

1. *Ausgezeichnete* G_{3p^2}, die Gesammtheit dieser Substitutionen umfassend.

2. *Zwei Systeme von je p gleichberechtigten* G_{3p}, z. B.

$$u' = \varepsilon^{2\nu} u + (a, b), \quad a + b\varepsilon \equiv 0 \pmod{s_i + t_i\varepsilon}.$$

C) Untergruppen mit Substitutionen der Typen

$$u' = \pm u + (a, b):$$

1. Aus der Gesammtheit derselben bestehend eine *ausgezeichnete* G_{2p^2}.

2. $\frac{p-1}{3}$ *Systeme von je* $3p$ *gleichberechtigten* G_{2p}

$$u' = u + (na, nb), \quad u' = -u + (na + c, nb + d)$$
$$a^2 + ab + b^2 \gtrless 0, \pmod{p}.$$

3. *Zwei Systeme von je p gleichberechtigten* G_{2p}, z. B.

$$u' = \pm u + (a, b), \quad a + b\varepsilon \equiv 0 \pmod{s_i + t_i\varepsilon}.$$

D) Untergruppen mit Substitutionen vom Typus:

$$u' = u + (a, b):$$

Ausgezeichnete G_{p^2}, die Gesammtheit derselben umfassend.

§ 2.

Die Hauptmoduln der Gruppen des Geschlechtes Null.

Die Entwicklungen der §§ 2, 3 des vorigen Abschnitts übertragen sich m. m. sofort auf den gegenwärtigen Fall; neu hinzu kommen nur die Hauptmoduln der unter A), B. 2), C. 3) genannten Gruppen des Geschlechtes Null. Aber man kann nach Analogie der Ausführungen in § 3 des vorigen Abschnitts die Hauptmoduln dieser Gruppen $T_i^{(k)}$, $Y_i^{(k)}$, $X_i^{(k)}$ $(i = 1, 2;\ k = 1, 2 \ldots p)$ als Producte der zu den G_6, G_3, G_2 gehörenden Moduln τ, y, x in folgender Form angeben:

$$T_i^{(k)} = \prod_{n=0}^{p-1} \tau\left(V_{ns_i + c,\, nt_i + d}(\omega)\right),$$

$$(1) \qquad Y_i^{(k)} = \prod_{n=0}^{p-1} y\left(V_{ns_i + c,\, nt_i + d}(\omega)\right),$$

$$X_i^{(k)} = \prod_{n=0}^{p-1} x\left(V_{ns_i + c,\, nt_i + d}(\omega)\right),$$

wo dann die Substitutionen $V(\omega)$ wieder in der früheren Bedeutung gebraucht sind.

Diese Moduln nehmen offenbar gegenüber der Gruppe $\Gamma_{6N(s_i+t_i\vartheta)}$ genau dieselbe Stellung ein, wie die τ, y, x gegenüber der Γ_{6p^2}. Insbesondere können wir als Galois'sches System der $\Gamma_{6N(s_i+t_i\vartheta)}$ die beiden Moduln:

$$(2)\qquad Y_i = \prod_{n=0}^{p-1} y(V_{ns_i,\,nt_i}(\omega)),$$
$$X_i = \prod_{n=0}^{p-1} x(V_{ns_i,\,nt_i}(\omega))$$

annehmen und setzen zugleich

$$T_i = \prod_{n=0}^{p-1} \tau(V_{ns_i,\,nt_i}(\omega)).$$

Dann ist:

$$T(\omega+1) = T(\omega), \quad Y(\omega+2) = Y(\omega), \quad X(\omega+3) = X(\omega),$$

Formeln, die für beide Indices i gleichmässig gelten. Um das Verhalten von Y und X bei der Substitution $\omega' = \omega + 1$ in Erfahrung zu bringen, schreibe man z. B.

$$Y(\omega) = y(\omega) \cdot \prod_{n=1}^{p-1} y(V_{ns,\,nt}(\omega)).$$

Dann ist:

$$Y(\omega+1) = -\, y(\omega) \cdot \prod_{n=1}^{p-1} y(V_{ns,\,nt}\, S(\omega)).$$

Nun ist bei beliebiger Substitution U:

$$y(S^{-1} \cdot U(\omega)) = -\, y(U(\omega))$$

und da die Factorenanzahl des letzten Productes gerade ist, so folgt:

$$Y(\omega+1) = -\, y(\omega) \prod_{n=1}^{p-1} y(S^{-1}\, V_{ns,\,nt} S(\omega)).$$

Aber die Gruppe der $V_{ns,\,nt}$ ist ausgezeichnet, mithin sind die Substitutionen $S^{-1} V S$ von der Reihenfolge abgesehen mit V identisch, so dass

$$(3)\qquad Y(\omega+1) = -\, Y(\omega)$$

sein muss. In gleicher Weise findet sich:

$$(4)\qquad X(\omega+1) = \varepsilon^4 X(\omega),$$

so dass die Potenzen Y^2, X^3 rationale, hier sogar lineare Functionen des Hauptmoduls T werden:

$$Y^2 = \frac{aT+b}{cT+d}, \qquad X^3 = \frac{\alpha T+\beta}{\gamma T+\delta}.$$

Die Substitution von $\omega = i\infty$ giebt dann weiter:

$$Y^2 = aT + b, \quad X^3 = T,$$

sodass X und Y durch die folgende algebraische Relation mit einander verknüpft sind:

$$Y^2 = aX^3 + b. \tag{5}$$

Zum Schlusse zeigt man noch durch die gruppentheoretischen Resultate des vorhergehenden Paragraphen, dass in dem System der Moduln (1) sämmtliche Hauptmoduln aufgezählt sind, die zu der Gruppe $\Gamma_{6N(\varepsilon_i + \nu_i^{\varepsilon})}$ gehören.

Braunschweig, Ende April 1887.

Ueber einen Satz des Herrn Noether.

Von

L. Stickelberger in Freiburg i. Br.

Der Zweck dieser Note geht dahin, den von Herrn Voss (Bd. 27, S. 528—532 dieser Ann.) gegebenen Beweis des Noether'schen Fundamentalsatzes in Bd. VI, S. 351 der Annalen in einem Punkte weiter auszuführen, wo sich der Verfasser mit einer Andeutung begnügt hat. Die hierbei gebrauchten Sätze über Potenzreihen von zwei Veränderlichen, welche weniger bekannt zu sein scheinen, sind in § 1 zusammengestellt; § 2 behandelt eine Interpolationsaufgabe; in § 3 wird der Uebergang von den Noether'schen zu den Voss'schen Bedingungen durchgeführt, und damit der in Rede stehende Satz neu bewiesen. Veranlassung zur genaueren Ausführung dieser Betrachtungen gab ein Briefwechsel mit Herrn Noether, vorzüglich aber Besprechungen mit Herrn Lüroth, welcher selbst vor längerer Zeit den Noether'schen Satz in ähnlicher Weise bewiesen hat.

§ 1.

Hilfssätze aus der Functionentheorie.

Die im Folgenden zu benutzenden Hilfssätze über Potenzreihen von zwei Variabeln sollen hier kurz abgeleitet werden im Anschluss an die Abhandlung des Herrn Weierstrass „Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze" *).

1. Sei $\Phi(x, y) = \Phi$ eine in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ reguläre (holomorphe) Function der Veränderlichen x, y, welche also für kleine Werthe dieser Variabeln durch eine nach ganzen positiven Potenzen derselben fortschreitende convergente Reihe definirt wird. Für $x = 0$ möge diese Reihe mit dem Gliede ay^n beginnen, wo $n > 0$ und a eine von Null verschiedene Constante ist. Setzt man dann

*) Abhandlungen a. d. Functionentheorie S. 107 ff.

$$\Phi(x, y) = a y^n (1 + w),$$

so ist w eine Potenzreihe von x, y, $\frac{1}{y}$, welche aber für $x = 0$ sich auf eine solche von y allein, und zwar ohne constantes Glied, reducirt. Aus dieser Form von w ergiebt sich leicht die Möglichkeit, drei positive Grössen G, H, H_1 so zu bestimmen, dass $|w| < 1$ wird für $H_1 < |y| < H$, $|x| < G$; und zwar können alle drei Grössen beliebig *klein* angenommen werden, wiewohl sie nicht vollkommen unabhängig sind. In Folge dessen sind die Reihen

$$w - \tfrac{1}{2} w^2 + \tfrac{1}{3} w^3 - \cdots = \log(1 + w),$$

$$1 - w + w^2 - w^3 + \cdots = \frac{1}{1 + w}$$

für die genannten Werthe von x, y gleichmässig convergent, und können daher wieder als Potenzreihen von x, y, $\frac{1}{y}$ dargestellt werden, welche ebenfalls für $x = 0$ sich auf solche von y allein reduciren, deren constante Glieder resp. gleich 0 und 1 sind. In dem besonderen später vorkommenden Falle, wo $\Phi - a y^n$ ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in y darstellt, enthalten diese Reihen, abgesehen von dem Anfangsgliede der zweiten, nur negative Potenzen von y.

Wir verweilen zunächst bei der ersten Entwicklung, und schreiben

$$\log \Phi(x, y) = n \log y + \log a + \log(1 + w)$$

$$= n \log y + \sum_1^\infty X_\lambda y^{-\lambda} + \mathfrak{P}(x, y),$$

wo $\mathfrak{P}(x, y)$ wieder eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet. Daraus folgt sofort

$$\Phi(x, y)\, e^{-\mathfrak{P}(x,y)} = y^n\, e^{\sum X_\lambda y^{-\lambda}}.$$

Entwickelt man beiderseits die Exponentialgrössen in Potenzreihen, was keine weitere Beschränkung der Veränderlichen erfordert, so erhält man links eine gewöhnliche Potenzreihe, rechts eine solche, die keine höhere Potenz von y als die n^{te} enthält. Da aber die Coefficienten entsprechender Potenzen von y auf beiden Seiten gleich sein müssen, so reduciren sich in Wahrheit beide Reihen auf ein Polynom n^{ten} Grades in y, welches $\varphi(x, y)$ heisse. Für $x = 0$ wird dann $X_\lambda = 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ und folglich $\varphi(0, y) = y^n$. Hingegen wird $e^{\mathfrak{P}(x,y)} = \Omega(x, y)$ für $x = 0$, $y = 0$ den Werth a annehmen. Die erhaltene Gleichung

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y)\, \Omega(x, y) \tag{1}$$

gilt überhaupt für $|x| < G$, $|y| < H$, da negative Potenzen von y in ihr nicht vorkommen.

Es ist leicht zu zeigen, dass durch diese Eigenschaften die Functionen φ, Ω völlig bestimmt sind, dass sie also z. B. von der Wahl der Grössen G, H, H_1 nicht abhängen. Hat man nämlich eine andere derartige Zerlegung

$$\Phi = \varphi^* \Omega^*,$$

wo φ^* ein Polynom in y bedeutet, in welchem der Coefficient der höchsten Potenz von y gleich Eins ist, die folgenden Coefficienten hingegen reguläre durch x theilbare Functionen sind, während Ω^* als Function von x, y regulär ist und für $x = 0, y = 0$ nicht verschwindet, dann ist zunächst der Grad von φ^* gleich n, weil für $x = 0$

$$\frac{\Phi}{y^n} = \frac{\varphi^*}{y^n} \cdot \Omega^* = a + a_1 y + \cdots$$

sein muss. Ferner ist für alle hinreichend kleinen Werthe von x, y

$$\frac{\varphi^*}{\varphi} = \frac{\Omega}{\Omega^*}.$$

Nun kann man aber die oben für die Function Φ durchgeführten Betrachtungen in analoger Weise auf φ anwenden; bei geeigneter Beschränkung von x, y wird somit

$$\frac{1}{\varphi} = y^{-n} + X_1' y^{-n-1} + X_2' y^{-n-2} + \cdots,$$

$$\frac{\varphi^*}{\varphi} = 1 + X_1'' y^{-1} + X_2'' y^{-2} + \cdots,$$

während gleichzeitig der Quotient $\Omega : \Omega^*$ als Potenzreihe von x, y darstellbar ist. Durch Vergleichung entsprechender Coefficienten wird ersichtlich, dass sich beide Reihen auf das constante Glied 1 reduciren. Daher ist $\varphi^* = \varphi$, $\Omega = \Omega^*$.

Lässt man die Bedingung fallen, dass für $x = 0, y = 0$ Ω^* von Null verschieden sei, so lehren ähnliche Schlüsse, dass φ als ganze Function von y algebraisch theilbar sein muss durch φ^*.

Die soeben gebrauchte Entwicklung von $\frac{1}{\varphi}$ erhält man übrigens bei der oben angegebenen Definition von φ aus der Gleichung

$$\varphi^{-1} = y^{-n} e^{-\Sigma X_\lambda y^{-\lambda}}.$$

I. *Eine gewöhnliche Potenzreihe von x, y, welche für $x = 0$ mit der Potenz y^n beginnt, kann dargestellt werden als Product aus einem Polynom $\varphi(x, y) = y^n + X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \cdots + X_n$, dessen Coefficienten durch x theilbare Potenzreihen von x sind, in eine gewöhnliche Potenzreihe von x und y, welche für $x = 0, y = 0$ nicht verschwindet. Diese Zerlegung ist eine völlig bestimmte.*

Anm. Für unendlich kleine Werthe von x hat die Gleichung $\Phi = 0$ n gleiche oder ungleiche unendlich kleine Wurzeln, nämlich

die Wurzeln der algebraischen Gleichung $\varphi(x, y) = 0$; die ganzen symmetrischen Functionen derselben sind also reguläre Functionen von x. Bekanntlich zerfallen diese Wurzeln in Cyklen von solchen, welche bei Umkreisung von $x = 0$ sich ineinander umsetzen; jedem solchen Cyklus entspricht ein Divisor von $\varphi(x, y)$, welcher die nämliche Form wie φ hat, aber nicht weiter in Factoren derselben Art zerlegbar ist. Für die gegenwärtigen Betrachtungen kann jedoch von dieser Zerlegung und um so mehr von den Entwicklungen der Wurzeln selbst nach gebrochenen Potenzen von x abgesehen werden; ja man braucht die Wurzeln gar nicht in die Rechnung einzuführen.

2. Wir werden nunmehr untersuchen, wie weit eine zweite Potenzreihe $\Psi(x, y)$ mit Hilfe von $\Phi(x, y)$ reducirt werden kann unter Beschränkung auf kleine Werthe von x, y. Anstatt mit Φ operiren wir aber zunächst mit der vorhin definirten Function $\varphi(x, y)$, oder vielmehr mit einem Polynom

$$\varphi(x, y) = X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n,$$

dessen Coefficienten Potenzreihen von x und mit Ausnahme von X_0 durch x theilbar sind. Wir wählen die oben gebrauchten Grössen G, H, H_1 so, dass die Stelle $x = G$, $y = H$ dem Convergenzbereiche der Reihe Ψ oder doch dessen Begrenzung angehört. Dann ist $\frac{1}{\varphi}$ als Potenzreihe von $x, \frac{1}{y}$ und $\frac{\Psi}{\varphi}$ als solche von $x, y, \frac{1}{y}$ darstellbar. Trennt man ähnlich wie oben:

$$\frac{\Psi(x, y)}{\varphi(x, y)} = \sum \mathfrak{X}_\lambda y^{-\lambda} + \mathfrak{Q}_1(x, y),$$

so wird

$$\Psi(x, y) - \varphi(x, y)\, \mathfrak{Q}_1(x, y) = \varphi(x, y) \sum_1^\infty \mathfrak{X}_\lambda y^{-\lambda}.$$

Die schon zweimal angewandte Schlussweise lehrt, dass beide Seiten dieser Gleichung sich auf ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\psi(x, y)$ in y reduciren, also

$$\Psi(x, y) = \psi(x, y) + \varphi(x, y)\, \mathfrak{Q}_1(x, y) \tag{2}$$

gesetzt werden kann. Gäbe es eine zweite Darstellung dieser Art:

$$\Psi = \psi^* + \varphi \mathfrak{Q}_1^*,$$

so würde

$$(\psi - \psi^*) \frac{1}{\varphi} = \mathfrak{Q}_1^* - \mathfrak{Q}_1$$

sein, woraus in bekannter Weise $\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Q}$, $\psi^* = \psi$ folgte.

Die hiernach völlig bestimmten Functionen $\psi, \mathfrak{Q}_1$ nennen wir den *Rest* und *Quotienten* der Division von Ψ durch φ (für die Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$). Die Function Ψ heisst theilbar durch φ,

wenn der Quotient für kleine Werthe von x, y regulär ist; die Bedingung dafür ist nach dem Gesagten das identische Verschwinden des Restes. Nennt man ferner zwei Functionen Ψ_1, Ψ_2 congruent nach dem Modul φ, falls ihre Differenz durch φ theilbar ist, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung der Congruenz die Uebereinstimmung der Divisionsreste. Für diese Theilbarkeit und Congruenz gelten die gewöhnlichen Sätze über Addition, Subtraction und Multiplication.

Ist Ψ selbst ein Polynom m^{ten} Grades in y, so wird der Quotient Ω_1 ebenfalls ein Polynom, und zwar $m - n^{\text{ten}}$ Grades; er verschwindet für $m < n$. Für solche Polynome fällt also dieser Begriff der Theilbarkeit und Congruenz mit dem gewöhnlichen algebraischen zusammen.

Man kann einen Schritt weiter gehen und die hier betrachtete Congruenz (mod. φ) als eine solche nach dem Modul Φ auffassen; dabei ist Ψ als theilbar durch Φ anzusehen, wenn der Quotient $\Psi : \Phi$ als Potenzreihe von x, y darstellbar ist. In diesem Sinne sind die unter 1. betrachteten Functionen Φ, φ gegenseitig durcheinander theilbar; jede Function, die für kleine Werthe von x, y regulär ist und im Nullpunkte einen von Null verschiedenen Werth hat, ist als Einheit des betrachteten Gebietes aufzufassen.

In dem Falle, wo Φ ein Polynom m^{ten} Grades ist, kann man durch Reihenentwicklung des Quotienten $\Psi : \Phi$ mit Leichtigkeit ein Polynom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades finden, welches $\equiv \Psi$ (mod. Φ) ist. Dieser Rest kann zwar in manchen Fällen den früher definirten vom Grade $n-1$ vertreten; da er indessen durch die Gradbedingung bei weitem nicht bestimmt ist, so lässt sich auf ihn kein brauchbarer Theilbarkeitsbegriff basiren.

II. *In Bezug auf die unter* I. *charakterisirte Function* Φ *als Modul ist jede Potenzreihe von* x, y *congruent einer und nur einer solchen, welche keine höhere Potenz von* y *als die* $(n-1)^{\text{te}}$ *enthält.*

§ 2.

Die Hermite'sche Interpolationsformel.

Aus der Lehre von der Elimination einer Variabeln aus zwei ganzen rationalen Functionen derselben ist folgender Satz bekannt, welcher die Grundlage des Folgenden bildet:

Bedeuten φ, Φ, ψ Polynome in y von den Graden $n, m, m+n-1$, und ist die Resultante R der beiden ersten von Null verschieden, dann giebt es zwei völlig bestimmte Polynome χ, X der Grade $n-1$, $m-1$, welche die Gleichung

$$R\psi = \chi\Phi + X\varphi$$

identisch befriedigen; die Coefficienten derselben sind ganze Functionen von denen der gegebenen Polynome.

Ausserdem sei daran erinnert, dass die Resultante von φ mit dem Producte von mehreren Polynomen gleich ist dem Producte der Resultanten von φ mit den einzelnen Factoren dieses Productes.

Nun seien h Polynome $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$ von den Graden $n_1, n_2, \ldots, n_h$ gegeben; ferner werde

$$(1) \qquad \begin{gathered} n = n_1 + n_2 + \cdots + n_h, \\ \Phi = \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_h = \varphi_k \Phi_k, \quad (k = 1, 2, \cdots, h) \end{gathered}$$

gesetzt. Sind die Polynome φ_k theilerfremd, d. h. sind die Resultanten von je zweien derselben sämmtlich von Null verschieden, dann gilt dasselbe von der Resultante von φ_k mit Φ_k, welche wir durch R_k bezeichnen. Bedeuten daher $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_h$ beliebige Polynome vom Grade $n-1$, so kann man nach dem Vorhergehenden setzen

$$(2) \qquad R_k \psi_k = \chi_k \Phi_k + X_k \varphi_k.$$

Die durch die Gleichung

$$(3) \qquad \psi = \sum \frac{\chi_k}{R_k} \Phi_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

definirte Function ψ ist dann ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in y, welches die h Congruenzen

$$\psi \equiv \psi_k \,(\text{mod. } \varphi_k), \quad (k = 1, 2, \cdots, h)$$

befriedigt. In dem besondern Falle, wo die Functionen φ_k alle vom ersten Grade sind, reducirt sich die Gleichung (3) in Verbindung mit (2) auf die Lagrange'sche Interpolationsformel; im Hinblick auf die Arbeiten von Herrn Hermite*) möchte ich die Gleichung (3) als *Hermite'sche Interpolationsformel* bezeichnen.

III. *Sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$ theilerfremde Polynome in y von den Graden $n_1, n_2, \ldots, n_h$, ist $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_h$, sind ferner $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_h$ irgend welche Polynome $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, dann kann man ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ψ bilden, welches nach den h Moduln φ_k der Reihe nach den Functionen ψ_k congruent ist; die Coefficienten von ψ sind rational aus denen der gegebenen Polynome gebildet derart, dass der Nenner das Product der sämmtlichen Resultanten aus je zweien der Functionen φ_k darstellt.*

Durch die bisherigen Annahmen ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass eine, aber auch nur eine, der Functionen φ_k in Wirklichkeit von niedrigerem als dem angegebenen Grade sei; ist dies der Fall, so ist die in Satz III erwähnte Function durch die angegebenen Bedingungen nicht völlig bestimmt; setzt man hingegen voraus,

*) Crelle-Borchardt's Journal 84, S. 70 ff., sowie Cours d'Analyse I (1873), p. 265 ff.

dass jede der Functionen φ_k wirklich vom Grade n_k sei, dann giebt es keine andere Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche die h Congruenzen befriedigt.

Im Folgenden kommt der Fall in Betracht, wo die Coefficienten der Polynome φ_k, ψ_k für kleine Werthe von x reguläre Functionen von x und ausserdem für $x=0$ die Polynome selbst theilerfremd sind; dann sind auch die Polynome χ_k und die Resultanten R_k reguläre Functionen von x, und letztere durch x nicht theilbar; mithin ist auch ψ von gleicher Beschaffenheit wie die Functionen ψ_k.

§ 3.

Der Noether'sche Satz.

In den nächstfolgenden Erörterungen soll unter „Polynom" eine solche ganze rationale Function von y verstanden werden, deren Coefficienten gewöhnliche Potenzreihen von x sind, unter dem Grade eines Polynoms derjenige in Bezug auf y.

Sei $\Phi(x,y)$ ein Polynom n^{ten} Grades, in welchem der Coefficient von y^n durch x nicht theilbar ist. Setzt man

$$\Phi(0,y) = A(y-y_1)^{n_1}\cdots(y-y_h)^{n_h},$$

wo die Grössen $y_1 \ldots y_h$ von einander verschieden sind, so kann man nach § 1 ein Polynom $\varphi_k(x,y)$ finden, welches vom Grade n_k ist, in Φ aufgeht und für $x=0$ in $(y-y_k)^{n_k}$ übergeht, und zwar ist nach den dortigen Ausführungen die Theilbarkeit von Φ durch φ_k als algebraische aufzufassen. Die verschiedenen Polynome φ_k sind aber für $x=0$ und um so mehr für unbestimmtes x theilerfremd; mithin ist Φ durch das Product der φ_k theilbar; wir setzen

$$\Phi = Q\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_h.$$

Nun seien F, f zwei weitere Polynome von solcher Beschaffenheit, dass in der Nähe jedes der Punkte $x=0$, $y=y_k$

$$f = \Psi_k F + X_k\Phi \tag{1}$$

gesetzt werden kann, wo Ψ_k, X_k Potenzreihen von x, $y-y_k$ sind. Nach § 1 ist Ψ_k nach dem Modul φ_k congruent einem Polynom ψ_k vom Grade n_k-1 (oder auch, wenn man bloss mit Hilfe von Φ reducirt, einem solchen vom Grade $n-1$). Nach § 2 giebt es ferner ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ψ, welches den h Congruenzen $\psi \equiv \psi_k \equiv \Psi_k$ (mod. φ_k) genügt. Daraus folgt

$$f - \psi F \equiv f - \Psi_k F \equiv 0 \text{ (mod. } \varphi_k),$$

und diese Congruenz sagt aus, dass das Polynom $f-\psi F$ *algebraisch* theilbar ist durch φ_k. Wegen der Beschaffenheit der Polynome φ_k und der Function Q ist also jene Differenz durch Φ theilbar, und der

Quotient ein Polynom χ der hier betrachteten Art; es ergiebt sich somit

$$f = \psi F + \chi\Phi. \tag{2}$$

Macht man nun die Voraussetzung, dass die Polynome Φ, F für unbestimmtes x theilerfremd seien, so ist durch diese Gleichung nebst der Gradbedingung ψ völlig bestimmt, und man gewinnt den Satz:

IV. *Seien Φ, F, f Polynome in y, deren Coefficienten Potenzreihen von $x - x_0$ sind; die Resultante der beiden ersten sei für unbestimmtes x von Null verschieden, und der wirkliche Grad von Φ sowohl allgemein wie auch für $x = x_0$ gleich n. Bestimmt man dann ein Polynom $(n-1)^{ten}$ Grades ψ nebst einem andern χ derart, dass die Gleichung $f = \psi F + \chi\Phi$ identisch wird, dann werden die Coefficienten von ψ und χ ebenfalls gewöhnliche Potenzreihen von $x - x_0$ sein, wenn für jede zu $x = x_0$ gehörige Stelle $x = x_0$, $y = y_k$ zwei Potenzreihen Ψ_k, X_k von $x - x_0$, $y - y_k$ existiren, welche die Gleichung*

$$f = \Psi_k F + X_k\Phi$$

befriedigen.

Hierzu ist noch zu bemerken, dass für diejenigen der erwähnten Punkte, in welchen F von Null verschieden ist, f gar keiner Bedingung unterworfen ist, da man in diesem Falle $X_k = 0$ setzen kann.

Jetzt seien Φ, F, f ganze rationale Functionen von x und y; die beiden ersten seien theilerfremd, und n, m ihre wirklichen Grade in y. Bestimmt man die Polynome ψ, χ aus der Gleichung (2) mit der Bedingung, dass ψ vom Grade $(n-1)$ sei, so ergeben sich dieselben als rationale Functionen von x; als Nenner tritt zunächst die Resultante R von Φ und F in Bezug auf y auf, und ausserdem, wenn der Grad von f grösser als $m + n - 1$ ist, eine Potenz des Coefficienten von y^n in Φ. Wenn dieser Coefficient mit R keinen gemeinsamen Theiler hat, und wenn für alle Schnittpunkte der Curven $\Phi = 0$, $F = 0$, für welche x und damit auch y einen endlichen Werth hat, f die in Satz IV geforderte Eigenschaft besitzt, so sind die Coefficienten der Polynome ψ, χ regulär für alle diejenigen Werthe von x, welche $R = 0$ machen. Sie sind daher überall regulär, d. h. ganz, wenn entweder jener Coefficient constant oder f höchstens vom $(m+n-1)^{ten}$ Grade ist. Auf den ersten dieser Fälle kann aber bekanntlich jeder andere reducirt werden durch Einführung der Variabeln $s = x + cy$ an Stelle von x, wobei nur gewisse specielle Werthe von c auszuschliessen sind. Die Bedingungen für f erleiden durch diese Transformation keine Aenderung. Wendet man daher das eben gewonnene Resultat auf die transformirten Functionen an und substituirt rückwärts, so bleibt das Ergebniss bestehen mit der einzigen Aenderung, dass über die Grade der Functionen ψ, χ in Bezug auf y nichts be-

stimmtes mehr ausgesagt werden kann. Wir haben also den Satz des Herrn Noether gewonnen.

V. *Sind* Φ, F, f *ganze rationale Functionen von* x, y, *die beiden ersten ohne gemeinsamen Theiler, und lässt sich in der Umgebung jeder endlichen Stelle* x_0, y_0 f *in die Form* $\Psi\Phi + XF$ *bringen, wo* Ψ, X *Potenzreihen von* $x - x_0$, $y - y_0$ *bedeuten, dann kann* f *in die Form* $\psi\Phi + \chi F$ *gesetzt werden, wo* ψ, χ *ebenfalls ganze rationale Functionen bezeichnen.*

Die Bedingungen des Satzes beziehen sich in Wirklichkeit nur auf diejenigen Punkte, für welche Φ, F gleichzeitig verschwinden, da sie in allen übrigen von selbst erfüllt sind.

Wir kehren nochmals zu den Bedingungen des Satzes IV zurück. Nach dem Beweise, den wir gegeben haben, könnte die Gleichung (1) durch die Congruenz

$$f \equiv \Psi_k F \pmod{\varphi_k}$$

ersetzt werden. Benutzt ist in der That nur diese Congruenz, welche aber nicht weniger fordert als die frühere. Macht man speciell die Annahme, dass die Discriminante von Φ nicht identisch verschwindet, so sagt diese Congruenz aus, dass für die in der Nähe von x_0, y_k gelegenen Punkte der Curve $\Phi = 0$ die Gleichung $f = \Psi_k F$ bestehe, dass also nach der von Herrn Noether gewählten Terminologie der Quotient $f : F$ den Charakter einer ganzen Function von x, y habe. Der Satz V ist insofern allgemeiner als der ursprüngliche Noether'sche, als er die Discriminante von Φ keiner Beschränkung unterwirft.

Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Functionen.

Von

M. Noether in Erlangen.

Im VI. Bande dieser Annalen, pag. 351, habe ich die für eine algebraische Curve $f(x, y) = 0$ nothwendigen und hinreichenden Bedingungen untersucht, damit sich bei gegebenen rationalen ganzen Functionen $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ die ganze Function f in die Form setzen lässt:

$$f = A\varphi + B\psi,$$

wo A und B ebenfalls rationale ganze Functionen von x und y werden sollen. Diese Bedingungen waren:

Für jede Schnittstelle $x = x_0$, $y = y_0$ der beiden Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ muss f diejenige endliche Anzahl (α) von Bedingungsgleichungen erfüllen, welche aussagen, dass man f bis zu Gliedern beliebig hoher Dimension in $x - x_0$, $y - y_0$ hin mit einem Ausdruck

$$A'\varphi + B'\psi$$

identisch machen kann, wo A', B' ganze Functionen unbegrenzter Ordnung in $x - x_0$, $y - y_0$ (Potenzreihen) vorstellen.

Dabei wird die Zahl α der Bedingungsgleichungen gleich der Anzahl α der Schnittpunkte von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, welche in die Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ fallen. In meinem algebraischen Beweis des Satzes war von der Thatsache, dass die Potenzreihen A', B' *convergiren*, kein Gebrauch gemacht. —

Eine genauere Betrachtung dieses Beweises zeigt nun, dass derselbe als aus zwei Theilen bestehend aufgefasst werden kann:

a) aus einer Zurückführung des Satzes für den allgemeinsten Fall eines beliebig singulären Schnittes von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ auf den Satz für den „einfachen" Fall, in dem sich zwei Curven $\Phi = 0$, $\psi = 0$ an jeder Stelle, wo $\Phi = 0$ einen k-elementigen, $\psi = 0$ einen l-elementigen Punkt hat, nur in kl, und nicht mehr Punkten schneiden;

b) aus der Behandlung dieses einfachen Falles.

Da nun in neuester Zeit von Herrn Voss eine directe algebraische Behandlung dieses „einfachen" Falles*) geliefert wurde, welche ebenfalls nur die Erfüllung je der kl Bedingungsgleichungen für die Coefficienten von f voraussetzt, und da andrerseits die unter a) genannte Zurückführung auf diesen Fall äusserst einfach wird, so scheint es angemessen, dieselbe hier auch explicit durchzuführen. Dies ist der Inhalt des folgenden § 1.

Im § 1 seiner unten citirten Note giebt Herr Voss im allgemeinsten Fall ein engeres Criterium für die Darstellbarkeit von f in der Form $A\varphi + B\psi$, das zunächst noch weitere Bedingungen für f in sich zu schliessen scheint, als die oben genannten Bedingungsgleichungen meines Satzes; und verweist für den Uebergang von diesem Criterium zu dem meinigen auf meine Betrachtungen. Ich werde in § 2 den Beweis des Voss'schen Criteriums nochmals in etwas modificirter Form ausführen**), in § 3 die Möglichkeit jenes Ueberganges wenigstens für den „einfachen" Fall durch eine Discussion der linearen Bedingungsgleichungen für f in der That erweisen.

Man hat somit für meinen Satz im allgemeinsten Fall zwei neue Beweise: einen *rein* algebraischen (ohne Convergenzbetrachtungen), indem man mit dem § 2 der Voss'schen Note den folgenden § 1 verbindet, und einen gemischten durch Verbindung der folgenden drei Paragraphen.

§ 1.

Seien φ und ψ zwei ganze rationale Functionen von x, y ohne gemeinsamen Theiler, und sei R die Resultante in x von φ und ψ. Man hat dann zunächst eine Gleichung

$$R = C\varphi + D\psi, \tag{1}$$

wo C und D ganze rationale Functionen von x, y sind.

Vorausgesetzt werde:

a) eine solche Annahme des Coordinatensystems, dass wenn $x - x_0$ irgend ein Factor von R ist, alle zu $x = x_0$ gehörenden Elemente von $\psi = 0$ eine von der Geraden $x - x_0 = 0$ verschiedene Richtung haben (d. h. dass für keines dieser Elemente $\frac{dy}{dx}$ zu ∞ wird);

b) der zu beweisende in der Einleitung genannte Satz für den sogenannten „einfachen" Fall zweier Curven (s. Einleitung);

c) dass für jede endliche Schnittstelle $x = x_0$, $y = y_0$ der beiden Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ die ganze rationale Function f von x, y bis

*) Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen, im § 2. Mathem. Annalen, Bd. XXVII.

**) Veranlasst durch und gestützt auf einige gütige briefliche Bemerkungen des Herrn Stickelberger über den Umfang des Voss'schen Criteriums.

zu Gliedern beliebig hoher Gesammtdimension in $x - x_0$, $y - y_0$ hin mit einem Ausdruck

$$A'\varphi + B'\psi$$

identisch gemacht werden kann, wo A', B' ganze Functionen unbegrenzter Ordnung in $x - x_0$, $y - y_0$ vorstellen.

Ich will zuerst zeigen, dass eine Gleichung existirt der Form

$$Cf = AR + A\psi, \tag{2}$$

wo C die in (1) so bezeichnete Function ist, A und A ganze rationale Functionen von x, y sind.

In der That stehen die Curven R und ψ nach Annahme a) in der Beziehung des „einfachen" Falles und es gilt nach b) die Gleichung (2), wenn nur für jede endliche Schnittstelle von $R = 0$, $\psi = 0$ die für die Darstellung (2) von Cf nothwendige Entwicklung angebbar ist.

Nun hat man für eine Schnittstelle $x = x_0$, $y = y_0$ von $R = 0$, $\psi = 0$, in welcher $\varphi = 0$ ist, nach Voraussetzung c) bis zu Gliedern beliebig hoher Dimension hin eine Entwicklung

$$f = A'\varphi + B'\psi,$$

also nach (1):

$$Cf = A'C\varphi + B'C\psi = A'R + (B'C - A'D)\psi;$$

und für ein gemeinsames Werthsystem $x = x_0$, $y = y_i$ von $R = 0$, $\psi = 0$, in welchem φ von 0 verschieden ist, nach (1)

$$Cf = \frac{f}{\varphi} R - \frac{Df}{\varphi}\psi,$$

wobei auch $\frac{1}{\varphi}$, wegen $\varphi(x_0, y_i) \neq 0$, nach positiven ganzen aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$, $y - y_i$ entwickelt werden kann. Dies waren aber die Bedingungen für die Darstellung (2).

Aus (2) und (1) folgt jetzt

$$Cf = CA\varphi + (DA + A)\psi;$$

da aber, wegen Annahme a), die Function ψ mit C keinen Factor gemein haben kann, der ja nach (1) auch in R enthalten sein müsste, muss $DA + A$ durch C theilbar sein, und man hat daher die zu beweisende Darstellung

$$f = A\varphi + B\psi. \tag{3}$$

In Bezug auf die Ordnungen der beiden Curven A und B ist zu bemerken: Unter der Voraussetzung dass die Schnittstellen von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ nur auf endliche Werthsysteme von x und y führen, wird, wenn m, n, r die Ordnungen der Curven φ, ψ, f sind, R von der Ordnung mn und C in (1) von der Ordnung $mn - m$; ist dann durch Betrachtung des einfachen Falles gezeigt, dass AR in (2) von nicht

höherer Dimension als Cf angenommen zu werden braucht, so wird aus (2) die Curve A von der $(r-m)^{\text{ten}}$ Ordnung; ebenso B von der $(r-n)^{\text{ten}}$ Ordnung; so dass also auch bei Einführung homogener Coordinaten auf der linken Seite von (3) kein Factor hinzutritt.

§ 2.

Von den beiden gegebenen Polynomen m^{ter}, bez. n^{ter} Ordnung in x, y, φ und ψ, werde hier angenommen, dass sie keinen Factor gemein haben und dass y in φ in der m^{ten}, in ψ in der n^{ten} Potenz wirklich vorkommt. An Stelle einer Function f, von der r^{ten} Ordnung in x, y, kann man dann, durch Zufügung eines Ausdrucks der Form $L \cdot f\psi$, eine Function F betrachten, welche ebenfalls von der r^{ten} Ordnung in x, y ist, aber in y höchstens auf die $(m+n-1)^{\text{te}}$ Potenz steigt.

Das Voss'sche Criterium lautet dann:

Zur Darstellbarkeit von F in der Form

$$F = A\varphi + B\psi \tag{4}$$

ist nothwendig und hinreichend, dass in der Nähe jedes gemeinsamen Punktes $x = x_0$, $y = y_0$ von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ eine Entwicklung existirt:

$$F = a\varphi + b\psi, \tag{5}$$

wo a, b Polynome $(n-1)^{\text{ter}}$, bez. $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in y sind, deren Coefficienten Potenzreihen in $x - x_0$ mit ganzen positiven Potenzen sind.

Zunächst ist zu bemerken, dass die Gleichung (5), sobald sie für einen Bereich von x um x_0 und von y um y_0 erfüllt ist, zugleich für denselben Bereich von x, aber *alle* Werthe von y gilt, da y in (5) nur in endlicher Potenz eingeht. Die Annahme 5) erstreckt sich also *zugleich* auf *alle* etwaigen Schnittpunkte von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, die zu demselben Werth x_0 von x gehören.

Zum Beweis des Criteriums ist die bekannte Identität

$$RF = C\varphi + D\psi, \tag{6}$$

wo R die Resultante in x von φ und ψ, C und D Polynome in x, y sind, beizuziehen und mit (5) zu vergleichen. Die Grade von C und D in x, y werden bez. $n-1$ und $m-1$. Aus (5) und (6) folgt für die Werthe von x in der Nähe von x_0:

$$\left(\frac{C}{R} - a\right)\varphi + \left(\frac{D}{R} - b\right)\psi = 0,$$

wo auch $\frac{C}{R} - a$ nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$, $\frac{D}{R} - b$ vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grad in y ist. Da aber diese Gleichung für *alle* Werthe von y gilt und φ und ψ keinen Factor gemein haben sollen, wird nothwendig

$$\frac{C}{R} - a = 0, \quad \frac{D}{R} - b = 0,$$

für die Werthe von x um x_0, und für *alle* y. Dies sagt aus, dass die Coefficienten der Potenzen von y in C und D durch den Factor $(x-x_0)^\alpha$ von R theilbar sein müssen. Macht man also die Annahme (5) für jeden Factor von R, so werden C und D durch R theilbar, und es folgt aus (6) die Gleichung (4).

Auch hier folgt wieder, wenn alle Schnittstellen von $\varphi=0$, $\psi=0$ für endliche Werthsysteme von x, y stattfinden, aus (6) die Ordnung $r-m$ des Polynoms A, $r-n$ von B.

Noch ist zu bemerken, dass dieselben Schlüsse auch direct auf f, statt auf F, hätten angewandt werden können, indem man nur die Grade in y für a, b, C, D *endlich* annimmt.

§ 3.

Es ist nun zu zeigen, dass die in § 2, (5) vorausgesetzte Bedingung für F in der Nähe von $x=x_0$ immer erfüllt werden kann, sobald a) F den Bedingungsgleichungen genügt, welche sich aus einer Entwicklung in einer Schnittstelle $x=x_0$, $y=y_0$ von $\varphi=0$, $\psi=0$:

$$F = A'\varphi + B'\psi \tag{7}$$

ergeben, wo A', B' ganze Functionen unbegrenzter Ordnung in $x-x_0$ und $y-y_0$ vorstellen, und sobald b) für $x=x_0$ keine weitere Schnittstelle von $\varphi=0$, $\psi=0$ existirt, als $y=y_0$.

Zu diesem Zwecke ist nachzuweisen, dass nach Erfüllung der aus (7) folgenden Bedingungsgleichungen für F die in den Gliedern niedrigerer Dimension von A' und B' noch willkürlich bleibenden Coefficienten so gewählt werden können, dass A', B' mit den in y rationalen ganzen Functionen a, b von (5) zusammenfallen.

Dieser Nachweis soll aber hier nur für den „einfachen" Fall geführt werden, dass $\varphi=0$ in $x=x_0$, $y=y_0$ einen k-elementigen, $\psi=0$ einen l-elementigen Punkt hat, mit nur kl an diese Schnittstelle fallenden Schnittpunkten.

Ich ordne alle Functionen F, φ, ψ, A', B' nach aufsteigenden Dimensionen in $x-x_0$, $y-y_0$ und bezeichne die Glieder i^{ter} Dimension in $x-x_0$, $y-y_0$ bezüglich mit

$$F_i, \quad \varphi_i, \quad \psi_i, \quad a_i, \quad b_i,$$

den Coefficienten von $(x-x_0)^{i-\lambda}(y-y_0)^\lambda$ dieser Glieder mit

$$F_{i,\lambda}, \quad \varphi_{i,\lambda} \quad \psi_{i,\lambda}, \quad a_{i,\lambda}, \quad b_{i,\lambda}.$$

Wegen der Annahme des „einfachen" Falles verschwindet nicht die Resultante P der Glieder niedrigster Dimension in $x-x_0$, $y-y_0$ von φ und ψ, φ_k und ψ_l:

$$(8)\qquad P=\begin{vmatrix} \varphi_{k,0} & \varphi_{k,1} & \cdots & \varphi_{k,k} & & & & & & & \\ & \varphi_{k,0} & \cdots & \cdot & & \varphi_{k,k} & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{l,0} & \psi_{l,1} & \cdots & \cdot & & \cdot & & \psi_{l,l} & & & \\ & \psi_{l,0} & \cdots & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \psi_{l,l} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \neq 0,$$

wo P die aus l Reihen der $\varphi_{k,h}$ und k Reihen der $\psi_{l,h}$ bestehende Determinante ist; und wegen Annahme b) verschwindet nicht die Resultante Q der beiden Formen $(m-k)^{\text{ten}}$ und $(n-l)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\varphi_{k,k}+\varphi_{k+1,k+1}(y-y_0)+\cdots+\varphi_{m,m}(y-y_0)^{m-k},$$
$$\psi_{l,l}+\psi_{l+1,l+1}(y-y_0)+\cdots+\psi_{n,n}(y-y_0)^{n-l},$$

die aus φ und ψ vermöge $x=x_0$ entstehen:

$$(9)\qquad Q=\begin{vmatrix} \varphi_{k,k} & \varphi_{k+1,k+1} & \cdots & \varphi_{m,m} & & & & & & & \\ & \varphi_{k,k} & & \cdots & \cdot & & \varphi_{m,m} & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{l,l} & \psi_{l+1,l+1} & \cdots & \cdot & & \cdot & & \psi_{n,n} & & & \\ & \psi_{l,l} & & \cdots & \cdot & & \cdot & & \cdot & \psi_{n,n} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \neq 0,$$

wo Q die aus $n-l$ Reihen der $\varphi_{i,i}$ und $m-k$ Reihen der $\psi_{i,i}$ bestehende Determinante ist.

Jetzt betrachte ich die nach (7) zu erfüllenden Systeme:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} F_k = a_0\varphi_k, \\ F_{k+1} = a_1\varphi_k + a_0\varphi_{k+1}, \\ \vdots \\ F_{k+l-1} = a_{l-1}\varphi_k + a_{l-2}\varphi_{k+1} + \cdots + b_{k-1}\psi_l + b_{k-2}\psi_{l+1} + \cdots \end{cases}$$

$$(\alpha_\varrho)\qquad F_{k+l+\varrho} = a_{l+\varrho}\varphi_k + a_{l+\varrho-1}\varphi_{k+1} + \cdots + b_{k+\varrho}\psi_l + b_{k+\varrho-1}\psi_{l+1} + \cdots$$
$$(\varrho = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Gleichungen, welche durch Coefficientenvergleichung aus den Systemen (α) entstehen, bestimmen, nach Erfüllung der kl aus (α) für F entstehenden Bedingungen, die Grössen

$$a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}, \quad b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$$

eindeutig wegen (8).

In den Gleichungen (α_ϱ) ist nach Annahme des § 2 über F:

$$(10)\qquad F_{i,h} = 0 \quad \text{für} \quad h \geqq m+n;$$

ferner setze ich

$$(11)\qquad a_{i,h} = 0 \quad \text{für} \quad h \geqq n, \qquad b_{i,h} = 0 \quad \text{für} \quad h \geqq m,$$

und weise nach, dass die Systeme (α_ϱ) dann auch die Ausdrücke

$$a_i\,(i \geqq l), \quad b_i\,(i \geqq k)$$

eindeutig bestimmen.

Zu dem Zwecke ordne ich die zu bestimmenden Coefficienten zuerst in Systeme:

$$(\beta_\sigma) \quad a_{l+\sigma,l},\ a_{l+\sigma+1,l+1},\ \ldots,\ a_{n+\sigma-1,n-1},\ b_{k+\sigma,k},\ b_{k+\sigma+1,k+1},\ \ldots,\ b_{m+\sigma-1,m-1};$$

$$(\gamma_\sigma) \quad a_{l+\sigma,0},\ a_{l+\sigma,1},\ \ldots,\ a_{l+\sigma,l-1},\ b_{k+\sigma,0},\ b_{k+\sigma,1},\ \ldots,\ b_{k+\sigma,k-1};$$

$$(\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

und bestimme diese Systeme in der Ordnung:

$$(\beta_0),\ (\gamma_0),\ (\beta_1,\ (\gamma_1),\ \ldots,\ (\beta_\sigma),\ (\gamma_\sigma),\ \ldots$$

Ein System (α_ϱ) führt auf $k + l + \varrho + 1$ Gleichungen, welche linear sind in den Systemen (β) und (γ). Zur Bestimmung der $m + n - k - l$ Grössen (β_0) ist nun je die *letzte* der Gleichungen zu nehmen, welche sich aus den Systemen (α_ϱ) für

$$\varrho = 0, 1, \ldots m + n - k - l - 1$$

ergeben; nämlich die $m + n - k - l$ Gleichungen:

$$\begin{cases} F_{k+l,k+l} = a_{l,l}\varphi_{k,k} + a_{l-1,l-1}\varphi_{k+1,k+1} + \cdots \\ \qquad\qquad + b_{k,k}\psi_{l,l} + b_{k-1,k-1}\psi_{l+1,l+1} + \cdots \\ \cdots \\ F_{m+n-1,m+n-1} = a_{n-1,n-1}\varphi_{m,m} + b_{m-1,m-1}\psi_{n,n}. \end{cases}$$

Dieselben bestimmen die Grössen (β_0) eindeutig, weil die Determinante der Coefficienten derselben zu $Q \neq 0$ (Formel (9)) wird. Die letzten Gleichungen aus den weiteren Systemen (α_ϱ), für $\varrho \geqq m+n-k-l$, sind dann, wegen (10) und (11), identisch erfüllt.

Zur Bestimmung der $k + l$ Grössen (γ_0) dienen die $k + l$ übrigen Gleichungen des Systems (α_0):

$$F_{k+l,h} = a_{l,h}\varphi_{k,0} + a_{l,h-1}\varphi_{k,1} + \cdots b_{k,h}\psi_{l,0} + b_{k,h-1}\psi_{l,1} + \cdots,$$
$$(h = 0, 1, \ldots k+l-1)$$

mit der Determinante $P \neq 0$ (Formel (8)).

Zur Bestimmung der $m + n - k - l$ Grössen (β_1) hat man dann je die *vorletzten* der Gleichungen aus den Systemen (α_ϱ), für

$$\varrho = 1, 2, \ldots, m + n - k - l,$$

nämlich

$$\begin{cases} F_{k+l+1,k+l} = a_{l+1,l}\varphi_{k,k} + a_{l+1,l+1}\varphi_{k,k-1} + \cdots \\ \qquad\qquad + b_{k+1,k}\psi_{l,l} + b_{k+1,k+1}\psi_{l,l-1} + \cdots \\ \cdots \\ F_{n+n,m+n-1} = 0 = a_{n,n-1}\varphi_{m,m} + b_{m,m-1}\varphi_{n,n}, \end{cases}$$

mit der Determinante $Q \neq 0$; wonach alle weiteren vorletzten Gleichungen für $\varrho \geqq m + n - k - l + 1$ identisch erfüllt sind. Und zur Bestimmung der $k + l$ Grössen (γ_1) dienen die übrigen $k + l$ Gleichungen des Systems (α_1), mit der Determinante $P \neq 0$.

Ebenso hat man dann allgemein zur Bestimmung der $m+n-k-l$ Grössen (β_σ) je die $(\sigma+1)^{te}$, von rückwärts gezählt, der Gleichungen aus den Systemen (α_ϱ), von $\varrho = \sigma, \sigma+1, \ldots, m+n-k-l+\sigma-1$, mit der Determinante $Q \neq 0$, wonach auch alle $\sigma + 1$ letzten Gleichungen der weiteren Systeme identisch erfüllt sind; zur Bestimmung der $k + l$ Grössen (γ_σ) die übrigen $k + l$ ersten Gleichungen des Systems (α_σ), mit der Determinante $P \neq 0$.

Da dieser Process bis zu beliebig hohem σ hin fortgesetzt werden kann, so ist hiermit die Zulässigkeit der Annahme (11) erwiesen.

Erlangen, im Mai 1887.

Zur Theorie der Hesse'schen Determinante.

Von

A. Voss in München.

Das für die cubischen Formen f von p homogenen Variabelen charakteristische Verhalten, sich mit ihrer Hesse'schen Form H gegenseitig in der eigentlichen parabolischen Mannigfaltigkeit von f und H zu durchdringen, veranlasste mich zur Untersuchung derjenigen Covariante, durch deren Verschwinden für eine beliebige Form f ein parabolischer Punkt von f zugleich ein solcher von H wird. Die allgemeine Bildung der Form H_{H}, d. h. *der Hesse'schen Determinante von* H, scheint freilich weitläufig zu sein. Dagegen lässt sich, wenn $\mathsf{H}=0$ vorausgesetzt wird, diese Form in einer sehr übersichtlichen Weise darstellen, wie ich in der folgenden Note zu zeigen beabsichtige.

Ordnet man vermöge der Gleichungen

$$(1) \qquad \sum y_i f_{ik} = 0, \qquad k = 1, 2 \ldots p;\ p \gtrless 3,$$

aus denen

$$(2) \qquad \sigma y_i y_k = \mathsf{H}_{ik},$$

folgt — unter H_{ik} die ersten Unterdeterminanten von H verstanden — jedem Punkte x von H den correspondirenden Punkt y des Steiner'schen Gebildes S zu, so ist

$$(3) \qquad \sum Z_i \mathsf{H}_i = \sum Z_i \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i} \equiv \sum y_i y_k Z_l f_{ikl} = 0,$$

die Gleichung der linearen Tangentialmannigfaltigkeit von H im Punkte x. Damit sie stationär sei, muss

$$(4) \qquad \sum y_i y_k f_{iklm}\, dx_m + 2 \sum y_i dy_k f_{ikl} = \varrho \mathsf{H}_l; \quad l = 1, 2, \ldots p,$$

sein, falls zwischen den correspondirenden Differentialen dx, dy die Gleichungen

$$\sum y_i f_{ikl}\, dx_k + \sum dy_i f_{il} = 0; \qquad l = 1, 2 \ldots p;$$

$$\sum c_i\, dx_i = 0, \quad \sum a_i\, dy_i = 0$$

bestehen. Eliminirt man aus den p Gleichungen (4) und den letztgenannten $p+2$ die $2p$ Differentiale und ϱ, so erhält man nach Absonderung des Factors a_y die Bedingung

$$(5) \qquad C = \begin{vmatrix} w_{ik} & v_{ik} & c_i \\ v_{ik} & \frac{1}{2}f_{ik} & 0 \\ c_k & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. eine $2p+1$ reihige Determinante, welche aus den $3p^2$ Elementen

$$w_{ik} = \sum y_m y_n f_{ikmn},$$
$$v_{ik} = \sum y_m f_{ikm}, \quad f_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k};$$
$$i, k = 1, 2 \ldots p,$$

in der bezeichneten Weise zusammengesetzt ist und für beliebige Werthe der c_i verschwinden muss.*) Ich werde nun eine *Transformation* angeben, *durch welche dieselbe nicht allein von dem Factor c_x^2 befreit, sondern zugleich auf eine sehr einfache $p-2$ reihige Determinante reducirt wird, welche letztere als Ausdruck für die Form H_H unter der Voraussetzung $\mathsf{H}=0$ anzusehen ist, sobald man durch Multiplication mit der $p-1$. Potenz von σ die y nach* (2) *entfernt.*

Dazu betrachte man die Gleichung

$$(6) \qquad G = |f_{ik} + \lambda v_{ik}| = 0,$$

deren linke Seite auf die Gestalt

$$G = \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots + \lambda^{p-1} A_{p-1},$$

gebracht werden kann. Zu den $p-2$ von Null im allgemeinen verschiedenen Wurzeln λ_r, $r = 1, 2 \ldots p-2$, derselben gehören ebenso viele Systeme von Coordinaten

$$z_1^r, z_2^r, \cdots, z_p^r,$$

welche die Gleichungen

$$\sum z_i^r f_{ik} + \lambda_r \sum z_i^r y_s f_{sik} = 0; \qquad k = 1, 2 \ldots p$$

befriedigen. Die z^r genügen dabei den aus der Theorie der quadratischen Formen bekannten Relationen

---

*) Der Kern der Determinante C besteht aus den in der angegebenen Ordnung zu benutzenden Elementen der drei Determinanten

$$\left|w_{ik}\right|, \quad \left|v_{ik}\right|, \quad \left|\tfrac{1}{2}f_{ik}\right|;$$

man kann, ohne dass die folgenden Betrachtungen sich wesentlich ändern, die Elemente des Randes, welche der Einfachheit halber zum Theil gleich Null gewählt sind, durch zwei ganz beliebige Reihen von je $2p$ Grössen ersetzen.

$$(7)\qquad \sum z_i^r z_k^s f_{ik} = 0, \quad \sum z_i^r z_k^s v_{ik} = 0, \qquad r \lesseqgtr s;$$
$$\sum z_i^r f_i = 0, \qquad \sum z_i^r \mathsf{H}_i = 0,$$

während

$$(8)\qquad \sum z_i^r z_k^r f_{ik} + \lambda_r \sum z_i^r z_k^r v_{ik} = 0; \qquad r = 1, 2, \ldots p-2,$$

wird. Führt man ferner die Formen

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} f_{ik} & a_i \\ a_k & 0 \end{vmatrix} = -\sigma (a_y)^2,$$
$$\begin{vmatrix} v_{ik} & a_i \\ a_k & 0 \end{vmatrix} = -\tau (a_x)^2,$$

ein, so hat man nach (6)

$$(10)\qquad A_1 = \sigma \sum y_i y_k y_l f_{ikl} = \sigma Y,$$
$$A_{p-1} = n(n-1)\tau f;$$

ausserdem mag zur Abkürzung

$$(11)\qquad \sum z_i^r z_k^r f_{ik} = (r\,r),$$
$$\sum y_m y_n z_p^r z_q^s f_{mnpq} = [r\,s]; \qquad r, s = 1, 2 \ldots p-2,$$

gesetzt werden. Die oben erwähnte Transformation des Ausdruckes (5) besteht nun darin, *dass man denselben mit der vierten Potenz der zu* (6) *gehörigen Discriminante*

$$(12)\qquad \delta = (x\,y\,z^1\,z^2 \ldots z^{p-2}),$$

d. h. mit der Determinante der zu den p Wurzeln von (6) gehörigen Systeme von Coordinaten, *multiplicirt*. Führt man diese Operation so aus, dass man mit

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} x_i & 0 & 0 \\ y_i & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_i^{p-2} & 0 & 0 \\ 0 & x_i & 0 \\ 0 & y_i & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & z_i^{p-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

zweimal hinter einander multiplicirt, so ergiebt sich zufolge der Bedingungen (7) und (8)

$$(13)\qquad C\delta^4 = -\frac{n(n-1)}{2^{p-1}} c_x^2 f Y^2 \Delta\,(11)\,(22)\ldots(p-2, p-2),$$

womit C durch die $p-2$ reihige Determinante

$$(14)\qquad \Delta = \left| [rs] - 2(rs)\frac{\delta_{rs}}{\lambda_r^2} \right|$$

ausgedrückt ist, in der δ_{rs} das Kronecker'sche Zeichen bedeutet, so dass nur in der Hauptdiagonale die Elemente aus zwei Termen zusammengesetzt sind.

Es ist jetzt nur noch erforderlich, den Factor δ^4 auch rechterhand wieder auszusondern. Hierzu bemerke man, dass aus der leicht zu beweisenden Gleichung

$$\begin{vmatrix} f_{ik} & a_i \\ a_k & 0 \end{vmatrix} \delta^2 = -n(n-1) a_y^2 f\,(11)\,(22)\ldots(p-2, p-2),$$

nach (9) folgt

$$(15)\qquad \delta^2\sigma = n(n-1) f(11)\ldots(p-2, p-2).$$

Für eine *cubische Form* f, bei der sich Δ (14) auf das Product der Diagonalelemente

$$\frac{(-1)^{p-2} 2^{p-2} (11)\,(22)\cdots(p-2,\ p-2)}{(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{p-2})^2}$$

reducirt, hat man daher unmittelbar aus (13)

$$(16)\qquad \frac{C}{c_x^2} = (-1)^{p-1} 3\tau^2 f.$$

Dabei wird zugleich

$$\sigma^{p-1}\tau^2 = \frac{\sigma^{p-1}}{a_x^4} \begin{vmatrix} v_{ik} & a_i \\ a_k & 0 \end{vmatrix}^2 = \Sigma,$$

nach (2) *eine Covariante von der Ordnung* $(p+1)(p-3)$, *welche bei ungeradem* $p = 2k+1$ *das Quadrat der Form**) *ist, die für* $p = 3$ *bis auf einen numerischen Factor in die mit demselben Buchstaben bezeichnete Invariante der cubischen ternären Formen*

*) Bei geradem $p = 2k$ wird Σ eine Function ungerader Ordnung, welche erst durch Multiplication mit

$$-\begin{vmatrix} f_{ik} & c_i \\ c_k & 0 \end{vmatrix}$$

für $H = 0$ als Quadrat einer Function von der Ordnung $2k^2 - k - 2$ dargestellt werden kann; für $p = 4$ reducirt sich Σ, abgesehen von einem constanten Factor, auf das Product der fünf Pentaederebenen.

übergeht. Da die Gleichung (16) lediglich unter der Voraussetzung $\mathsf{H} = 0$ gewonnen ist, *so hat man für cubische Formen das allgemeine Resultat**)

$$\mathsf{H}_{\mathsf{H}} \equiv A\mathsf{H} + (-1)^{p-1}\, 3\Sigma f.$$

Aus der für jedes p gültigen und aus (7) und (8) folgenden Gleichung

$$\delta^2 |w_{ik}| = -(n-3)^2 Y^2 |[rs]|$$

ergiebt sich für eine *beliebige ternäre Form*, da sich die Determinante Δ für $p = 3$ auf ein einziges Element reducirt,

$$\frac{C}{c_x^2} = |w_{ik}| \frac{\sigma}{4(n-3)^2} + \frac{n(n-1)}{2} \tau^2 f;$$

mithin hat man, unter Einführung der Covarianten

$$U = \Big| \sum \mathsf{H}_{mn} f_{ikmn} \Big|, \quad S = -\frac{\sigma}{a_x^2} \begin{vmatrix} v_{ik} & a_i \\ a_k & 0 \end{vmatrix},$$

für ternäre Formen die folgende Darstellung

$$\mathsf{H}_{\mathsf{H}} \equiv A\mathsf{H} + \frac{U}{4(n-3)^2} + \frac{n(n-1)}{2} f S^2.$$

Um die Covariante S in symbolischer Form darzustellen, setze man

$$f = p_x^n = q_x^n = b_x^n = d_x^n,$$

so wird

$$\begin{vmatrix} v_{ik} & a_i \\ a_k & 0 \end{vmatrix} = -\frac{[n(n-1)(n-2)]^2}{2} p_y q_y p_x^{n-3} q_x^{n-3} (apq)^2.$$

Da ferner

$$\sigma p_y q_y = \frac{n^2(n-2)^2}{2} b_x^{n-2} d_x^{n-2} (pbd)(qbd),$$

so wird

$$a_x^2 S = \frac{[n(n-1)]^4 (n-2)^2}{4} p_x^{n-3} q_x^{n-3} b_x^{n-3} d_x^{n-3} \big(b_x d_x (apq)^2 (pbd)(qbd)\big).$$

Der eingeklammerte Ausdruck rechter Hand ist aber aus der Theorie der ternären cubischen Formen bekannt. In der That hat man, wenn derselbe durch P bezeichnet wird,**)

$$P = \frac{1}{6} a_x^2 (pbd)(pbq)(bdq)(pdq),$$

so dass

---

*) Ich vervollständige hierdurch die in meiner Notiz über cubische Formen von p Variabeln (Math. Ann. XXVII, S. 522) gemachten Angaben.

**) Vgl. Clebsch und Gordan, Theorie der cubischen ternären Formen, Math. Ann. VI, 447.

$$S = \frac{[n(n-1)]^4(n-2)^2}{24}(p_x q_x b_x d_x)^{n-3}(pbd)\,(pbq)\,(bdq)\,(pdq)$$

wird. Aus der Entwickelung von H_{H} folgt:

Ein gemeinsamer Punkt x der Curven $\mathsf{H} = 0$, $f = 0$ ist für beide ein Inflexionspunkt, wenn für denselben auch $U = 0$ ist, d. h. wenn die Polare $n-2$. Grades des zugeordneten Punktes y der Steiner'schen Curve in x selbst einen Wendepunkt hat. Insbesondere hat man für Curven vierter Ordnung:

Ein Wendepunkt der Curve vierter Ordnung ist zugleich Wendepunkt ihrer Hesse'schen Curve, wenn der zugehörige Punkt ihrer Steiner'schen Curve der Hesse'schen Curve angehört.

Man bestätigt diese Sätze leicht durch eine directe Betrachtung. Soll in einem gemeinsamen Punkte der Curven H und f eine stationäre Tangente von H vorhanden sein, so müssen die Gleichungen (4) bestehen. Da man aber im ternären Gebiete

$$dy_i = \alpha y_i + \beta x_i$$

setzen kann, weil die Gerade (xy) die Steiner'sche Curve in y berührt, so gehen dieselben über in

$$\sum y_i y_k f_{iklm}\,dx_m = (\varrho - 2\alpha)\,\mathsf{H}_l, \qquad l = 1, 2, 3$$

aus denen durch Elimination der dx_m sich sofort $U = 0$ ergiebt.

Für eine *quaternäre Form* hat man die aus vier Gliedern bestehende Entwickelung

$$\Delta = -\frac{|w_{ik}|\,\delta^2}{(n-3)^2 Y^2} - 2\frac{(11)}{\lambda_1^2}\sum z_i^2 z_k^2 w_{ik} - 2\frac{(22)}{\lambda_2^2}\sum z_i^1 z_k^1 w_{ik} + 4\frac{(11)\,(22)}{\lambda_1^2\lambda_2^2}.$$

Um nun aus sämmtlichen Gliedern der rechten Seite von (14) den Factor δ^4 zu entfernen, bemerke man, dass nach (15) und (10)

$$\sigma(11)\,(22)\,Y^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\delta^2\tau^2 n(n-1)f,$$

wird. Man hat ferner nach (7) und (8) vermöge des Multiplicationstheorems der Determinanten

$$\delta^2\begin{vmatrix} f_{ik} + \lambda_2 v_{ik} & \alpha_i \\ \alpha_k & 0 \end{vmatrix} = -n(n-1)fY(11)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\lambda_1 - \lambda_2)\,(\alpha_x)^2.$$

Setzt man also die Determinante linker Hand in der vorstehenden Gleichung, nach Potenzen von λ_2 entwickelt, gleich

$$-\left[\sigma\,\alpha_y^2 + \lambda_2\sum\alpha_i\alpha_k\mathsf{A}_{ik} + \lambda_2^2\sum\alpha_i\alpha_k\mathsf{B}_{ik} + \lambda_2^3\tau\,\alpha_x^2\right],$$

und

$$P = \sum y_i y_k w_{ik},$$

$$Q = \sum \mathsf{A}_{ik} w_{ik},$$

$$R = \sum \mathsf{B}_{ik} w_{ik},$$

so wird

$$\sum z_i^2 z_k^2 w_{ik} = \frac{\delta^2 \lambda_1}{n(n-1)f\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)(11)Y}(\sigma P + \lambda_2 Q + \lambda_2^2 R),$$

und hieraus nach (10)

$$\frac{(11)}{\lambda_1^2}\sum z_i^2 z_k^2 w_{ik} + \frac{(22)}{\lambda_2^2}\sum z_i^1 z_k^1 w_{ik} = -\frac{\delta^2}{\sigma Y^2}\left(\tau Q - \frac{RA_2}{n(n-1)f}\right).$$

Demnach ergiebt sich

$$\frac{C}{c_x^2} = \sigma\frac{|w_{ik}|}{8(n-3)^2} - \frac{1}{4}\left(Q\tau - \frac{RA_2}{n(n-1)f}\right) - \frac{n(n-1)}{2}\tau^2 f.$$

Dass R vermöge $\mathsf{H} = 0$ durch f theilbar wird, geht zwar aus dieser Formel selbst hervor, lässt sich aber auch leicht direct nachweisen. Setzt man nämlich

$$\mathsf{M} = |w_{ik} + \varrho v_{ik} + \varkappa f_{ik}|$$

so erkennt man, dass der Coefficient $\mathsf{M}_{\varkappa\varrho^3}$ von $\varkappa\varrho^2$, welcher gleich R ist, den Factor f enthält, aus der folgenden Gleichung

$$a_x^2\,\mathsf{M}_{\varkappa\varrho^3} = n(n-1)f\left(2(n-3)a_x a_y \tau - \begin{vmatrix} w_{ik}+\varrho v_{ik} & a_i \\ a_k & 0 \end{vmatrix}\right),$$

wobei in der Determinante rechter Hand der Coefficient von ϱ^2 zu nehmen ist.

Man übersieht zugleich, dass ganz ähnliche Umformungen sich für jedes p ausführen lassen, *und erhält so das allgemeine Resultat*

$$\mathsf{H}_\mathsf{H} \equiv A\mathsf{H} + U + (-1)^{p-1}\frac{n(n-1)}{2}f\Sigma,$$

in welchem Σ die unter (16) definirte und hinsichtlich ihres Verhaltens für $p = 2k$, $2k+1$, charakterisirte Covariante bedeutet, U dagegen die auf dem angegebenen Wege zu bildende Covariante ist, welche verschwinden muss, wenn ein Punkt der parabolischen Mannigfaltigkeit von f zugleich der parabolischen Mannigfaltigkeit von H angehören soll

München, im April 1887.

Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen.

(Erste Abhandlung.)

Von

MARTIN KRAUSE in Rostock.

Die Theorie der doppelt periodischen Functionen zweiter Art ist von Herrn Hermite*) aufgestellt worden. Er zeigt, dass dieselben sich sämmtlich auf Functionen der Form:

$$e^{\lambda z}\frac{\vartheta_3(v-b)}{\vartheta_3(v-a)}$$

in einer einfach angebbaren Weise reduciren lassen. Die Entwickelung dieser Primfunctionen in trigonometrische Reihen ist von Jacobi, Scheibner**), Hermite***) wirklich durchgeführt worden. Die Functionen dritter Art sind in neuester Zeit in einer Reihe wichtiger und interessanter Arbeiten behandelt worden, von denen die der H.H. Hermite†), Biehler††) und Appell†††) besonders hervorgehoben werden mögen. Die Resultate, die sich in diesen Arbeiten ergeben, sind in zusammenhängender und äusserst eleganter Weise in dem jüngst erschienenen ersten Bande des Werkes von Herrn Halphen*†) über die

*) Cf. Hermite. Note sur la théorie des fonctions elliptiques ajoutée à la 6e édition du Traité de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris 1885. Siehe auch Frobenius. Kronecker Journal Band 93.

**) Scheibner. Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form Leipzig 1879. Supplement dazu Leipzig 1880.

***) Hermite. Annales de l'école normale supérieure. 3e Série t. II. 1885.

†) Hermite. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris. 1861. II, 1862 II.

††) Biehler. Sur les développements en séries des fonctions doublement, périodiques de troisième espèce. Paris 1879.

Sur les fonctions doublement périodiques etc. Kronecker Journal. Band 88.

†††) Appel. Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Comptes rendus. 1883. Annales de l'école normale supérieure IIIe série tome I, II.

*†) Halphen. Traité des fonctions elliptiques. Paris 1886.

Theorie der elliptischen Functionen mitgetheilt worden. Es mögen diese Resultate kurz scizzirt werden.

Es zeigt sich, dass als Primfunctionen d. h. als solche, aus denen alle Functionen dritter Art zusammengesetzt werden können, die Functionen anzusehen sind:

$$(1) \qquad \Psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x^{mn} q^{mn(n-1)} \Theta(x q^{2n}),$$

wobei m positiv, q dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist und $\Theta(x)$ in folgender Weise zu specialisiren ist: Ist die zu untersuchende Function eine ganze transcendente, so lautet die Primfunction:

$$(2) \quad E_r(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^{mn+r} q^{mn(n-1)+2nr}, \quad r=0, 1, \cdots, m-1, \quad x = e^{\frac{\pi i(u-\omega)}{\omega}},$$

d. h. es ist:

$$\Theta(x) = x^r;$$

hat die Function mehr Nullstellen als Unendlichkeitsstellen und ist gebrochen transcendent, so lautet die Primfunction:

$$(3) \qquad F(u, v) = \frac{i\pi}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^{mn} q^{mn(n-1)} \frac{y}{x q^{2n} - y},$$

$$x = e^{\frac{\pi i(u-\omega)}{\omega}}, \qquad y = e^{\frac{\pi i(v-\omega)}{\omega}},$$

d. h. es ist:

$$\Theta(x) = \frac{i\pi}{\omega} \frac{y}{x-y}.$$

Hierbei ist x als Argument aufzufassen, während y Parameter ist.

Hat die Function mehr Unendlichkeitsstellen als Nullpunkte, so lautet die Primfunction ebenso, nur ist jetzt y als Argument, x als Parameter aufzufassen.

Auf Grund dieser Zerlegung ist es dann möglich, die Entwickelung einer ungemein grossen Anzahl von Functionen in trigonometrische Reihen wirklich durchzuführen, wie es besonders Herr Appell in den schon citirten Arbeiten gezeigt hat.

So elegant diese Methode ist, so besitzt sie doch einige Eigenschaften, die es nach verschiedenen Richtungen hin wünschenswerth erscheinen lassen, sie durch eine andere zu ersetzen.

Erstens ist die Behandlung der periodischen Functionen zweiter und dritter Art eine getrennte. Es kann das nicht in der Natur der Sache liegen, denn schliesslich können wir die Functionen zweiter Art als speciellen Fall der Functionen dritter Art ansehen, nämlich als den Fall, in welchem die Zahl der Nullpunkte gleich der Zahl der Unendlichkeitspunkte ist. Es fragt sich, ob es nicht Methoden

giebt, bei denen die Functionen zweiter und dritter Art unter demselben Gesichtspunkt betrachtet werden. Zweitens sind als Primfunctionen neue Functionen eingeführt, die in ihrer allgemeinen Gestalt bisher in der Theorie der elliptischen Functionen noch keine Verwendung gefunden haben und mit den bisher betrachteten in keinem einfachen Zusammenhang stehen. Es fragt sich, ob es nicht unter den bisher gebrauchten Functionen solche giebt oder aus ihnen solche unmittelbar hergeleitet werden können, welche dasselbe leisten, wie die neu eingeführten Grössen.

Dann aber kommt der Umstand hinzu, dass in demjenigen Falle, in welchem die Zahl der Nullpunkte kleiner als die der Unendlichkeitspunkte ist, die Primfunctionen nicht denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, wie die zu construirenden. Erst die additive Vereinigung mehrerer derselben führt bei richtiger Constantenbestimmung zu Functionen, die die gesuchten ersetzen können.

Ferner ist es bisher nicht möglich gewesen, analoge Primfunctionen im Gebiete der Functionen mehrerer Veränderlichen herzustellen. Herr Appell bemerkt ausdrücklich, dass ihm das nicht gelungen sei. Es fragt sich, ob diese Schwierigkeiten in der Natur der Sache liegen oder aber durch Schaffung anderer Primfunctionen gehoben werden können.

Hierzu tritt eine wirkliche Lücke für den Fall, dass die Zahl der Nullstellen grösser ist als die Zahl der Unendlichkeitsstellen. In den fertigen Formeln treten eine Anzahl unbekannter constanter Grössen als Factoren der Functionen $E_r(u)$ linear auf. Es wird nun zwar eine Methode angegeben, in welcher Weise diese Constanten zu bestimmen sind, aber diese Methode kommt im Wesentlichen auf die Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen heraus. Dieselbe ist daher sehr complicirt und im allgemeinen Falle unbrauchbar. Es fragt sich nun, ob es nicht möglich sein sollte, die Coefficienten in expliciter Form darzustellen und damit das Problem endgültig zu lösen, die Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Alle die aufgeworfenen Fragen sollen im Folgenden beantwortet werden. Die Beantwortung zerfällt in mehrere Theile.

Erstens soll gezeigt werden, dass für den Fall, in welchem die Zahl der Nullstellen grösser oder gleich der Zahl der Unendlichkeitsstellen ist, als Primfunctionen die Grössen:

$$\frac{\vartheta_3[k]\,(nv-b,\,n\tau)}{\vartheta_3(v-a,\,\tau)}$$

gewählt werden können: Diese Grössen sind der Transformationstheorie unmittelbar zu entnehmen.

In den allgemeinen Formeln treten dann eine Anzahl von Constanten linear auf. Die Bestimmung derselben stösst zunächst auf

dieselben Schwierigkeiten, wie die Bestimmung der entsprechenden Grössen in den Formeln des Herrn Appell. Es soll im zweiten Paragraphen gezeigt werden, dass in zwei Fällen die Bestimmung der Constanten unmittelbar in expliciter Form gegeben werden kann. Die Bestimmung erfolgt im ersten Falle auf Grund eines Additionstheorems, welches vom Verfasser*) aufgestellt worden ist, der zweite Fall führt zu den bekannten Resultaten von Herrn Hermite.

Die Bestimmung sämmtlicher Constanten in expliciter Form erfolgt dann im dritten Paragraphen. In demselben wird das ursprünglich gestellte allgemeine Problem auf eine neue Art in Angriff genommen, bei welcher die sämmtlichen Functionen zweiter und dritter Art unter *einem* Gesichtspunkt betrachtet werden. Es zeigt sich hierbei, dass als Primfunctionen die Grössen gewählt werden können:

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}\,\vartheta_3(nv,n\tau)$$

und

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}\,\frac{1}{\vartheta_3(nv,n\tau)};$$

es zeigt sich ferner, dass mit ihrer Hülfe das Problem der Darstellung der allgemeinen doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in expliciter Form unmittelbar gegeben werden kann. Dabei lassen die Functionen:

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}\,\vartheta_3(nv,n\tau)$$

sich unmittelbar in einfacher Weise auf die in den früheren Paragraphen behandelten Primfunctionen zurückführen, so dass *das Problem der allgemeinen Constantenbestimmung in expliciter Form damit völlig gelöst ist.* Diese Formeln stellen die naturgemässe Verallgemeinerung der Hermite'schen Formeln für den Fall der Functionen zweiter Art im Falle der Functionen zweiter und dritter Art dar und enthalten dieselben als speciellen Fall in sich.

Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, dass die neuen Primfunctionen im Gebiete der Functionen mehrerer Veränderlicher eine unmittelbare Verallgemeinerung zulassen.

Zur vollständigen Lösung des Problems die Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen zu entwickeln, ist es demnach nur nöthig dasselbe Problem für die aufgestellten Primfunctionen zu lösen. Es ist dieses mit Hülfe elementarer Methoden leicht möglich und kann u. a. auf die Multiplication zweier bekannter trigonometrischer Reihen reducirt werden.

---

*) Cf. Berichte der math. phys. Classe der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1886. Math. Annalen Band 27.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Unendlichkeitspunkte alle von einander verschieden sind. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass im allgemeinen Falle keine weiteren Schwierigkeiten eintreten.

§ 1.

Darstellung der Functionen zweiter und derjenigen Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der Nullstellen grösser als die Zahl der Unendlichkeitsstellen ist, durch die Primfunctionen $\vartheta_3[k](nv-b, n\tau) : \vartheta_3(v-a, \tau)$.

Es sei eine ganze transcendente Function der Veränderlichen:

$$x = e^{2\pi i v}$$

vorgelegt, welche den folgenden Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(v+1) &= f(v), \\ f(v+\tau) &= f(v)\, e^{-\pi i n(2v+\tau)-2w\pi i}. \end{aligned}$$

Eine solche Function, bei welcher n eine ganze positive Zahl bedeutet, während w beliebig gewählt sein kann, ist eine doppelt periodische dritter Art, welche im Endlichen keinen Unendlichkeitspunkt hat. Die Bedingungsgleichungen, denen sie Genüge leistet, sind nicht in der allgemeinsten Form gegeben, indessen braucht nicht hervorgehoben zu werden, dass hiermit keinerlei wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit des Problems eingetreten ist.

Derartige Functionen enthalten bekanntlich n von einander unabhängige Constanten linear in sich. Es genügt also n derartige Grössen zu kennen, um alle übrigen aus ihnen linear zusammensetzen zu können. In der Wahl dieser Primfunctionen herrscht eine grosse Willkür. Wir wollen zunächst die folgenden Functionen in Betracht ziehen, die sich unmittelbar aus denjenigen ergeben, die in neuester Zeit vor allem von Herrn Klein und seinen Schülern betrachtet worden sind und also lauten:

$$(2) \qquad \vartheta_3[k](nv+w, n\tau) = e^{-2\pi i k\left(v+\frac{w}{n}\right)+\frac{\pi i}{n}k^2\tau} \cdot \vartheta_3(nv+w-k\tau, n\tau).$$

Von unwesentlichen Unterschieden abgesehen stimmen dieselben mit den Grössen überein, die Herr Halphen durch $E_r(u)$ bezeichnet.

Es folgt dann leicht die Darstellung:

$$(3) \qquad f(v) = \sum_0^{n-1} c_k\, \vartheta_3[k](nv+w, n\tau),$$

wobei die Grössen c_k willkürliche Constanten bedeuten.

Die Darstellung kann aber noch in mannigfacher anderer Weise gegeben werden. Nehmen wir an, dass a_1 und a_2 zwei ganz beliebige Grössen sind, die nur nicht der Congruenz genügen:

$$a_1 \equiv a_2 \text{ mod. } m_1\tau + m_2$$

(m_1 und m_2 sind willkürliche ganze Zahlen, die nicht zu gleicher Zeit der Null gleich werden), so können wir die Grössen bilden

$$\vartheta_3(v - a_\varepsilon) \cdot \vartheta_3[k]\,((n-1)\,v + w + a_\varepsilon,\ (n-1)\,\tau), \quad \varepsilon = 1, 2.$$

Lassen wir k der Reihe nach die Werthe $0, 1, \cdots, n-2$ durchlaufen, so folgt leicht, dass wir unter den definirten Grössen immer n von einander linear unabhängige wählen können. Hieraus folgt die Richtigkeit der Gleichung:

$$(4)\quad f(v) = \sum_0^{n-2} c_k^{(1)}\vartheta_3(v-a_1)\cdot\vartheta_3[k]\,((n-1)\,v + w + a_1,\ (n-1)\,\tau) + c_k^{(2)}\vartheta_3(v-a_2)\cdot\vartheta_3[k]\,((n-1)\,v + w + a_2,\ (n-1)\,\tau).$$

Die Grössen $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ sind willkürliche Constanten. Wir können, wie nicht weiter auseinandergesetzt zu werden braucht, $(n-2)$ der Grössen $c_k^{(1)}$ oder auch der Grössen $c_k^{(2)}$ der Null gleich setzen, ohne der Allgemeinheit des Problems Abbruch zu thun.

In analoger Weise können wir weiter gehen. Sind a_1, a_2, a_3 drei willkürliche Grössen, von denen je zwei nicht einander nach dem Modul $m_1\tau + m_2$ congruent sein dürfen, so findet die Relation statt:

$$(5)\quad f(v) = \sum\sum_0^{n-3} c_k^{(\varepsilon,\varepsilon_1)}\vartheta_3(v-a_\varepsilon)\cdot\vartheta_3(v-a_{\varepsilon_1})\cdot\vartheta_3[k]((n-2)v+w+a_1+a_2,(n-2)\tau).$$
$$\varepsilon < \varepsilon_1,\ \varepsilon,\ \varepsilon_1 = 1, 2, 3.$$

Hierbei können je $n-3$ der Grössen $c_k^{(2,3)}$ und $c_k^{(1,3)}$ oder der Grössen $c_k^{(2,3)}$ und $c_k^{(1,2)}$ oder der Grössen $c_k^{(1,2)}$ und $c_k^{(1,3)}$ der Null gleich gesetzt werden, ohne der Allgemeinheit des Problems Abbruch zu thun. So können wir weiter gehen. Als letzten Fall wählen wir:

$$(6)\quad f(v) = \sum c^{(r)}\vartheta_3(v-a_1)\cdot\vartheta_3(v-a_2)\cdots\vartheta_3(v-a_{r-1})\cdot\vartheta_3(v-a_{r+1})\cdots(v-a_n)\cdot\vartheta_3(v+w+a-a_r)$$
$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Hierbei bedeuten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ beliebige Grössen, von denen niemals je zwei einander nach dem Modul $m_1\tau + m_2$ congruent sein können.

So erhalten wir n Darstellungen, die wir durch die Bezeichnungen, erste, zweite, $\cdots$, n^{te} von einander unterscheiden wollen.

Dividiren wir dann in der ersten Darstellung beide Seiten durch:

$$\vartheta_3(v - a_1),$$

in der zweiten durch:

$$\vartheta_3(v - a_1) \cdot \vartheta_3(v - a_2)$$

etc., in der n^{ten} durch:

$$\vartheta_3(v - a_1) \cdots \vartheta_3(v - a_n),$$

so erhalten wir in den $(n - 1)$ ersten Fällen auf den linken Seiten doppeltperiodische Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der im Endlichen gelegenen Unendlichkeitspunkte resp. gleich $1, 2, \cdots, n-1$ ist, also jedenfalls kleiner als die der Nullpunkte. Eine leichte Betrachtung zeigt, dass wir auf diese Weise zu den allgemeinsten Functionen der genannten Art gekommen sind oder doch zu Functionen, auf welche sich die allgemeinen unmittelbar reduciren lassen.

Die letzte Formel ergiebt die doppelt periodischen Functionen zweiter Art.

Wir finden somit den

Lehrsatz:

Die sämmtlichen doppelt periodischen Functionen zweiter Art und die sämmtlichen doppelt periodischen Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der Nullpunkte grösser ist als die Zahl der Unendlichkeitspunkte lassen sich linear aus den Functionen zusammensetzen:

$$\frac{\vartheta_3[k]\,(nv - b,\ n\tau)}{\vartheta_3(v - a,\ \tau)} \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Hierbei kann n eine jede ganze positive Zahl bedeuten, b und a dagegen sind völlig willkürlich. In den fertigen Formeln treten n unbekannte Constanten linear auf.

Die Bestimmung derselben kann durch Auflösung eines linearen Gleichungssystems erfolgen, indessen ist dieselbe praktisch als werthlos zu bezeichnen. Es soll im Folgenden eine Darstellung derselben in expliciter Form gegeben werden.

§ 2.

Wirkliche Bestimmung der Constanten im ersten und letzten der im vorigen Paragraphen behandelten Fälle.

Im ersten und letzten der im vorigen Paragraphen behandelten Fälle ist es nicht schwer die Constantenbestimmung in expliciter Form durchzuführen.

Im ersten Falle beruht die Bestimmung auf einem Additionstheorem, welches zuerst vom Verfasser aufgestellt worden ist,

Wie nicht näher auseinandergesetzt zu werden braucht, kommt das Problem, die allgemeine ganze transcendente doppelt periodische

Function dritter Art in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln, darauf hinaus: das Product

$$\prod_1^n \vartheta_3(v - b_k)$$

in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln, wobei $b_1, b_2, \cdots, b_n$ beliebige Grössen bedeuten.

Nehmen wir dazu an, dass $v_1, v_2, \cdots, v_n$ beliebige von einander unabhängige Argumente bedeuten und betrachten das Product:

$$P = \prod_1^n \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau), \tag{1}$$

so kann dasselbe noch in eine andere Form gebracht werden.

Dazu setzen wir:

$$v_\varepsilon' = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \cdots + a_{\varepsilon n} v_n, \quad \varepsilon = 1, \cdots, n \tag{2}$$

und lassen die ganzen Zahlen $a_{\varepsilon k}$ den Bedingungsgleichungen unterliegen:

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots + a_{\varepsilon n}^2 &= m_\varepsilon, \quad \varepsilon = 1, \cdots, n, \\ a_{\varepsilon 1} \cdot a_{k1} + \cdots + a_{\varepsilon n} \cdot a_{kn} &= 0, \quad \varepsilon \gtrless k, \end{aligned} \tag{3$_a$}$$

oder, was dasselbe sagt, den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{a_{1\varepsilon}^2}{m_1} + \frac{a_{2\varepsilon}^2}{m_2} + \cdots + \frac{a_{n\varepsilon}^2}{m_n} &= 1, \\ \frac{a_{1\varepsilon} \cdot a_{1k}}{m_1} + \cdots + \frac{a_{n\varepsilon} \cdot a_{nk}}{m_n} &= 0; \end{aligned} \tag{3$_b$}$$

so folgt:

$$P = \sum_k \prod_1^n \vartheta_3[k_\varepsilon]\,(v_\varepsilon', m_\varepsilon \tau), \tag{4}$$

wobei die Summe ausgedehnt ist über alle $k_1 \cdots k_n$ nach den Moduln $m_1, \cdots, m_n$, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$\begin{aligned} k_1 &\equiv a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + \cdots + a_{1n} r_n \bmod. m_1, \\ &\cdots\cdots \\ k_n &\equiv a_{n1} r_1 + a_{n2} r_2 + \cdots + a_{nn} r_n \bmod. m_n. \end{aligned}$$

Die Grössen $r_1 \cdots, r_n$ sind willkürliche ganze Zahlen.

In dieser Formel setzen wir an Stelle von $v_1 \cdots v_n$ resp. $v_1 - b_1, \cdots, v_n - b_n$. Die Grössen $v_1', \cdots, v_n'$ mögen dann übergehen in $v_1' - b_1', \cdots, v_n' - b_n'$, dann erhalten wir das Additionstheorem:

$$\prod_1^n \vartheta_3(v_\varepsilon - b_\varepsilon, \tau) = \sum_k \prod_1^n \vartheta_3[k_\varepsilon](v_\varepsilon' - b_\varepsilon', m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Summation in der angegebenen Weise zu nehmen ist.

Unterwerfen wir ferner die Zahlen $a_{\varepsilon k}$ den Bedingungsgleichungen:

$$(5) \qquad \begin{aligned} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} &= n, \\ a_{\varepsilon 1} + a_{\varepsilon 2} + \cdots + a_{\varepsilon n} &= 0, \quad \varepsilon > 1, \end{aligned}$$

so erhalten wir die Gleichung, wenn noch $v_1 = v_2 = \cdots = v_n$ gesetzt wird:

$$(6) \quad \prod_1^n \vartheta_3(v - b_\varepsilon, \tau) = \sum_k \vartheta_3[k_1](nv - b_1', n\tau) \cdot \prod_2^n \vartheta_3[k_\varepsilon](-b_\varepsilon', m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Summation in der angegebenen Weise zu nehmen ist. Damit ist die gesuchte Darstellung in expliciter Form gefunden, vorausgesetzt, dass die Grössen $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ gegeben sind. Die Bestimmung derselben im allgemeinen Falle ist aber von dem Verfasser in den citirten Arbeiten gegeben worden, so dass dieser erste Fall vollkommen erledigt ist.

Noch einfacher gestaltet sich die Sache im letzten Fall. In demselben war:

$$(7) \qquad \frac{f(v)}{\prod_1^n \vartheta_3(v - a_\varepsilon)} = \sum_1^n C^{(\varepsilon)} \frac{\vartheta_3(v + w + a - a_\varepsilon)}{\vartheta_3(v - a_\varepsilon)}.$$

Setzen wir hierin an Stelle von v der Reihe nach:

$$a_\varepsilon + \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2},$$

so erhalten wir die Constantenbestimmung in expliciter Form, wie es Herr Hermite angegeben hat.

§ 3.

Explicite Darstellung der allgemeinen doppelt periodischen Functionen dritter Art.

Es soll jetzt eine explicite Darstellung der doppelt periodischen Functionen dritter Art gegeben werden. Es geschieht das im wesentlichen durch passend gewählte Reduction auf das entsprechende Problem für doppelt periodische Functionen zweiter Art, welches wir als gelöst annehmen können. Die Möglichkeit dieser Reduction ist schon mehrfach bemerkt worden, insbesondere auch von Herrn Halphen. Derselbe weist sie aber zurück, weil sie erstens nicht

völlig bestimmt ist und zweitens nicht zu Reihenentwickelungen führe. Es soll gezeigt werden, dass diese Uebelstände mit leichter Mühe vermieden werden können. Dazu gehen wir von der Formel aus:

$$(1) \qquad \vartheta_3(nv, n\tau) = c \cdot \prod_0^{n-1} \vartheta_3\left(v + \frac{\varepsilon}{n}, \tau\right),$$

$$c = 2^{\frac{1-n}{3}} \frac{\vartheta_1'(0, \tau)^{\frac{n}{3}}}{\vartheta_1'(0, n\tau)^{\frac{1}{3}}} \cdot *)$$

Sei nun eine doppelt periodische Function dritter Art $f(v)$ vorgelegt, welche den Gleichungen (1) des ersten Paragraphen Genüge leistet und welche m Unendlichkeitspunkte, $n + m$ Nullpunkte besitzt, so bilden wir den Ausdruck:

$$(2) \qquad \frac{f(v) \cdot \vartheta_3(nv, n\tau)}{c \cdot \prod_0^{n-1} \vartheta_3\left(v + \frac{\varepsilon}{n}, \tau\right)} = F(v) \cdot \vartheta_3(nv, n\tau),$$

um in $F(v)$ eine doppelt periodische Function zweiter Art zu erhalten.

Es ergiebt sich somit der Satz:

Eine jede doppelt periodische Function dritter Art, welche mehr Nullpunkte als Unendlichkeitspunkte besitzt, kann als Product von $\vartheta_3(nv, n\tau)$ und einer doppelt periodischen Function zweiter Art dargestellt werden.

Genau so ergiebt sich:

Eine jede doppelt periodische Function dritter Art, welche mehr Unendlichkeitspunkte als Nullpunkte besitzt, lässt sich als Quotient einer Function zweiter Art und $\vartheta_3(nv, n\tau)$ darstellen.

Hieraus folgt, dass wir als Primfunctionen die Grössen erhalten:

$$(3) \qquad \frac{\vartheta_3(v-b)}{\vartheta_3(v-a)} \vartheta_3(nv, n\tau) \quad \text{und:} \quad \frac{\vartheta_3(v-b)}{\vartheta_3(v-a)} \frac{1}{\vartheta_3(nv, n\tau)}.$$

Die ersten lassen sich aber unmittelbar auf die Primfunctionen reduciren, die wir im ersten Paragraphen fanden. In der That, es gilt die Formel:

$$(4) \qquad \vartheta_3(x, n\tau) \cdot \vartheta_3(y, m\tau)$$
$$= \sum_0^{n+m-1} {}_\mu e^{\pi i(\mu^2 m\tau + 2\mu y)} \vartheta_3(ny - mx + nm\mu\tau, nm(n+m)\tau)$$
$$\cdot \vartheta_3(x + y + \mu m\tau, (n+m)\tau).$$

*) In dieser Formel ist n ungerade vorausgesetzt. Für ein gerades n besteht ein ähnlicher Ausdruck.

Diese Formel findet sich schon in der Habilitationsschrift von Herrn Schröter*). In Bezug auf dieselbe und ähnliche möge vor allem auf eine Arbeit von Herrn Rohde**) verwiesen werden.

In der aufgestellten Formel setzen wir an Stelle von $x : nv$, von $y : v - b$, von $m : 1$ um die Relation zu erhalten:

$$(5) \quad \vartheta_3(v-b,\tau)\cdot\vartheta_3(nv,n\tau)$$
$$=\sum_0^n{}^{\mu} e^{\pi i[\mu^2\tau+2\mu(v-b)]}\,\vartheta_3(-nb+n\mu\tau,\ n(n+1)\tau)$$
$$\cdot\vartheta_3((n+1)v-b+\mu\tau,\ (n+1)\tau)$$
$$=\sum_0^n{}^{\mu}\vartheta_3[-\mu n](-nb,\ n(n+1)\tau)$$
$$\cdot\vartheta_3[-\mu]((n+1)v-b,\ (n+1)\tau).$$

Damit ist die Reduction vollkommen erledigt. Setzen wir an Stelle von $\vartheta_3(v-b,\tau)\cdot\vartheta_3(nv,n\tau)$ den soeben gefundenen Ausdruck ein, so erhalten wir die explicite Darstellung aller Functionen dritter Gattung, bei denen $n > 0$ ist durch die Grössen:

$$\frac{\vartheta_3[k]\,(nv-b,n\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)},$$

d. h. die gesuchte explicite Bestimmung der sämmtlichen unbekannten Constanten des ersten Paragraphen. Fassen wir die Resultate zusammen, so finden wir den

Lehrsatz:

Die sämmtlichen doppelt periodischen Functionen, bei denen $n \geqq 0$ ist, lassen sich linear durch die Grössen:

$$\frac{\vartheta_3[k]\,(nv-b,n\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}$$

ausdrücken, die sämmtlichen Functionen, bei denen $n < 0$ ist, linear durch die Grössen:

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}\,\frac{1}{\vartheta_3(nv,n\tau)}.$$

Die in den Formeln auftretenden Constanten können in expliciter Weise bestimmt werden.

Damit ist das Problem der allgemeinen Entwickelung in trigonometrische Reihen darauf reducirt, die Primfunctionen durch derartige Reihen darzustellen. Es ist das nach mannigfachen Methoden möglich.

---

*) Schröter. Ueber die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten etc. Breslau 1855.

**) Rohde. Zur Transformation der Thetafunctionen. Grunert's Archiv 2te Serie, Band 9.

Diejenige, welche sich zuerst darbietet und elementar durchführbar ist, besteht im ersten Falle in der Multiplication der Reihen, welche für

$$\vartheta_3^{-}[k]\,(nv - b,\ n\tau) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\vartheta_3(v-a,\tau)}$$

aufgestellt sind, im zweiten Falle in der Multiplication der bekannten Reihen für:

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\vartheta_3(n\tau,\ n\tau)}.$$

Es soll hierauf bei anderer Gelegenheit näher eingegangen werden.

Den 2. Juni 1887.

Ueber die Singularitäten der Discriminantenfläche.

Von

David Hilbert in Königsberg.

Bezeichnen $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ die homogenen Punktcoordinaten eines n-dimensionalen Raumes, so lässt sich jedem Raumpunkte eine ganze rationale Function n^{ter} Ordnung der einen Variablen t:

$$X(t) = x_1 t^n + x_2 t^{n-1} + \cdots + x_{n+1}$$

zuordnen, während umgekehrt jede gegebene Function dieser Art einen bestimmten Punkt jenes Raumes festlegt. Dieser geometrischen Deutung gemäss ist:

$$X(t) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer Ebene, welche bei variablem Parameter t die sogenannte Discriminantenfläche:

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0 \tag{2}$$

einhüllt. Zur Aufzählung und Charakterisirung der vorhandenen Singularitäten dieser Fläche haben wir die Discriminante D der Gleichung (1) in der Nähe eines beliebigen Raumpunktes $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ zu entwickeln und legen zu diesem Zwecke die dem letzteren zugehörige ganze Function in der allgemeinsten Gestalt:

$$X(t) = (t-t_1)^{\mu_1}(t-t_2)^{\mu_2}\cdots(t-t_x)^{\mu_x} \quad \begin{cases} \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_x \geqq 1 \\ \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_x = n \end{cases} \tag{3}$$

zu Grunde. Setzen wir ferner:

$$Y(t) = y_1 t^n + y_2 t^{n-1} + \cdots + y_{n+1}$$

und entwickeln die n Wurzeln der Gleichung:

$$X(t) + \lambda Y(t) = 0$$

nach gebrochenen Potenzen von λ, wie folgt:

$$t = t_1 + \left[\frac{-Y(t_1)}{(t_1-t_2)^{\mu_2}\cdots(t_1-t_x)^{\mu_x}}\right]^{\frac{1}{\mu_1}}\lambda^{\frac{1}{\mu_1}} + \cdots,$$

. . . . . .

$$= t_2 + \left[\frac{-Y(t_2)}{(t_2-t_1)^{\mu_1}\cdots(t_2-t_x)^{\mu_x}}\right]^{\frac{1}{\mu_2}}\lambda^{\frac{1}{\mu_2}} + \cdots,$$

. . . . . .

$$= t_x + \left[\frac{-Y(t_x)}{(t_x-t_1)^{\mu_1}\cdots(t_x-t_{x-1})^{\mu_{x-1}}}\right]^{\frac{1}{\mu_x}}\lambda^{\frac{1}{\mu_x}} + \cdots,$$

. . . . . .

so ergiebt sich, von einem unwesentlichen Vorzeichen und Zahlenfactor abgesehen, für das Product sämmtlicher Wurzeldifferenzen der Werth:

$$D(x_1+\lambda y_1,\ x_2+\lambda y_2, \cdots, x_{n+1}+\lambda y_{n+1})$$

$$= \left[\frac{\lambda Y(t_1)}{(t_1-t_2)^{\mu_2}\cdots(t_1-t_x)^{\mu_x}}\right]^{\mu_1-1}\cdots\left[\frac{\lambda Y(t_x)}{(t_x-t_1)^{\mu_1}\cdots(t_x-t_{x-1})^{\mu_{x-1}}}\right]^{\mu_x-1}$$

$$\times (t_1-t_2)^{2\mu_1\mu_2}(t_1-t_3)^{2\mu_1\mu_3}\cdots(t_{x-1}-t_x)^{2\mu_{x-1}\mu_x} + \cdots$$

$$= [Y(t_1)]^{\mu_1-1}[Y(t_2)]^{\mu_2-1}\cdot\ \cdot[Y(t_x)]^{\mu_x-1}(t_1-t_2)^{\mu_1+\mu_2}(t_1-t_3)^{\mu_1+\mu_3}$$
$$\cdots(t_{x-1}-t_x)^{\mu_{x-1}+\mu_x}\lambda^{n-x} + \cdots$$

Versteht man andererseits unter $D_1, D_2, \cdots$ die Polaren der Discriminante D für den Punkt $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$, wie dieselben durch ein-, zwei- und mehrmalige Anwendung des Differentiationssymbols:

$$y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + y_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

aus der Discriminante D hervorgehen, so lehrt die Vergleichung der eben gewonnenen Entwickelung mit der Identität:

$$D(x_1+\lambda y_1, x_2+\lambda y_2, \cdots, x_{n+1}+\lambda y_{n+1}) = D + \lambda D_1 + \frac{\lambda^2}{2}D_2 + \cdots,$$

dass für den betrachteten Raumpunkt $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ die Discriminante D und ihre ersten $n-x-1$ Polaren $D_1, D_2, \ldots, D_{n-x-1}$ identisch verschwinden, während die $(n-x)^{te}$ Polare D_{n-x} für jenen Punkt in die beziehungsweise $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1, \ldots, \mu_x - 1$-fach zu zählenden Linearfactoren:

$$Y(t_1),\ Y(t_2), \ldots, Y(t_x)$$

zerfällt. Wie ebenfalls aus der obigen Entwickelung der Discriminante ersichtlich ist, gestattet das letztere Resultat eine Umkehrung. Wenn nämlich für einen Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ nicht nur die Discriminante D,

sondern zugleich auch ihre ersten $n - \varkappa - 1$ Polaren identisch verschwinden, so zerfällt die $(n-\varkappa)^{\text{te}}$ Polare dieses Punktes in $n - \varkappa$ lineare Factoren. Existiren unter diesen etwa je $\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \ldots, \mu_\varkappa - 1$ gleiche Factoren, so erhält die dem Punkte zugehörige Form $X(t)$ nothwendig die Gestalt (3). *Auf diese Weise ist mit alleiniger Hülfe der Discriminante D und deren Polaren eine hinreichende Unterscheidung und Charakterisirung der mannigfachen Ausartungen* (3) *einer binären Form* $X(t)$ *möglich**).

Aus den bisherigen Ueberlegungen folgt, dass die Discriminantenfläche (2) den betrachteten Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ $(n-\varkappa)$-fach durchsetzt und zwar je $(\mu_1 - 1), (\mu_2 - 1), \ldots, (\mu_\varkappa - 1)$-fach in der Richtung der bezüglichen Ebenen:

$$Y(t_1) = 0, \; Y(t_2) = 0, \ldots, Y(t_\varkappa) = 0.$$

Sämmtliche Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ derselben Art erfüllen auf der Discriminantenfläche ein $\varkappa$-fach ausgedehntes Gebilde, welches durch die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varkappa$ charakterisirt ist und daher kurz mit $S_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_\varkappa}$ bezeichnet werden möge. Um die Ordnung dieses Gebildes zu bestimmen, zählen wir seine Schnittpunkte mit den $\varkappa$ willkürlichen Ebenen:

$$\begin{aligned} &a_1^{(1)} x_1 + a_2^{(1)} x_2 + \cdots + a_{n+1}^{(1)} x_{n+1} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_1^{(\varkappa)} x_1 + a_2^{(\varkappa)} x_2 + \cdots + a_{n+1}^{(\varkappa)} x_{n+1} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Führen wir zu dem Zwecke in den Ausdruck (3) für die Potenzen von t der Reihe nach die Werthe ein:

$$\begin{aligned} &t^n = a_1^{(1)}, \; t^{n-1} = a_2^{(1)}, \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &t^n = a_1^{(\varkappa)}, \; t^{n-1} = a_2^{(\varkappa)}, \ldots \end{aligned}$$

ein Verfahren, welches einer mehrfachen Polarisirung der entsprechenden $\varkappa$ Formen gleichkommt, so ergeben sich $\varkappa$ Gleichungen von der Gestalt:

$$\begin{aligned} &X_1(t_1, t_2, \cdots, t_\varkappa) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &X_\varkappa(t_1, t_2, \cdots, t_\varkappa) = 0, \end{aligned}$$

wo die $\varkappa$ zu bestimmenden Grössen $t_1, t_2, \ldots . t_\varkappa$ auf der linken Seite

*) Um diese Unterscheidung herbeizuführen, genügen bereits die von Sylvester construirten Evectanten der Discriminante, welche aus unseren Polaren vermöge der Substitution:

$$y_1 = t^n, \; y_2 = \binom{n}{1} t^{n-1}, \cdots, y_{n+1} = 1$$

entstehen und daher selbst nichts anderes als Polaren der Discriminantenfläche in Bezug auf Punkte der Normcurve sind; vergl. Sylvester, On a remarkable theorem in the theory of equal roots and multiple points. Philosophical Magazine ser. IV, t. 3. 1852.

bezüglich in den Graden $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_x$ auftreten. Die Zahl der wesentlich verschiedenen Lösungen dieses Gleichungssystems und mithin *die Ordnung des in Rede stehenden singulären Gebildes der Discriminantenfläche ist:*

$$(5) \qquad \frac{x!}{\Pi i!}\, \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_x,$$

wo das im Nenner stehende Product über alle diejenigen Zahlen i auszuführen ist, welche angeben, wie oft in der Zahlenreihe:

$$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_x$$

dieselbe Zahl wiederkehrt. Das Gebilde $S_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_x}$ ist nur ein bestimmter Theil desjenigen zerfallenden Gebildes, welches durch die $n-x-1^{te}$ Polarfläche aus der Discriminantenfläche ausgeschnitten wird. Die Gesammtordnung der letzteren ist demnach gleich der Summe aller jener einzelnen Ordnungen (5) und es ergiebt sich nach Ausführung dieser Summation *für die Gesammtordnung des x-fach ausgedehnten singulären Gebildes der Discriminantenfläche der einfache Werth:*

$$(6) \qquad \frac{(n+x-1)(n+x-2)\cdots(n-x+1)}{(2x-1)!}.$$

Beispielsweise entsteht durch Projection in den dreidimensionalen Raum aus der Discriminantenfläche eine abwickelbare Fläche mit einer gewöhnlichen Doppelcurve S_{22} von der Ordnung $2(n-2)(n-3)$ und der Rückkehrcurve S_3 von der Ordnung $3(n-2)$. Die Doppelcurve enthält $\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)$ Punkte S_{222}, in welchen sich die Fläche nach drei getrennten Richtungen hin durchsetzt. Auf der Doppelcurve und Rückkehrcurve gleichzeitig liegen $6(n-3)(n-4)$ Punkte S_{23} mit einer getrennten und zwei zusammenfallenden Tangentialebenen, sowie ferner $4(n-3)$ Punkte S_4 mit drei zusammenfallenden Tangentialebenen. Besitzt der dreidimensionale Projectionsraum keine specielle Lage, so sind hiemit die Singularitäten unserer Fläche erschöpft und, wie man sieht, beträgt die Gesammtzahl ihrer singulären Punkte in Uebereinstimmung mit dem allgemein angegebenen Werthe (6):

$$\frac{2}{3}(n-2)(n-3)(2n-5).$$

Die x Gleichungen (4) definiren in unserem n-dimensionalen Raume eine $(n-x)$-fach ausgedehnte lineare Punktmannigfaltigkeit. *Die gefundene Zahl* (5) *giebt daher auch gleichzeitig an, wie viel Formen von der Ausartung* (3) *in einer vorgelegten $(n-x)$-fach unendlichen Formenmannigfaltigkeit vorkommen.* So liefert beispielsweise die Annahme:

$$\mu_1 = n - x + 1, \; \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_x = 1$$

die Zahl $x(n-x+1)$ derjenigen binären Formen der Mannigfaltig-

keit, welche einen Linearfactor $(n - \varkappa + 1)$-fach enthalten. In der That stimmt diese Zahl mit der Ordnung der Jacobi'schen Covariante der vorgelegten Formenmannigfaltigkeit überein.

Für:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_\varkappa = \mu = \frac{n}{\varkappa}$$

ergiebt sich die Zahl der in einer $(n - \varkappa)$-fach unendlichen Formenmannigfaltigkeit enthaltenen vollständigen μ^{ten} Potenzen gleich $\mu^\varkappa$, womit ein allgemeiner von Franz Meyer ausgesprochener Satz*) über die linearen Beziehungen zwischen gleichhohen Potenzen binärer Formen bestätigt wird.

Königsberg i. Pr., den 2. Juni 1887.

---

*) Vergl. Apolarität und rationale Curven. Tübingen, 1883, pag. 350 β).

Die Discriminante der binären Form 6. Ordnung.

Von

Giovanni Maisano in Messina.

In meiner Abhandlung *la Sestica binaria* (Atti della R. Accademia dei Lincei vol. XIX, 3 Febbraio 1884) habe ich die Discriminante der Form 6. Ordnung benutzt, welche Prof. Brioschi in den *Annali di Matematica* berechnet hat. Es scheint mir jedoch der dort angewendeten Methode entsprechender, dieselbe Discriminante durch symbolische Rechnung darzustellen, und hierbei stütze ich mich auf die Resultate, die Prof. Gordan für die Resultante zweier binären Formen 5. Ordnung entwickelt hat*).

Einleitung.

Stellen wir eine binäre Form 6. Ordnung symbolisch durch:

$$f = a_x^5 = b_x^5 = \cdots$$

dar, so ist bekanntlich ihre Discriminante, die wir mit D_f bezeichnen wollen, gleich der Resultante zweier Gleichungen:

$$a_x^5 a_1 = 0, \quad \text{und} \quad a_x^5 a_2 = 0.$$

Die Formeln für die Berechnung der Resultante $R_{\varphi\psi}$ zweier binären Formen 5. Ordnung:

$$\varphi = a_0 x_1^5 + 5a_1 x_1^4 x_2 + 10a_2 x_1^3 x_2^2 + 10a_3 x_1^2 x_2^3 + 5a_4 x_1 x_2^4 + a_5 x_2^5,$$

$$\psi = \alpha_0 x_1^5 + 5\alpha_1 x_1^4 x_2 + 10\alpha_2 x_1^3 x_2^2 + 10\alpha_3 x_1^2 x_2^3 + 5\alpha_4 x_1 x_2^4 + \alpha_5 x_2^5,$$

nach der Methode Gordan's (Math. Annalen Bd. III, S. 389), sind folgende:

*) Hr. Gordan hat selbst, wie er mir brieflich mittheilt, die Discriminante der binären Form 6. Ordnung, aber nach wesentlich anderer Methode, berechnet; vergl. Sitzungsberichte der Erlanger phys. med. Gesellschaft vom Jahre 1885.

$$\varrho = 5(\varphi\psi), \quad \sigma = \frac{25}{12}(\varphi\psi)^3, \quad \tau = \frac{5}{3}(\varphi\psi)^5,$$

$$\overline{A} = (\varrho\varrho)^4 + \frac{3}{7}(\varrho\sigma)^2 - \frac{1}{10}\varrho\cdot\tau - \frac{18}{49}\sigma^2, \quad \overline{B} = -(\varrho\sigma)^3,$$

$$\overline{C} = -\frac{2}{7}(\varrho\varrho)^6 - \frac{1}{49}(\varrho\sigma)^4 - \frac{27}{343}(\sigma\sigma)^2 + \frac{9}{70}\sigma\cdot\tau,$$

$$\overline{D} = (\varrho\varrho)^6 - \frac{3}{7}(\varrho\sigma)^4 + \frac{45}{49}(\sigma\sigma)^2 - \frac{3}{10}\sigma\cdot\tau,$$

$$E = \frac{1}{30}(\varrho\varrho)^8 - \frac{3}{70}(\sigma\sigma)^4 - \frac{1}{100}\tau^2,$$

$$\Theta = \frac{\overline{D}^2}{6} - \frac{\overline{C}^2}{6} - (\overline{A}\overline{A})^4 - 2(\overline{A}\overline{B})^3 - 2(\overline{A}\overline{C})^2 - 2\overline{A}_1 E + \frac{3}{4}(\overline{B}\overline{B})^2 + (\overline{B}\overline{C}),$$

$$R_{\varphi\psi} = (\Theta\varrho)^8.$$

In unsrem Fall ist:

$$\varphi = a_x^5 a_1, \quad \psi = a_x^5 a_2,$$

und also:

$$\varrho = 5(ab)\,a_x^4 b_x^4 a_1 b_2 = \frac{5}{2}(ab)^2 a_x^4 b_x^4 = \frac{5}{2}H,$$

$$\sigma = \frac{25}{12}(ab)^3 a_x^2 b_x^2 a_1 b_2 = \frac{25}{24}(ab)^4 a_x^2 b_x^2 = \frac{25}{24}i,$$

$$\tau = \frac{5}{3}(ab)^5 a_1 b_2 = \frac{5}{6}(ab)^6 = \frac{5}{6}A.$$

§ 1.

Berechnung der Formen $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, E.

Bei Anwendung der folgenden Beziehungen:*)

(1) $$(HH)^4 = \frac{2}{3.7}l\cdot f + \frac{5^2}{2.3.7^2}i^2 - \frac{1}{3.5}A\cdot H,$$

(2) $$(HH)^6 = \frac{1}{2.3.7}A\cdot i + \frac{2.5}{7^2}\Delta,$$

(3) $$(HH)^8 = -\frac{5}{7}B + \frac{2}{3.5}A^2,$$

(4) $$(Hi)^2 = \frac{1}{2.3}f\cdot l - \frac{5}{2.3.7}i^2,$$

(5) $$(Hi)^3 = -\frac{1}{2}(al)\,a_x^5 l_x = -\frac{1}{2}\delta,$$

(6) $$(Hi)^4 = \frac{2}{7}\Delta + \frac{2}{3.5}A\cdot i$$

erhält man:

*) Vgl. Cap. II, § 3 der angedeuteten Abhandlung.

$$(7) \qquad \overline{A} = \frac{5}{2^5}(5l \cdot f - 4A \cdot H),$$

$$(8) \qquad \overline{B} = \frac{5^3}{2^5 \cdot 3}(al)\, a_x^5 l_x,$$

$$(9) \qquad \overline{C} = \frac{5^3}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7}(2A \cdot i - 3 \cdot 5\Delta),$$

$$(10) \qquad \overline{D} = -\frac{5^2}{2^6 \cdot 3}(2A \cdot i - 3 \cdot 5\Delta) = -\frac{3 \cdot 7}{5}\overline{C},$$

$$(11) \qquad E = \frac{1}{2^7 \cdot 3}(2^3 A^2 - 3 \cdot 5^2 B).$$

§ 2.

Berechnung der Form $(\overline{AA})^4$.

Nach der von Gordan gegebenen Reihenentwickelung (Ueber das Formensystem binärer Formen S. 7), hat man für die Form $a_x^4 a_y^2 l_y^2$ die nach Potenzen von (xy) fortschreitende Reihe:

$$a_x^4 a_y^2 l_y^2 = \varphi_x^4 \varphi_y^4 + (xy) \cdot [(al) a_x^5 l_x]_{y^3} + \frac{2}{7} \cdot (xy)^2 [(al)^2 a_x^4]_{y^2},$$

wobei

$$a_x^6 l_x^2 = \varphi_x^8$$

gesetzt ist.

Man hat ähnlicherweise für die Form $(al) a_x^3 a_y^2 l_y$:

$$(al) a_x^3 a_y^2 l_y = \delta_x^3 \delta_y^3 + \frac{1}{2} \cdot (xy)\, [(al)^2 a_x^4]_{y^2},$$

und es entsteht somit:

$$a_x^4 a_y^2 l_y^2 = \varphi_x^4 \varphi_y^4 + (xy) \cdot (al) a_x^3 a_y^2 l_y - \frac{3}{14}(xy)^2 \cdot [(al)^2 a_x^4]_{y^2},$$

oder, wenn man die Formel

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A \cdot i$$

anwendet,

$$(12) \quad a_x^4 a_y^2 l_y^2 = \varphi_x^4 \varphi_y^4 + (xy) \cdot (al) a_x^3 a_y^2 l_y - \frac{3}{7}(xy)^2 \cdot \Delta_x^2 \Delta_y^2 - \frac{1}{14}(xy)^2 \cdot A \cdot i_x^2 i_y^2.$$

Entwickelt man die Form $a_y^3 a_x^3 l_x^2$ in Reihen, so erhält man:

$$a_y^3 a_x^3 l_x^2 = \varphi_x^5 \varphi_y^3 - \frac{3}{4}(xy) \cdot \delta_x^4 \delta_y^2 + \frac{1}{7}(xy)^2 \cdot [(al)^2 a_x^4]_y.$$

Die Form $\delta_x^4 \delta_y^2$ auf der rechten Seite kann hier, nach der Formel

$$(al) a_x^3 a_y^2 l_x = \delta_x^4 \delta_y^2 - \frac{1}{3}(xy) \cdot [(al)^2 a_x^2]_y,$$

durch

$$(al) a_x^3 a_y^2 l_x + \frac{2}{3}(xy) \cdot \Delta_x^3 \Delta_y + \frac{1}{9}(xy) \cdot A \cdot i_x^3 i_y$$

ersetzt werden; mithin ist:

$$(13)\quad a_y^3 a_x^3 l_x^2 = \varphi_x^5 \varphi_y^3 - \frac{3}{4}(xy)\cdot(al)a_x^3 a_y^2 l_x - \frac{3}{14}(xy)^2\cdot\Delta_x^3\Delta_y - \frac{1}{28}(xy)^2\cdot A\cdot i_x^3 i_y.$$

Ebenso, wenn man die Form $a_x^6 l_y^2$ in Reihen entwickelt, erhält man nach der Relation:

$$(al)a_x^5 l_y = \delta_x^5\delta_y + \frac{5}{6}(xy)\cdot(al)^2 a_x^4,$$

$$(14)\quad a_x^6 l_y^2 = \varphi_x^6\varphi_y^2 + \frac{3}{2}(xy)\cdot(al)a_x^5 l_y - \frac{15}{14}(xy)^2\cdot\Delta - \frac{5}{28}(xy)^2\cdot A\cdot i.$$

Nach (12) ist:

$$(15)\quad (a\varphi)^4 a_x^2 l_x^2 \varphi_x^4 = (\varphi\varphi')^4\varphi_x^4\varphi_x'^4 + (al)(a\varphi)^3 a_x^2 l_x\varphi_x^5 - \frac{3}{7}(\Delta\varphi)^2\Delta_x^2\varphi_x^6 - \frac{1}{14}A\cdot(i\varphi)^2 i_x^2\varphi_x^6,$$

und ebenso:

$$(ab)^4 a_x^2 b_x^2 l_x^2 = (\varphi a)^4\varphi_x^4 a_x^2 + (al)(ab)^3 a_x^2 b_x^3 l_x - \frac{3}{7}(\Delta a)^2\Delta_x^2 a_x^4 - \frac{1}{14}A\cdot(ia)^2 i_x^2 a_x^4.$$

Das zweite Glied rechts ist gleich:

$$\frac{1}{2}(ab)^3 a_x^2 b_x^2 l_x\{(al)b_x - (bl)a_x\} = \frac{1}{2}(ab)^4 a_x^2 b_x^2\cdot l_x^2 = \frac{1}{2}i\cdot l$$

und daher:

$$(16)\quad (\varphi a)^4\varphi_x^4 a_x^2 = \frac{1}{2}i\cdot l + \frac{3}{7}(\Delta a)^2\Delta_x^2 a_x^4 + \frac{1}{14}A\cdot(ia)^2 i_x^2 a_x^4.$$

Nach (13) hat man:

$$(ab)^3(bl')a_x^3 b_x^2 l_x^2 l_x' = (\varphi a)^3(al)\varphi_x^5 a_x^2 l_x + \frac{3}{4}(ab)^2(al)(bl')a_x^3 b_x^3 l_x l_x' - \frac{3}{14}(\Delta a)\Delta_x^3 a_x^4(al)l_x - \frac{1}{28}A\cdot(ia)i_x^3 a_x^4(al)l_x.$$

Die linke Seite ist gleich:

$$\frac{1}{2}(ab)^3 a_x^2 b_x^2 l_x^2 l_x'\{(bl')a_x - (al')b_x\} = -\frac{1}{2}i\cdot l^2.$$

Das zweite Glied rechts, nach der Formel

$$(ab)^2 a_x^3 b_x^3 a_y b_z = H_x^6 H_y H_z - \frac{3}{14}(xy)(xz)\cdot i,$$

ist gleich:

$$\frac{3}{4} H_x^2 \cdot Hl \cdot Hl' \cdot l_x l_x' - \frac{9}{56} i \cdot l^2$$

$$= \frac{3}{8} H_x^2 \{(Hl)^2 l_x'^2 + (Hl')^2 l_x^2 - (ll')^2 H_x^2\} - \frac{9}{56} i \cdot l^2$$

$$= -\frac{1}{4} Bf \cdot l + \frac{1}{4} A \cdot p \cdot l + \frac{3}{8} i \cdot l^2 - \frac{3}{8} A_{ll} \cdot H.^*)$$

Das dritte Glied ist gleich:

$$\frac{3}{28} \Delta_x^2 a_x^4 \{(a\Delta)^2 l_x^2 + (al)^2 \Delta_x^2 - (\Delta l)^2 a_x^2\}$$

$$= \frac{3}{56} i \cdot l^2 + \frac{1}{56} B \cdot f \cdot l + \frac{3}{14} \Delta^2 + \frac{1}{28} A \cdot i \cdot \Delta - \frac{3}{28} f \cdot n.^{**})$$

Das vierte Glied ist gleich:

$$\frac{1}{56} A \cdot i_x^2 \cdot a_x^4 \{(ai)^2 l_x^2 + (al)^2 i_x^2 - (il)^2 a_x^2\}$$

$$= \frac{1}{56} A \cdot p \cdot l + \frac{1}{28} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{1}{3 \cdot 56} A^2 \cdot i^2 - \frac{1}{56} A \cdot f \cdot m.$$

Man bekommt also:

(17) $$(\varphi a)^3 (al) \varphi_x^5 a_x^2 l_x$$

$$= -\frac{13}{14} i \cdot l^2 + \frac{13}{56} B \cdot f \cdot l - \frac{15}{56} A \cdot p \cdot l + \frac{3}{8} A_{ll} \cdot H - \frac{3}{14} \Delta^2$$

$$- \frac{1}{14} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{3}{28} f \cdot n - \frac{1}{168} A^2 \cdot i^2 + \frac{1}{56} A \cdot f \cdot m.$$

Bei Anwendung der Formel (14) hat man:

$$f \cdot (\Delta l)^2 \Delta_x^2 = (\varphi \Delta)^2 \varphi_x^6 \Delta_x^2 - \frac{3}{2} (al)(l\Delta) a_x^5 \Delta_x^3 - \frac{15}{14} \Delta^2 - \frac{5}{28} A \cdot i \cdot \Delta.$$

Das zweite Glied rechts ist gleich:

$$\frac{3}{4} a_x^4 \Delta_x^2 \{(al)^2 \Delta_x^2 + (\Delta l)^2 a_x^2 - (a\Delta)^2 l_x^2\},$$

und daher:

(18) $$(\varphi \Delta)^2 \varphi_x^6 \Delta_x^2 = \frac{1}{4} f \cdot n - \frac{5}{24} B \cdot f \cdot l - \frac{3}{7} \Delta^2 - \frac{1}{14} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{3}{8} i \cdot l^2.$$

Nach derselben Formel ist:

$$f \cdot (il)^2 i_x^2 = (\varphi i)^2 \varphi_x^6 i_x^2 - \frac{3}{2} (al)(li) a_x^5 i_x^3 - \frac{15}{14} i \cdot \Delta - \frac{5}{28} A \cdot i^2,$$

und ähnlicherweise:

(19) $$(\varphi i)^2 \varphi_x^6 i_x^2 = \frac{1}{4} f \cdot m - \frac{3}{7} i \cdot \Delta - \frac{1}{14} A \cdot i^2 + \frac{3}{4} p \cdot l.$$

Die Formeln (15), (16), (17), (18), (19) gebrauchend, erhält man:

*) Vgl. Cap. II Formel (9) der gen. Abhandlung.

**) Formel (8) ebenda.

$$(20)\quad (\varphi\varphi)^4 = -\frac{3}{56}\,i\cdot l^2 + \frac{1}{14}\,B\cdot f\cdot l - \frac{1}{7}\,A\cdot p\cdot l + \frac{3}{8}\,A_{ll}\cdot H - \frac{13}{98}\,A\cdot i\cdot\Delta + \frac{3}{14}\,f\cdot n - \frac{13}{24\cdot 7^2}\,A^2\cdot i^2 + \frac{1}{28}\,A\cdot f\cdot m - \frac{39}{98}\,\Delta^2.$$

Nach (12) hat man:

$$(aH)^4 H_x^4 a_x^2 l_x^2 = (\varphi H)^4 \varphi_x^4 H_x^4 + (al)(aH)^3 a_x^2 l_x H_x^5 - \frac{3}{7}\,(\Delta H)^2 \Delta_x^2 H_x^6 - \frac{1}{14}\,A\cdot(iH)^2 i_x^2 H_x^6,$$

und aus der Formel:

$$(ab)^2 a_x^3 b_x^2 a_y b_y^2 = H_x^5 H_y^3 - \frac{1}{7}\,(xy)^2\cdot i_x^3\, i_y$$

folgt:

$$(ab)^2(ac)(bc)^2(cl)a_x^3 b_x^2 c_x^2 l_x = (Ha)^3(al)H_x^5 a_x^2 l_x - \frac{1}{7}\,(ia)(al)i_x^3 a_x^4 l_x.$$

Die linke Seite ist gleich:

$$\frac{1}{2}\,(ab)^2(bc)^2(ac)a_x^2 b_x^2 c_x^2 l_x\{(cl)a_x - (al)c_x\} = -\frac{1}{2}\,j\cdot l.$$

Das zweite Glied rechts ist gleich:

$$\frac{1}{14}\,a_x^4 i_x^2\{(ai)^2 l_x^2 + (al)^2 i_x^2 - (il)^2 a_x^2\} = \frac{1}{14}\,p\cdot l + \frac{1}{14}\,i\cdot(al)^2 a_x^4 - \frac{1}{14}\,f\cdot m,$$

und also:

$$(21)\quad (aH)^3(al)\,a_x^2\,l_x\,H_x^5 = -\frac{3}{7}\,p\cdot l + \frac{1}{12}\,A\cdot f\cdot l + \frac{1}{7}\,i\cdot\Delta + \frac{1}{42}\,A\cdot i^2 - \frac{1}{14}\,f\cdot m.$$

Man hat folglich:

$$(22)\quad (\varphi H)^4\varphi_x^4 H_x^4 = \frac{13}{210}\,A\cdot f\cdot l - \frac{5}{14}\,p\cdot l - \frac{5}{98}\,i\cdot\Delta + \frac{1}{14}\,f\cdot m - \frac{5}{3\cdot 14^2}\,A\cdot i^2.$$

Nach (8) ergiebt sich:

$$(\overline{A}\overline{A})^4 = \frac{5^2}{2^{10}}\,[5^2\cdot(\varphi\varphi)^4 + 2^4\cdot A^2\cdot(HH)^4 - 2^3\cdot 5A\cdot(\varphi H)^4],$$

und nach (1), (20), (22) *bekommt man hiernach als Endresultat:*

$$(23)\quad \frac{2^{10}}{5^2}\,(\overline{A}\overline{A})^4 = -\frac{3\cdot 5^2}{56}\,i\cdot l^2 + \frac{5^2}{14}\,B\cdot f\cdot l + \frac{3\cdot 5^2}{7}\,A\cdot p\cdot l + \frac{3\cdot 5^2}{8}\,A_{ll}\cdot H - \frac{5^2\cdot 39}{98}\,\Delta^2 - \frac{5^3}{98}\,A\cdot i\cdot\Delta + \frac{3\cdot 5^2}{14}\,f\cdot n + \frac{5^2\cdot 67}{7^2\cdot 24}\,A^2\cdot i^2 - \frac{55}{28}\,A\cdot f\cdot m - \frac{20}{21}\,A^2\cdot f\cdot l - \frac{2^4}{15}\,A^3\cdot H.$$

§ 3.

Berechnung der Form $(\overline{AB})^3$.

Nach den Formeln (7), (8) hat man:

$$(\overline{AB})^3 = \frac{5^4}{3 \cdot 2^{10}} [5(\varphi\delta)^3 - 4A \cdot (H\delta)^3],$$

und nach der Formel

$$(al)\, a_x^3 a_y^2 l_y = \delta_x^3 \delta_y^3 + (xy) \cdot \Delta_x^2 \Delta_y^2 + \frac{1}{6} A \cdot i_x^2 i_y^2$$

ist:

$$(al)\,(a\varphi)^3\, a_x^2 l_x \varphi_x^5$$
$$= (\delta\varphi)^3 \delta_x^3 \varphi_x^5 + (\Delta\varphi)^2 \Delta_x^2 \varphi_x^6 + \frac{1}{6} A \cdot (i\varphi)^2 i_x^2 \varphi_x^6;$$

folglich ist auf Grund der Formeln (17), (18), (19):

$$(24)\quad (\varphi\delta)^3 \varphi_x^5 \delta_x^3 = -\frac{31}{56} i \cdot l^2 + \frac{1}{42} B \cdot f \cdot l - \frac{1}{7} A \cdot p \cdot l + \frac{3}{8} A_{ll} \cdot H$$
$$- \frac{9}{14} \Delta^2 - \frac{3}{14} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{5}{14} f \cdot n - \frac{1}{56} A^2 \cdot i^2$$
$$+ \frac{5}{84} A \cdot f \cdot m.$$

Aus derselben Formel ergiebt sich:

$$(al)\,(aH)^3\, a_x^2 l_x H_x^5$$
$$= (\delta H)^3 \delta_x^3 H_x^5 + (\Delta H)^2 \Delta_x^2 H_x^6 + \frac{1}{6} A \cdot (iH)^2 i_x^2 H_x^6,$$

und nach (21):

$$(25)\qquad (H\delta)^3 H_x^5 \delta_x^3$$
$$= \frac{11}{42} p \cdot l - \frac{1}{18} A \cdot f \cdot l + \frac{1}{14} i \cdot \Delta + \frac{1}{84} A \cdot i^2 + \frac{1}{14} f \cdot m.$$

Endlich aus den Formeln (24), (25):

$$(26)\quad (\overline{AB})^3 = \frac{5^4}{3 \cdot 2^{10}} \Big(-\frac{5 \cdot 31}{56} i \cdot l^2 + \frac{5}{42} B \cdot f \cdot l + \frac{15}{8} A_{ll} \cdot H$$
$$- \frac{45}{14} \Delta^2 + \frac{25}{14} f \cdot n - \frac{37}{21} A \cdot p \cdot l - \frac{19}{14} A \cdot i \cdot \Delta$$
$$- \frac{23}{168} A^2 \cdot i^2 + \frac{2}{9} A^2 \cdot f \cdot l + \frac{1}{84} A \cdot f \cdot m \Big).$$

§ 4.

Berechnung der Form $(\overline{AC})^2$.

Nach (7) und (9) hat man:

$$(\overline{AC})^2 = \frac{5^4}{2^{11} \cdot 3^2 \cdot 7} [10A \cdot (\varphi i)^2 - 75(\varphi\Delta)^2 - 8A^2 \cdot (Hi)^2 + 60A \cdot (H\Delta)^2],$$

und nach (18) und (19):

$$(27)\quad (\overline{A}\overline{C})^2 = \frac{5^4}{2^{11}\cdot 3^2\cdot 7}\Big(-\frac{15^2}{8}\,i\cdot l^2+\frac{5^3}{8}\,B\cdot f\cdot l+\frac{15^2}{7}\,\Delta^2-\frac{75}{4}f\cdot n$$
$$-\frac{5}{2}\,A\cdot p\cdot l+\frac{13\cdot 15}{14}\,A\cdot i\cdot\Delta+\frac{25}{7}\,A^2\cdot i^2$$
$$-\frac{4}{3}\,A^2\cdot f\cdot l+\frac{5}{2}\,A\cdot f\cdot m\Big).$$

§ 5.

Berechnung der Form $(\overline{B}\overline{B})^2$.

Man hat die Formel:

$$(al)\,a_x^3 a_y^2 l_x = \delta_x^4\delta_y^2 - \frac{1}{3}\,(xy)\cdot(al)^2 a_x^3 a_y,$$

und folglich:

$$(28)\quad (ab)^2(al)(bl')a_x^3 b_x^3 l_x l_x' = (\delta\delta)^2+\frac{1}{9}(\alpha\alpha)^2+\frac{2}{3}(al)^2(a\delta)a_x^3\delta_x^5,$$

wobei gesetzt ist:

$$\alpha_y^2 = (xy)\cdot(al)^2 a_x^3 a_y.$$

Die linke Seite ist, nach der Formel

$$(ab)^2 a_x^3 b_x^3 a_y b_z = H_x^6 H_y H_z - \frac{3}{14}\,(xy)\cdot(xz)\cdot i_x^4,$$

gleich:

$$(Hl)(Hl')H_x^6 l_x l_x' - \frac{3}{14}\,i\cdot l^2,$$

und also auch:

$$= \frac{1}{2}\,H_x^6\{(Hl)^2 l_x'^2+(Hl')^2 l_x^2-(ll')^2 H_x^2\}-\frac{3}{14}\,i\cdot l^2$$
$$= -\frac{1}{2}\,A_{ll}\cdot H-\frac{1}{3}\,B\cdot f\cdot l+\frac{1}{3}\,A\cdot p\cdot l+\frac{1}{2}\,i\cdot l^2.$$

Nun hat man:

$$(\alpha\alpha)^2 = -(al)^2(a\alpha)a_x^3\alpha_x.$$

Indessen ist:

$$\alpha_x\alpha_y = \frac{1}{2}\,(xy)(al)^2 a_x^4,$$

und also:

$$(29)\qquad (\alpha\alpha)^2 = (\alpha a)(al)^2 a_x^3\alpha_x = -\frac{1}{2}\,(al)^2 a_x^4\cdot(bl')^2 b_x^4.$$

Nach der Formel

$$(al)\,a_x^5 l_y = \delta_x^5\delta_y + \frac{5}{6}\,(xy)\cdot(al)^2 a_x^4,$$

ergiebt sich:

$$(al)a_x^5(lb)(bl')^2 b_x^3 = (\delta a)(al)^2\delta_x^5 a_x^3 - \frac{5}{6}\,(al)^2 a_x^4\cdot(bl')^2 b_x^4.$$

Die linke Seite ist gleich:

$$-\frac{1}{2}(bl')^2 a_x^4 b_x^2 \{(al)^2 b_x^2 + (bl)^2 a_x^2 - (ab)^2 l_x^2\}$$

$$= -\frac{1}{2}(bl')^2 b_x^4 \cdot (al)^2 a_x^4 - \frac{1}{2}(bl)^2 (bl')^2 b_x^2 \cdot f + \frac{1}{2}(ab)^2 (bl')^2 a_x^4 b_x^2 \cdot l,$$

folglich ist:

(30) $$(a\delta)(al)^2 a_x^3 \delta_x^5$$

$$= -\frac{1}{3}(al)^2 a_x^4 \cdot (bl')^2 b_x^4 + \frac{1}{2} f \cdot (bl)^2 (bl')^2 b_x^2 - \frac{1}{2}(ab)^2 (bl')^2 a_x^4 b_x^2 \cdot l.$$

Wegen (28), (29), (30) *ist endlich:*

(31) $$(\overline{B}B)^2 = \frac{5^6}{3^2 \cdot 2^{10}}(\delta\delta)^2$$

$$= \frac{5^6}{3^2 \cdot 2^{10}}\left[-\frac{1}{2} A_{11} \cdot H - \frac{2}{9} B \cdot f \cdot l + \frac{4}{9} A \cdot p \cdot l + \frac{5}{6} i \cdot l^2 + \frac{10}{9} \Delta^2 + \frac{10}{27} A \cdot i \cdot \Delta + \frac{5}{162} A^2 \cdot i^2 - \frac{1}{9} A \cdot f \cdot m - \frac{2}{3} f \cdot n\right].$$

§ 6.

Berechnung der Form $(\overline{B}\overline{C})$.

Nach (8) und (9) hat man:

$$(\overline{B}\overline{C}) = \frac{5^6}{2^{11} \cdot 3^3 \cdot 7}[2A \cdot (\delta i) - 15(\delta\Delta)],$$

und setzt man in die Formel:

$$[(\varphi\psi), \chi] = \frac{m-n}{2(m+n-2)} \chi \cdot X - \frac{1}{2}(\varphi \cdot \Phi - \psi \cdot \Psi)\ ^*)$$

für φ, ψ, χ bez. ein:

$$\varphi = \varphi_x^m = a_x^6, \quad \psi = \psi_x^n = l_x^2, \quad \chi = \chi_x^p = i_x^4,$$

so erhält man:

$$(\delta i) = \frac{2}{3} i \cdot \Delta + \frac{1}{9} A \cdot i^2 - \frac{1}{2} f \cdot m + \frac{1}{2} p \cdot l.$$

Setzt man ferner:

$$\varphi = a_x^6, \quad \psi = l_x^2, \quad \chi = \Delta_x^4,$$

so hat man ähnlicherweise:

$$(\delta\Delta) = \frac{2}{3}\Delta + \frac{1}{9} A \cdot i \cdot \Delta - \frac{1}{2} f \cdot n + \frac{1}{12} B \cdot f \cdot l + \frac{1}{4} i \cdot l^2,$$

---

*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen S. 117.

folglich:

$$(32)\quad (\overline{B}\overline{C}) = \frac{5^6}{2^{11}\cdot 3^3\cdot 7}\Big(-\frac{1}{3}A\cdot i\cdot\Delta + \frac{2}{9}A^2\cdot i^2 - A\cdot f\cdot m + A\cdot p\cdot l - 10\Delta^2 + \frac{15}{2}f\cdot n - \frac{5}{4}B\cdot f\cdot l - \frac{15}{4}i\cdot l^2\Big).$$

§ 7.

Berechnung der Form Θ und der Discriminante D_f.

Nach den Formeln:

$$\Theta = \frac{\overline{D}^2}{6} - \frac{\overline{C}^2}{6} - (\overline{A}\overline{A})^4 - 2(\overline{A}\overline{B})^3 - 2(\overline{A}\overline{C})^2 - 2\overline{A}\cdot E + \frac{3}{4}(\overline{B}\overline{B})^2 + (\overline{B}\overline{C}),$$

$$E = \frac{1}{2^7\cdot 3}(8A^2 - 75B),$$

und nach (23), (26), (27), (31), (32) ist:

$$(33)\quad \frac{2^{11}\cdot 3^3}{5}\cdot\Theta = \cdot 2^2\cdot 3(2^4\cdot 3A^3 - 5^2\cdot 29AB - 2^3\cdot 3\cdot 5^3 C)H + 2^2\cdot 5^3A^2\cdot i^2 - 2^6\cdot 3\cdot 5A^2\cdot f\cdot l + 2\cdot 3\cdot 5^3\cdot 11A\cdot i\cdot\Delta + 2^5\cdot 5^3\cdot 3A\cdot p\cdot l - 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2A\cdot f\cdot m - 2^3\cdot 5^3\cdot 3B\cdot f\cdot l + 2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7\Delta^2 + 3^2\cdot 5^3\cdot 23\,i\cdot l^2 - 2^2\cdot 3^3\cdot 5^3 f\cdot n.$$

Aus der Formel:

$$(iH)^4H_x^4 = \frac{2}{7}\Delta + \frac{2}{15}A\cdot i$$

bekommt man:

$$(iH)^4(i'H)^4 = \frac{2}{7}C + \frac{2}{15}A\cdot B,$$

$$(iH)^4(\Delta H)^4 = \frac{1}{21}B^2 + \frac{2}{15}A\cdot C,$$

$$(iH)^4(lH)^2(l'H)^2 = \frac{2}{7}D - \frac{4}{21}B\cdot C + \frac{2}{35}A\cdot B^2 + \frac{4}{45}A^2\cdot C.$$

Aus der Formel

$$(aH)^6H_x^2 = \frac{5}{7}l,$$

ist:

$$(aH)^6(Hl)^2 = \frac{10}{7}C + \frac{5}{21}AB,$$

$$(aH)^6(Hm)^2 = \frac{10}{21}B^2 + \frac{10}{21}A\cdot C,$$

$$(aH)^6(Hn)^2 = \frac{5}{7}D.$$

Aus den Formeln:

$$(\Delta H)^4H_x^4 = -\frac{5}{42}B\cdot i - \frac{1}{30}A\cdot\Delta + \frac{1}{4}l^2,$$

$$(ai)^2a_x^4i_y^2 = p_x^4p_y^2 + \frac{3}{5}(xy)^2\cdot l$$

folgt weiter:

$$(\Delta H)^4(\Delta' H)^4 = -\frac{2}{7} B \cdot C - \frac{1}{30} A \cdot B^2 + \frac{1}{4} D,$$

$$(pH)^6(Hl)^2 = -\frac{1}{7} B^2 + \frac{13}{105} A \cdot C + \frac{2}{45} A^2 \cdot B.$$

Ueberdies hat man:

$$(HH')^8 = -\frac{5}{7} B + \frac{2}{15} A^2.$$

Also ergiebt sich am Ende:

$$(34) \quad \frac{2^{12} \cdot 3^3}{5^3} (\Theta\varrho)^8 = \frac{2^{11} \cdot 3^3}{5} (\Theta H)^8 = \frac{2^7 \cdot 3}{5} A^5 - 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 A^3 \cdot B - 2^4 \cdot 5^3 A^2 \cdot C + 2 \cdot 3 \cdot 5^4 A \cdot B^2 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4 B \cdot C + 3^2 \cdot 5^4 D$$

was das gesuchte Resultat ist.

Anmerkung. — Durch das Verschwinden von D_f erhält $f = a_x^6 = 0$ eine Doppelwurzel ($\xi = 0$). Den Doppelfactor von f bestimmt man folgenderweise:

Nach den Ergebnissen Gordan's (a. a. O.) ist:

$$\Theta = \alpha_0 x_1^8 + 8\alpha_1 x_1^7 x_2 + \cdots = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^8,$$

somit ist

$$\xi_1^8 = \alpha_0, \quad \xi_1^7 \xi_2 = \alpha_1 \cdots;$$

also

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Palermo, den 23. Mai 1885.

Ueber conjugirte Curven, insbesondere über die geometrische Relation zwischen einer Curve dritter Ordnung und einer zu ihr conjugirten Curve dritter Classe.

Von

Otto Schlesinger in Zürich.

Einleitung.

Die geometrische Beziehung, die zwischen einer Curve n^{ter} Ordnung $a_x^n = 0$ und einer solchen n^{ter} Classe $u_a^n = 0$ stattfindet, wenn die simultane, bilineare Invariante derselben verschwindet, d. h. wenn die Curven zu einander conjugirt sind*), ist für den Fall $n = 2$ seit langer Zeit bekannt**), dagegen für alle höheren Werthe von n bisher nicht festgestellt worden. Zwar liess sich aus dem Verhalten der Kegelschnitte vermuthen, welche Form etwa jene Relation zwischen den beiden Curven annehmen würde. Eine Curve 2^{ter} Ordnung $a_x^2 = 0$ ist nämlich, wie bekannt, zu einer Curve 2^{ter} Classe $u_a^2 = 0$ dann und nur dann conjugirt, wenn die erste unendlich viele Punkttripel $y\,z\,t$ enthält von der Art, dass u_a^2 sich linear aus den Quadraten von u_y, u_z, u_t zusammensetzen lässt, oder, was dasselbe ist, wenn auf $a_x^2 = 0$ unendlich viele Polardreiecke von $u_a^2 = 0$ liegen***). Anderseits wusste man, dass wenn die Punkte $y_1\, y_2 \ldots y_p$ so beschaffen sind, dass u_a^n sich aus $u_{y_1}^n, u_{y_2}^n, \cdots u_{y_p}^n$ linear zusammensetzen lässt (p solcher Punkte werden wir zweckmässi gals Polar-p-Eck von $u_a^n = 0$ bezeichnen), jede Curve n^{ter} Ordnung, die durch $y_1\, y_2 \ldots y_p$ geht, zu $u_a^n = 0$ conjugirt ist. Es liess sich nun vermuthen, dass auch umgekehrt jede zu $u_a^n = 0$ conjugirte Curve gewisse Polar-p-Ecke enthalten werde.

Im Folgenden zeige ich, dass dies im Falle $n = 3$ in der That stattfindet, und zwar, dass wenn eine Curve 3. Ordnung zu einer Curve

*) Rosanes, Crelles Journal, Bd. 76, p. 316.

**) Hesse, Crelles Journal, Bd. 45, p. 87. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte 2. Aufl., p. 445. Rosanes, Math. Ann. Bd. 6. Smith, proceedings of the London Math. Society. vol. 2. Darboux, Bulletin des Sciences Mathématiques. t. I, sér. 1.

***) Ein Polardreieck eines Kegelschnittes ist zugleich Polardreiseit desselben; will man aber die Analogie mit höheren Curven aufrecht erhalten, so darf man, wie sich aus dem Folgenden ergiebt, nur von Polardreiecken reden, sobald die Curve als Classencurve aufgefasst wird.

dritter Classe conjugirt ist, die erstere unendlich viele Polarfünfecke der letzteren enthält. Zu diesem Zweck gebe ich zunächst (§ 1) die Definition der Polar-p-Ecke einer Curve n^{ter} Classe und leite gewisse einfache Eigenschaften derselben ab. Ein allgemeiner Satz über projectivische Erzeugung conjugirter Curven (§ 2), der auch an sich von einigem Interesse sein mag, giebt ein Mittel an die Hand, die erwähnten Polarfünfecke nicht nur nachzuweisen, sondern auch zu construiren (§ 3). Die bemerkenswerthe Art, wie diese Fünfecke über die Curve vertheilt sind, fordert eine besondere Untersuchung, die in § 4 erledigt wird. Den Schluss bildet eine kurze Bemerkung über andere Polar-p-Ecke einer K^3, die in einer zu ihr conjugirten C^3 enthalten sind.

§ 1.

Definition der Polar-p-Ecke einer Curve n^{ter} Classe und Ableitung ihrer einfachsten Eigenschaften.

Definition: *Unter einem Polar-p-Eck* $\left(p \leqq \frac{n(n+3)}{2}\right)$ *einer Curve n^{ter} Classe verstehe ich p Punkte von der Beschaffenheit, dass die linke Seite der Curvengleichung sich aus den n^{ten} Potenzen der den p Punkten entsprechenden linearen Formen linear zusammensetzen lässt.**)

Sind also die Gleichungen der Curve und der p Punkte resp. dargestellt durch:

$$u_\alpha^n = 0,\ u_{a_1} = 0,\ u_{a_2} = 0 \cdots u_{a_p} = 0,$$

so lassen sich constante Grössen $k_1 \ldots k_p$ so finden, dass:

$$(1) \qquad u_\alpha^n \underset{u}{\equiv} \sum_{i=1}^{i=p} k_i u_{a_i}^n.$$

Die Definition hat nur für $p \leqq \frac{n(n+3)}{2}$ eine Bedeutung, da zwischen $\frac{n(n+3)}{2} + 2$ oder mehr ternären Formen n^{ter} Classe *stets* eine lineare Identität stattfindet.

Ersetzt man die Grössen $u_1\, u_2\, u_3$ in Gleichung (1) durch Symbole einer ternären Form n^{ter} Ordnung, so folgt sogleich der Satz:

1. *Jede Curve n^{ter} Ordnung, welche durch die p Punkte eines Polar-p-Ecks einer K^n hindurchgeht, ist zu dieser K^n conjugirt.*

---

*) Cfr. Johnson, Quaterly Journal of pure and applied mathematics. February 1887, wo die Polar-p-Ecke als „sich selbst conjugirte p-Ecke" bezeichnet werden. Ich habe den ersten Ausdruck der Kürze halber vorgezogen.

Ueber die hier vielbenutzte Verwendung von Identitäten zwischen Potenzen linearer Formen vergl. man ausser den citirten Abhandlungen auch: Paul Serret, géométrie de direction.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

2. *Haben p Punkte die Eigenschaft, dass $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - p$ independente durch sie hindurchgehende Curven n^{ter} Ordnung zu einer K^n conjugirt sind, so bilden sie ein Polar-p-Eck dieser Curve.*

Da nämlich $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - p$ independenten Curven n^{ter} Ordnung nur eine p-gliedrige Gruppe von conjugirten Curven n^{ter} Classe gegenübersteht,*) anderseits uns $(p+1)$ Curven bekannt sind, die dieser Gruppe angehören müssen, nämlich $K^n(u_\alpha{}^n=0)$ und wenn $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p$ die p Punkte sind, $u_{\alpha_1}^n = 0$, $u_{\alpha_2}^n = 0 \cdots u_{\alpha_p}^n = 0$ so folgt, dass zwischen diesen $(p+1)$ Curven Dependenz stattfindet, d. h. es ist:

$$u_\alpha{}^n \underset{u}{\equiv} \sum_1^p k_i u_{\alpha_i}^n$$

was zu beweisen war.

Man beachte ferner den folgenden Satz:

3. *Ein Polar-p-Eck einer Curve bildet mit jedem Punkte der Ebene zusammen ein Polar-$(p+1)$-Eck derselben, mit jedem Punktepaar zusammen ein Polar-$(p+2)$-Eck etc.;*

denn die Gleichung

$$u_\alpha{}^n \underset{u}{\equiv} \sum_1^p k_i u_{\alpha_i}^n$$

lässt sich auch schreiben:

$$u_\alpha{}^n \equiv \sum_1^p k_i u_{\alpha_i}^n + 0 \cdot u_y{}^n,$$

$$u_\alpha{}^n \equiv \sum_1^p k_i u_{\alpha_i}^n + 0 \cdot u_y{}^n + 0 \cdot u_z{}^n$$

wo y, z beliebige Punkte sind.

Ein Polar-$(p+1)$-Eck kann also ein Polar-p-Eck in sich enthalten; der $(p+1)^{te}$ Punkt ist alsdann unwesentlich und kann durch jeden Punkt der Ebene ersetzt werden.

Da wir uns im Folgenden besonders mit den Polarfünfecken einer Curve dritter Classe beschäftigen werden, hierbei aber nach der eben gemachten Bemerkung auch die Polarvierecke eine Rolle spielen können, so betrachten wir noch einige geometrische Eigenschaften derselben.

a) Polarviereck. Aus der Definitionsgleichung

$$u_\alpha{}^3 \equiv \sum_1^4 k_i u_{\alpha_i}^3$$

*) Rosanes l. c. p. 316.

folgt durch Polarisirung:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha)\,(\alpha_3 \alpha_4 \alpha)\, u_\alpha \equiv 0$$

d. h. $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ $\overline{\alpha_3 \alpha_4}$ sind conjugirte Geradenpaare der Hesse'schen Curve von $K^3 (u_\alpha{}^3 = 0)$. Das Gleiche gilt für jedes Gegenseitenpaar unseres Viereckes*). Es gehen also durch die vier Punkte 3 (zerfallende) apolare Curven**) von K^3, *jede* Curve des durch $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ gehenden Büschels ist mithin zu K^3 apolar. Es gilt aber auch umgekehrt der Satz:

4. *Sind $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ die Schnittpunkte zweier zu K^3 apolaren Curven 2ter Ordnung (die keinen weiteren Punkt gemeinsam haben) so ist $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ein Polarviereck von K^3.*

Denn sind $a_x{}^2 = 0$, $b_x{}^2 = 0$ die betreffenden apolaren Curven, $v_x = 0$, $w_x = 0$, $t_x = 0$ beliebige Geraden, so sind die folgenden 6 durch $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ gehenden Curven 3. Ordnung

$$\begin{aligned} a_x{}^2 v_x &= 0, \quad & b_x{}^2 v_x &= 0, \\ a_x{}^2 w_x &= 0, \quad & b_x{}^2 w_x &= 0, \\ a_x{}^2 t_x &= 0, \quad & b_x{}^2 t_x &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

zu K^3 conjugirt. Die Curven (2) sind independent, weil sonst $a_x{}^2 = 0$ und $b_x{}^2 = 0$ eine ganze Gerade gemein haben müssten; es folgt mithin aus Satz 2., dass $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ein Polarviereck von K^3 constituiren.

b) Polarfünfeck. Ich bezeichne des bequemeren Ausdrucks halber als *Geradenpaar* eines Fünfecks irgend 2 Geraden, die 4 Punkte desselben enthalten. Den 5ten übrig bleibenden Punkt nenne ich *Gegenecke des Geradenpaars*. Zu jeder Ecke α_i des Fünfecks $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$ gehören demnach 3 Geradenpaare, die α_i zur Gegenecke haben.

Ist nun v, w ein beliebiges Geradenpaar eines Polarfünfecks von K^3, α_ϱ seine Gegenecke, so folgt aus unserer Definitionsgleichung:

$$u_\alpha{}^3 \equiv \sum_1^5 k_i\, u_{\alpha_i}{}^3$$

durch Polarisirung:

$$v_\alpha w_\alpha u_\alpha \equiv k_\varrho\, v_{\alpha_\varrho}\, w_{\alpha_\varrho}\, u_{\alpha_\varrho}$$

d. h.

5. *In einem Polarfünfeck von K^3 ist die Gegenecke jedes Geradenpaars v, w zugleich die gemischte Polare von v, w in Bezug auf K^3.*

oder auch:

In einem Polarfünfeck von K^3 bildet ein Geradenpaar v, w mit

---

*) Rosanes l. c. p. 328.

**) Ueber die Bedeutung dieser Bezeichnung cfr. Reye, Journal f. Math. Bd. 78. — Eine Zusammenstellung aller im Folgenden gebrauchten, nicht allgemein bekannten Benennungen findet man: Math. Ann. Bd. 22, p. 522—524.

jeder durch die Gegenecke gehenden Geraden zusammen ein conjugirtes Dreiseit von K^3.)

Wir wissen aus Satz 2, dass wenn durch $\alpha_1 \ldots \alpha_5$ fünf zu K^3 conjugirte independente Curven gelegt werden können, $\alpha_1 \ldots \alpha_5$ ein Polarfünfeck von K^3 ist. Indem wir die betreffenden Curven in specieller Weise wählen, können wir diese Thatsache anschaulicher darstellen. Ist nämlich allgemein $l_{ik}(x) = 0$ die Verbindungslinie von α_i und α_k so ist für beliebiges ξ:

$$l_{13}(x)\, l_{45}(x)\, (\alpha_2 \xi x) = 0$$

eine der erwähnten Curven. Die Gerade l_{45} kommt auch in *einem* der zu α_1 gehörigen Geradenpaare vor, nämlich in $l_{23}\, l_{45}$; ein anderes Geradenpaar, welches α_1 zur Gegenecke hat, ist $l_{24}\, l_{35}$. Wir haben dann für beliebig gewählte Punkte $\eta\, \zeta$ folgende durch $\alpha_1 \ldots \alpha_5$ gehende Curven 3. Ordnung

$$\begin{aligned}
l_{13}(x)\, l_{45}(x)\, (\alpha_2 \xi x) &= 0,\\
l_{23}(x)\, l_{45}(x)\, (\alpha_1 \eta x) &= 0,\\
l_{23}(x)\, l_{45}(x)\, (\alpha_1 \zeta x) &= 0,\\
l_{24}(x)\, l_{35}(x)\, (\alpha_1 \eta x) &= 0,\\
l_{24}(x)\, l_{35}(x)\, (\alpha_1 \zeta x) &= 0.
\end{aligned}$$

Diese Curven sind bei einem wirklichen Fünfeck nie dependent; andernfalls müsste es nämlich 2 bestimmte durch α_1 gehende Geraden $v_x = 0$, $w_x = 0$ derart geben, dass:

$$0 \equiv l_{13}(x)\, l_{45}(x)\, (\alpha_2 \xi x) + l_{23}(x)\, l_{45}(x)\, v_x + l_{24}(x)\, l_{35}(x) w_x.$$

Für *alle* Punkte von l_{45} müsste also *eine* der Gleichungen:

$$l_{24}(x) = 0, \quad l_{35}(x) = 0, \quad w_x = 0$$

stattfinden, d. h. es müssten $\alpha_2 \alpha_4 \alpha_5$ oder $\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$ oder $\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5$ in gerader Linie liegen. Schliessen wir dies aus und bemerken, dass die Hervorhebung von $\alpha_1\, \alpha_2$ ganz unwesentlich war, so folgt:

6. *Wenn in einem Fünfeck, in welchem niemals 3 Punkte auf derselben Geraden liegen, die 3 zu α_i gehörigen Geradenpaare mit jeder durch α_i gehenden Geraden zusammen ein conjugirtes Dreiseit von K^3 bilden und ein anderes Geradenpaar mit einer durch seine Gegenecke gehenden Geraden ein ebensolches Dreiseit bildet, so ist das Fünfeck ein Polarfünfeck von K^3.*

Legen wir durch die Punkte eines Polarfünfecks die eine durchgehende Curve 2ter Ordnung, so bildet diese nach Satz 1 mit *jeder* Geraden zusammen eine zu K^3 conjugirte Curve 3ter Ordnung und es folgt mithin:

7. *Die einem Polarfünfeck von K^3 umschriebene Curve 2. Ordnung ist zu K^3 apolar.*

*) Cfr. Johnson l. c.

§ 2.

Ueber projectivische Erzeugung conjugirter Curven.

Wenn eine Curve $(n+m)^{ter}$ Classe K^{n+m} und 2 Curvenbüschel resp. von der n^{ten} und m^{ten} Ordnung gegeben sind, so liegt es nahe, sich die Frage vorzulegen, ob und wie man die Büschel projectivisch so zuordnen kann, dass sie eine zu K^{n+m} conjugirte Curve erzeugen. Diese Frage wird durch einen einfachen Satz beantwortet, von dem ich späterhin Gebrauch machen werde und dessen Beweis daher nebst einigen nothwendigen Vorbemerkungen hier eine Stelle finden soll.

Eine projectivische Beziehung oder, wie ich kurz sagen will, eine Homographie zwischen 2 binären Gebieten mit den Variablen $(\lambda_1 \lambda_2)$ $(\mu_1 \mu_2)$ wird bekanntlich*) durch eine bilineare Gleichung zwischen $\lambda_1 \lambda_2$ und $\mu_1 \mu_2$ definirt. Zwei Homographien zwischen denselben Gebieten:

$$R \equiv r_{11}\lambda_1\mu_1 + r_{12}\lambda_1\mu_2 + r_{21}\lambda_2\mu_1 + r_{22}\lambda_2\mu_2 = 0,$$
$$S \equiv s_{11}\lambda_1\mu_1 + s_{12}\lambda_1\mu_2 + s_{21}\lambda_2\mu_1 + s_{22}\lambda_2\mu_2 = 0$$

nennt man *zu einander conjugirt*,**) wenn die bilineare Invariante derselben Null ist, d. h. wenn die Gleichung gilt:

$$r_{11}s_{22} - r_{12}s_{21} - r_{21}s_{12} + r_{22}s_{11} = 0. \tag{3}$$

Man beweist leicht den Satz:***)

8. *Zwei Homographien sind dann und nur dann conjugirt, wenn diejenigen Elementenpaare der einen Variablenreihe, welchen je dasselbe Element der andern Variablenreihe in den beiden Homographien zugehört, eine Involution bilden.*

Wenn nämlich dem Element λ innerhalb R das Element μ, innerhalb S dagegen das Element μ' zugehört, so ist:

$$\lambda_1(r_{11}\mu_1 + r_{12}\mu_2) + \lambda_2(r_{21}\mu_1 + r_{22}\mu_2) = 0,$$
$$\lambda_1(s_{11}\mu_1' + s_{12}\mu_2') + \lambda_2(s_{21}\mu_1' + s_{22}\mu_2') = 0.$$

Mithin giebt die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} r_{11}\mu_1 + r_{12}\mu_2 & r_{21}\mu_2 + r_{22}\mu_2 \\ s_{11}\mu_1' + s_{12}\mu_2' & s_{21}\mu_1' + s_{22}\mu_2' \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} r_{11} r_{21} \\ s_{11} s_{21} \end{vmatrix} \mu_1\mu_1' + \begin{vmatrix} r_{11} r_{21} \\ s_{12} s_{22} \end{vmatrix} \mu_1\mu_2' + \begin{vmatrix} r_{12} r_{22} \\ s_{11} s_{21} \end{vmatrix} \mu_2\mu_1' + \begin{vmatrix} r_{12} r_{22} \\ s_{12} s_{22} \end{vmatrix} \mu_2\mu_2'$$

diejenige Beziehung, die zwischen 2 Elementen $(\mu_1 \mu_2)$ $(\mu_1' \mu_2')$ bestehen muss, damit μ durch die Homographie R demselben Element zugeordnet

*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen p. 66.

**) Rosanes, Crelles Journal. Bd. 90, p. 312. Stephanos, Math. Ann. Bd. 22, p. 304.

***) Rosanes l. c. Pasch, Math. Ann. Bd. 23.

werden soll, wie μ' durch die Homographie S. Diese Relation zwischen $\mu\,\mu'$ ist eine Homographie zwischen 2 *aufeinanderliegenden* binären Gebieten und ist dann und nur dann eine Involution, wenn:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{22} \\ s_{11} & s_{21} \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung ist aber mit (3) identisch q. e. d.

Durch diesen Satz ist die Construction conjugirter Homographien auf die bekannte Construction involutorischer Punktreihen zurückgeführt.

Wenn eine bilineare Form in das Product einer linearen Form in λ und einer ebensolchen in μ zerfällt; d. h. wenn sie die Gestalt $(\lambda_1 \Lambda_2 - \lambda_2 \Lambda_1)\,(\mu_1 \mathsf{M}_2 - \mu_2 \mathsf{M}_1)$ annimmt, so heisst die Form selbst, sowie die dadurch definirte Homographie eine *specielle**) und man sagt alsdann, die specielle Homographie bestehe aus den beiden Elementen Λ, M. Aus Gleichung (3) folgt aber sofort**)

9. *Eine specielle Homographie* $(\lambda\Lambda)\,(\mu\mathsf{M}) = 0$ *ist zu einer Homographie* R *dann und nur dann conjugirt, wenn die beiden Elemente* Λ, M *der speciellen Homographie ein Nullpaar von* R *bilden.*

Haben wir nun die beiden Curvenbüschel:

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{1x}^n + \lambda_2 a_{2x}^n &= 0, \\ \mu_1 b_{1x}^m + \mu_2 b_{2x}^m &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

so bilden die Parameter λ ein binäres Gebiet und die Parameter μ ein zweites. Werden nun diese beiden Gebiete und damit die beiden Curvenbüschel projectivisch auf einander bezogen durch die Homographie:

$$0 = r_{11}\lambda_1\mu_1 + r_{12}\lambda_1\mu_2 + r_{21}\lambda_2\mu_1 + r_{22}\lambda_2\mu_2, \tag{5}$$

so erhält man das Erzeugniss der beiden so zugeordneten Curvenbüschel, d. h. den Ort der Schnittpunkte entsprechender Curven, indem man λ, μ aus den Gleichungen (4) und (5) eliminirt. Es ergiebt sich als Gleichung des Ortes;

$$r_{11} a_{2x}^n b_{2x}^m - r_{12} a_{2x}^n b_{1x}^m - r_{21} a_{1x}^n b_{2x}^m + r_{22} a_{1x}^n b_{1x}^m = 0. \tag{6}$$

Soll nun die so erzeugte Curve zu der Curve $(n+m)^{\text{ter}}$ Classe

$$u_a^{n+m} = 0$$

conjugirt sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$0 = r_1 a_{2a}^n b_{2a}^m - r_{12} a_{2a}^n b_{1a}^m - r_{21} a_{1a}^n b_{2a}^m + r_{22} a_{1a}^n b_{1a}^m.$$

Diese Gleichung ist aber nach (3) ganz gleichbedeutend mit der Thatsache, dass die beiden Homographien:

---

*) Rosanes, Crelles Journal Bd. 88, p. 269. Stephanos, l. c.

**) Stephanos, l. c.

$$0 = r_{11}\lambda_1\mu_1 + r_{12}\lambda_1\mu_2 + r_{21}\lambda_2\mu_1 + r_{22}\lambda_2\mu_2,$$

$$0 = a_{1\alpha}^n b_{1\alpha}^m \lambda_1\mu_1 + a_{1\alpha}^n b_{2\alpha}^n \lambda_1\mu_2 + a_{2\alpha}^n b_{1\alpha}^m \lambda_2\mu_1 + a_{2\alpha}^n b_{2\alpha}^m \lambda_2\mu_2$$
$$= (\lambda_1 a_{1\alpha}^n + \lambda_2 a_{2\alpha}^n)(\mu_1 b_{1\alpha}^m + \mu_2 b_{2\alpha}^n)$$

zu einander conjugirt sind. Die erste Homographie ist die gegebene. Die zweite Gleichung sagt aus, dass das Product

$$(\lambda_1 a_{1x}^n + \lambda_2 a_{2x}^n)(\mu_1 b_{1x}^m + \mu_2 b_{2x}^m)$$

zu $u_\alpha^{n+m} = 0$ conjugirt ist. Sie ordnet also immer 2 Curven der beiden Büschel einander zu, deren Product eine zu u_α^{n+m} conjugirte Curve vorstellt. Um nun das erhaltene Resultat einfacher aussprechen zu können, gebe ich folgende

Definition. Liegen 2 Büschel von Curven resp. n^{ter} und m^{ter} Ordnung, und eine Curve $(n+m)^{ter}$ Classe K vor, so giebt es stets eine ganz bestimmte Homographie, welche diejenigen Curven der beiden Büschel entsprechend setzt, die zusammen eine zu K conjugirte Curve liefern. Diese Homographie nenne ich die polare Homographie der beiden Büschel in Bezug auf K.

Mit Hülfe dieser Bezeichnung ergiebt sich nun sofort der Satz:

10. *Eine Curve, welche durch projectivische Zuordnung zweier Büschel n^{ter} und m^{ter} Ordnung entstanden ist, ist dann und nur dann zu einer Curve $(n+m)^{ter}$ Classe K conjugirt, wenn die erzeugende Homographie zu der polaren Homographie der beiden Büschel in Bezug auf K conjugirt ist.**)

Es kann vorkommen, dass eine bestimmte Curve $\Lambda_1 a_{1x}^n + \Lambda_2 a_{2x}^n = 0$ des ersten Büschels mit *jeder* Curve des zweiten zusammen eine conjugirte Curve von K bildet. Alsdann wird die polare Homographie für $\lambda_i = \Lambda_i$ und beliebiges μ erfüllt und die linke Seite ihrer Gleichung ist durch $(\lambda_1\Lambda_2 - \lambda_2\Lambda_1)$ theilbar. Da der Quotient nur die Form $(\mu_1 M_2 - \mu_2 M_1)$ haben kann, so folgt: die polare Homographie ist in diesem Falle eine specielle und es giebt eine *bestimmte* Curve

$$M_1 b_{1x}^m + M_2 b_{2x}^m = 0$$

des zweiten Büschels, die mit *jeder* Curve des ersten zusammen eine zu K conjugirte Curve liefert. Soll nun das Erzeugniss der beiden Büschel zu K conjugirt sein, so muss die erzeugende Homographie zu der speciellen $(\lambda\Lambda)(\mu M) = 0$ conjugirt sein und muss also nach Satz 9, ΛM zu entsprechenden Elementen haben. Es folgt mithin:

10a. *Wenn die polare Homographie der beiden Curvenbüschel n^{ter} und m^{ter} Ordnung in Bezug auf K^{n+m} eine specielle ist, die aus den Curven C^n $\mathfrak{C}^m$ besteht, so liefert eine projectivische Zuordnung der*

*) Aus diesem Theorem ergeben sich leicht die Sätze, die ich in meiner Dissertation (§ 7) angegeben habe; cfr. Math. Annalen, Bd. 22, p. 550.

Büschel dann und nur dann eine zu K^{n+m} conjugirte Curve, wenn C^n $\mathfrak{C}^m$ einander entsprechen.

Es kann weiterhin der Fall eintreten, dass die polare Beziehung der beiden Büschel identisch verschwindet, was geometrisch sich dadurch zu erkennen giebt, dass *jede* Curve des einen Büschels mit *jeder* Curve des anderen zusammen eine conjugirte Curve von K liefert. Zu einer identisch verschwindenden bilinearen Form ist aber jede andere conjugirt; es folgt also, was auch leicht direct eingesehen werden kann:

10b. *Wenn die beiden Curvenbüschel n^{ter} und m^{ter} Ordnung so beschaffen sind, dass jede Curve des einen mit jeder Curve des anderen zusammen eine zu K^{n+m} conjugirte Curve bildet, so erzeugen sie in jeder Zuordnung eine zu K conjugirte Curve.*

Der Satz 10a gestattet den Beweis des folgenden Theorems, von dem ich später gleichfalls Gebrauch machen werde:

11. *Ist eine Curve dritter Ordnung C^3 zu einer Curve dritter Classe K^3 conjugirt und legt man durch zwei Punkte $\pi_1\,\pi_2$ von C^3 die eine durchgehende zu K^3 apolare Curve zweiter Ordnung, welche C^3 noch in $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ schneiden möge, so haben alle Curven zweiter Ordnung durch diese 4 Punkte in Bezug auf K^3 denselben Polarpunkt s*) und dieser liegt auf $\overline{\pi_1\pi_2}$.*

Beweis: Ist $a_x^2 = 0$ der durch $\pi_1\,\pi_2$ gelegte apolare Kegelschnitt, $b_x^2 = 0$ irgend eine andere durch $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ gehende C^2, so hat eine beliebige Curve des Büschels $a_x^2 + \lambda b_x^2 = 0$ in Bezug auf K^3 den von λ unabhängigen Polarpunkt $u_s \equiv a_\alpha^2 u_\alpha + \lambda b_\alpha^2 u_\alpha \equiv \lambda b_\alpha^2 u_\alpha = 0$. Nun sei π der dritte Schnittpunkt von $\pi_1\pi_2$ und C^3. Wir bestimmen die polare Homographie zweier Büschel in Bezug auf K^3, nämlich des durch π gehenden Geradenbüschels und des durch $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ gehenden Büschels von Curven 2. Ordnung. Die Curve $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\pi_1\pi_2)$ bildet als apolare Curve von K^3 mit *jeder* Geraden des Büschels π zusammen eine zu K^3 conjugirte Curve; anderseits liefert die Gerade $\overline{\pi s}$, da sie durch den gemeinschaftlichen Polarpunkt aller Curven des Büschels geht, mit *jeder* Curve desselben zusammen eine conjugirte Curve von K^3. Die gesuchte Homographie ist also eine specielle und besteht aus den Elementen $\overline{\pi s}$, $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\pi_1\,\pi_2)$. Jede Zuordnung der beiden Büschel, die eine zu K^3 conjugirte Curve erzeugen soll, muss nach Satz 10a diese beiden Elemente entsprechend setzen. Da aber C^3 selbst aus den beiden Büscheln projectivisch erzeugt werden kann und in der C^3 erzeugenden Homographie der Curve $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\pi_1\,\pi_2)$ die Gerade $\overline{\pi_1\pi_2}$ entspricht, so muss, da C^3 nach Vor. zu K^3 conjugirt ist, $\overline{\pi s}$ mit $\overline{\pi_1\pi_2}$ identisch sein, d. h. s auf $\pi_1\pi_2$ liegen, wie behauptet wurde.

*) Polarpunkt von $a_x^3 = 0$ in Bezug auf $u_\alpha^3 = 0$ ist $a_\alpha^2 u_\alpha = 0$ im Sinne von Reye. l. c. cfr. die obige Anmerkung.

§ 3.

Nachweis und Construction der Polarfünfecke einer Curve dritter Classe, die auf einer zu ihr conjugirten Curve dritter Ordnung liegen.

Wir nehmen nunmehr eine Curve dritter Ordnung C^3 und eine Curve dritter Classe K^3, welche zu einander conjugirt sind, als gegeben an und stellen uns die Aufgabe, die Polar-p-Ecke von K^3 mit möglichst geringer Eckenzahl aufzusuchen, die etwa auf der C^3 gelegen sind. Im Allgemeinen wird sich kein Polarviereck von K^3 auf C^3 vorfinden, denn es lassen sich bei allgemeiner Beschaffenheit von K^3 leicht Curven angeben, die, trotzdem sie zu K^3 conjugirt sind, kein solches Viereck enthalten. Sind nämlich $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$ drei independente apolare Curven von K^3, $v_x = 0$, $w_x = 0$, $t_x = 0$ ganz beliebige nicht durch denselben Punkt gehende Geraden, so ist

$$v_x a_x^2 + w_x b_x^2 + t_x c_x^2 = 0 \tag{7}$$

die Gleichung einer C^3, die offenbar zu K^3 conjugirt ist. Würde diese nun ein Polarviereck $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ enthalten und wären $P_x^2 = 0$, $Q_x^2 = 0$ zwei durch die vier Punkte gehende Curven, die also zu K^3 apolar sind, so müssten sich unsere C^3 auch in der Form darstellen lassen:

$$p_x P_x^2 + q_x Q_x^2 = 0$$

d. h. es müsste nach (7) die Gleichung gelten

$$\varepsilon(v_x a_x^2 + w_x b_x^2 + t_x c_x^2) \equiv p_x P_x^2 + q_x Q_x^2. \tag{8}$$

Da aber $P_x^2 = 0$, $Q_x^2 = 0$ apolar sind, so kann man setzen:

$$P_x^2 \equiv \varrho\, a_x^2 + \sigma\, b_x^2 + \tau\, c_x^2,$$
$$Q_x^2 \equiv \varrho'\, a_x^2 + \sigma'\, b_x^2 + \tau'\, c_x^2$$

und so resultirt aus (8)

$$(\varepsilon v_x + \varrho p_x + \varrho' q_x) a_x^2 + (\varepsilon w_x + \sigma p_x + \sigma' q_x) b_x^2 + (\varepsilon t_x + \tau p_x + \tau' q_x) c_x^2 \equiv 0$$

d. h. es lassen sich lineare Functionen $V_x W_x T_x$ so finden, dass:

$$V_x a_x^2 + W_x b_x^2 + T_x c_x^2 \equiv 0; \tag{9}$$

oder zwischen den Curven

$$\begin{aligned} &a_x^2 x_1 = 0, \quad b_x^2 x_1 = 0, \quad c_x^2 x_1 = 0, \\ &a_x^2 x_2 = 0, \quad b_x^2 x_2 = 0, \quad c_x^2 x_2 = 0, \\ &a_x^2 x_3 = 0, \quad b_x^2 x_3 = 0, \quad c_x^2 x_3 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

besteht eine lineare Dependenz. Es giebt daher eine zweigliedrige Gruppe von Curven dritter Classe, die zu *allen* Curven (10) conjugirt sind. Jede Curve dieser Eigenschaft hat aber $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$ zu apolaren Curven; es müsste also *unendlich viele* Curven geben, die *dasselbe* Netz apolarer Curven besitzen, wie K^3. Schon der Umstand, dass alle

diese unendlich vielen Curven auch dieselbe Hesse'sche Curve besitzen müssten, lehrt, dass dies nur bei specieller Beschaffenheit von K^3 eintreten kann.

Mithin stellt bei allgemeiner Beschaffenheit von K^3 (7) eine Curve dar, die *kein* Polarviereck von K^3 enthält und wir sehen, dass die Thatsache, dass C^3 und K^3 conjugirt sind, nicht erfordert, dass C^3 ein Polarviereck von K^3 enthält.

Da überdies in den Fällen, in denen ein Polarviereck $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ von K^3 auf C^3 enthalten ist, unendlich viele Polarfünfecke von selbst dadurch gegeben sind, dass jeder Punkt mit $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ zusammen ein Polarfünfeck liefert (Satz 3),*) so können wir nunmehr von den zu betrachtenden Curven ein für allemal voraussetzen, *dass C^3 kein Polarviereck von K^3 enthält.* Diese Festsetzung schliesst besonders zwei Fälle aus:

1) dass die Curve C^3 aus einem apolaren Kegelschnitt von K^3 und einer Geraden besteht; denn in diesem Falle giebt es auf dem Kegelschnitt unendlich viele Polarvierecke, da jeder andere apolare Kegelschnitt ihn in vier Punkten dieser Art schneidet (cfr. Satz 4).

2) dass die Curve K^3 aus drei Punkten derselben Geraden besteht.

Wenn nämlich K^3 in drei Punkte ξ, η, ζ derselben Geraden v zerfällt, so lässt sich die Curve als cubische Form des binären Gebietes (v) auffassen und es giebt alsdann auf v eine dreigliedrige Gruppe von zu $(\xi\,\eta\,\zeta)$ conjugirten Punkttripeln. Eine Curve 3. Ordnung C^3 ist aber zu $K^3(u_\xi u_\eta u_\zeta = 0)$ dann und nur dann conjugirt, wenn sie v in einem zu $\xi\,\eta\,\zeta$ conjugirten Tripel $\xi_1\,\eta_1\,\xi_1$ schneidet. Wegen der Beziehung von $\xi_1\,\eta_1\,\xi_1$ und $\xi\,\eta\,\zeta$ lässt sich $u_\xi u_\eta u_\zeta$ aus den Cuben von u_{ξ_1}, u_{η_1}, u_{ζ_1} zusammensetzen, wie aus der Theorie der binären Formen bekannt. Daraus folgt, dass $\xi_1\,\eta_1\,\xi_1$ ein auf C^3 gelegenes Polardreieck von K^3 ist, mithin sind nach Satz 3 unendlich viele Polarvierecke von K^3 auf C^3 von vornherein gegeben.

Durch die Ausschliessung des letzten Falles erlangen wir für unsere Untersuchung noch einen besonderen Vortheil. Die zu einer K^3 apolaren Curven 2. Ordnung lassen sich bekanntlich auch als Kegelschnitte definiren, die zu *allen* ersten Polaren von K^3 conjugirt sind. Im Allgemeinen bilden sie daher eine dreigliedrige Gruppe und sie können nur dann eine viergliedrige formiren, wenn die Polaren von K^3 $(u_a{}^3 = 0)$ eine zweigliedrige bilden; d. h. wenn zwischen

$$u_a{}^2\alpha_1 = 0,$$
$$u_a{}^2\alpha_2 = 0,$$
$$u_a{}^2\alpha_3 = 0$$

*) Damit soll nicht gesagt sein, dass dies die einzigen auf solchen Curven liegenden Polarfünfecke sind.

eine lineare Identität besteht. In diesem Fall gäbe es aber ein v, für welches

$$v_a u_a^2 \equiv 0$$

d. h. u_a^3 bestände aus drei in derselben Geraden v liegenden Punkten. Da dies ausgeschlossen, so *bilden die apolaren Curven der zu betrachtenden K^3 immer eine dreigliedrige Gruppe.*

Ich behaupte nunmehr:

12. *Durch jeden Punkt π unserer C^3 lässt sich eine zu K^3 apolare Curve 2. Ordnung legen, deren fünf weitere Schnittpunkte mit C^3 ein Polarfünfeck von K^3 bilden.*

Ich führe den Beweis durch directe Construction der betreffenden Curve: durch den Punkt π geht ein Büschel von zu K^3 apolaren Curven, welches im Allgemeinen nur drei zerfallende Curven besitzt; unter speciellen Verhältnissen kann jedoch der Fall eintreten, dass jede durch π gehende Gerade ganz in einer apolaren Curve enthalten ist. *Dieser Fall soll zunächst ausgeschlossen und unten behandelt werden.*

Ist nun g eine Gerade durch π, die keiner Curve des erwähnten Büschels angehört, und schneidet sie C^3 noch in $\pi_1 \pi_2$, so lege man durch diese Punkte die *eine* durchgehende apolare Curve (mehr als eine giebt es nicht, weil sonst g selbst Theil einer apolaren Curve sein müsste, was ausgeschlossen); diese schneide C^3 noch in $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$. Alle Curven des durch diese vier Punkte gehenden Kegelschnittbüschels haben nach Satz 11 in Bezug auf K^3 denselben *bestimmten* Polarpunkt z, der auf g liegt. (Der Fall, dass *jeder* Punkt als Polarpunkt betrachtet werden könnte, kann nicht eintreten, weil sonst $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ein Polarviereck von K^3 wäre). Ich lege nun durch π und z die *eine* durchgehende apolare Curve $\mathfrak{C}^2$ (es giebt nur eine aus demselben Grunde, wie oben) und behaupte, dass ihre fünf weiteren Schnittpunkte $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$ mit C^3 ein Polarfünfeck von K^3 liefern.

Beweis: Da der Punkt π und die Punktgruppe $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$ *Reste**) zu einander sind, π *beigeordneter Rest**) von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ist, so sind auch $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$, $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$ Reste und bilden also zusammen die Grundpunkte eines Curvenbüschels 3. Ordnung. Nun gilt bekanntlich der Satz:**)

„Wenn $\alpha_1 \ldots \alpha_9$ Grundpunkte eines Curvenbüschels 3. Ordnung sind und man legt durch fünf von ihnen z. B. $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$ einen Kegelschnitt, so ist jeder Punkt z desselben beigeordneter Rest (gegenüberliegender Punkt) der vier übrigen Punkte auf derjenigen Curve des Büschels, die durch z geht."

---

*) Im Sinne Sylvesters cfr. Salmon-Fiedler, höhere ebene Curven. Erste Aufl. Art. 159, p. 164.

**) Pluecker, algebraische Curven, p. 56. cfr. Durège, Curven 3. O., p. 158.

In unserem Falle wird der erwähnte Kegelschnitt durch $\mathfrak{C}^2$ geliefert und wir erkennen, dass auch unser oben construirter Punkt s gegenüberliegender Punkt von $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ auf der durch s gehenden Curve C_1^3 des Büschels ist. Das heisst aber bekanntlich nichts anderes, als dass C_1^3 projectivisch erzeugt werden kann aus dem Geradenbüschel durch s und dem Curvenbüschel durch $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Da aber nach der Construction von s *jede* Gerade des ersten Büschels mit *jeder* Curve des zweiten zusammen eine zu K^3 conjugirte Curve liefert, so folgt aus Satz 10b, dass die Büschel, wie sie auch immer zugeordnet werden, stets conjugirte Curven von K^3 erzeugen. Es ist also auch C_1^3 eine zu K^3 conjugirte Curve. Es gehen mithin, wenn $v_x = 0$, $w_x = 0$, $t_x = 0$ drei beliebige independente Geraden sind, durch $\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_9$ folgende zu K^3 conjugirte Curven

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{C}^2 v & \mathfrak{C}^2 w & \mathfrak{C}^2 t, \\ C^3 & C_1^3. \end{array} \tag{11}$$

Wenn diese Curven independent sind, so folgt nach Satz 2 sofort, dass $\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_9$ ein Polarfünfeck von K^3 ist, wie zu zeigen war.

Nun würde eine Dependenz der Curven (11) offenbar aussagen, dass das Büschel mit den Grundpunkten $\alpha_1 \ldots \alpha_9$ eine Curve enthält, die aus $\mathfrak{C}^2$ und einer Geraden l besteht. Von den Punkten $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ müsste mithin einer, etwa α_4 in π hineinfallen, die andern $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ auf l liegen. Es waren aber $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ die weiteren Schnittpunkte der durch $\pi_1\pi_2$ gehenden apolaren Curve und diese müsste mithin da $\alpha_4 = \pi$ die Gerade $\overline{\pi_1\pi_2} = g$ enthalten, von der aber vorausgesetzt war, dass sie nicht Bestandtheil einer apolaren Curve ist. Daher kann eine Dependenz der Curven (11) nicht stattfinden und unser Satz ist vollständig erwiesen.

Zu jedem Punkt π gehört also (von dem noch zu betrachtenden Ausnahmefall abgesehen) eine *ganz bestimmte* auf obige Weise zu construirende Curve, die wir *als C_π oder als die zu π gehörige Fünfecks-curve zweiter Ordnung bezeichnen* wollen.

Es gilt aber auch der Satz:

13. *Ist $\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_9$ ein Polarfünfeck von K^3, das ganz auf C^3 liegt, und ist π der sechste Schnittpunkt der durchgehenden (apolaren) Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{C}^2$, so ist diese Curve identisch mit C_π.*

Auch hier schliessen wir einstweilen den Fall aus, dass *jede* durch π gehende Gerade Theil einer apolaren Curve ist. Dann sei s ein Punkt der $\mathfrak{C}^2$, der weder auf einer zerfallenden durch π gehenden apolaren Curve, noch auf C^3 liegt. Es seien, wie oben, $\pi_1\pi_2$ die weiteren Schnittpunkte von $\overline{\pi s}$ mit C^3, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ die ferneren Schnittpunkte der durch $\pi_1\pi_2$ gelegten apolaren Curve, s' der auf πs liegende gemeinschaftliche Polarpunkt der durch $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ gehenden C^2 in Bezug

auf K. Wir setzen an, dass z' von z verschieden ist und zeigen, dass dies auf einen Widerspruch führt. Es bilden nämlich aus demselben Grunde, wie oben $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ die Grundpunkte eines Curvenbüschels 3. Ordnung und *jede* Curve desselben ist, da sie durch $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ geht, nach Satz 1 zu K^3 conjugirt. Ist C_1^3 die durch z gehende Curve des Büschels, so ist nach dem oben citirten Satz auf C_1^3 der Punkt z gegenüberliegender Punkt von $a_1 a_2 a_3 a_4$ und es müssen sich also die Büschel (z) und $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ so zuordnen lassen, dass eine Curve (nämlich C_1^3) erzeugt wird, die durch $a_1 \ldots a_9$ geht und mithin zu K^3 conjugirt ist.

Wir suchen die polare Homographie der beiden Büschel in Bezug auf K^3. Der Kegelschnitt $(a_1 a_2 a_3 a_4 x_1 x_2)$ bildet mit *jeder* Geraden durch z eine conjugirte Curve; die Gerade zz' ist (falls nicht $z = z'$, was nach Vor. ausgeschlossen) die *einzige* Gerade durch z, die mit jeder Curve durch $a_1 a_2 a_3 a_4$ zusammen eine conjugirte Curve von K^3 vorstellt. Die polare Homographie ist also eine specielle, bestehend aus den beiden Elementen $z\overline{z'} = \overline{x z}$ und $(a_1 a_2 a_3 a_4 x_1 x_2)$.

Nach dem Obengesagten und nach Satz 10a muss die erzeugende Homographie von C_1^3 diese beiden Elemente entsprechend setzen, d. h. die Schnittpunkte $x_1 x_2$ der beiden Elemente müssen Punkte von C_1^3 sein. Dann hat aber diese Curve mit C^3 die 11 Punkte $a_1 a_2 \ldots a_9 x_1 x_2$ gemein und ist also mit ihr identisch;*) da aber C_1^3 durch z geht, welcher Punkt nicht auf C^3 liegt, so giebt dies einen Widerspruch. Unsere Annahme, dass z von z' verschieden, ist also falsch, d. h. $\mathfrak{C}^2$ ist identisch mit C_π., q. e. d.

Aus den Sätzen (11) und (13) folgt also: durch jeden Punkt π geht *eine* Curve zweiter Ordnung, deren fünf weitere Schnittpunkte ein Polarfünfeck bilden und *keine* andere.

Es bleibt nur noch übrig, die ausgeschlossenen Fälle zu betrachten. Wir gehen dabei von folgendem Satze aus, der leicht zu bestätigen ist:

„Wenn ein Büschel von C^2, dessen einer Grundpunkt π ist, die Eigenschaft hat, dass *jede* durch π gehende Gerade einer Curve desselben angehört, so besteht das Büschel

entweder a) aus einer festen Geraden w und dem Strahlbüschel durch π

oder b) aus den Geradenpaaren einer Strahleninvolution mit dem Centrum π."

In unserem Falle gilt dies von dem Büschel der durch π gehenden

*) Denn andernfalls mussten die 11 Punkte einem Kegelschnitte angehören, der ein Theil von C^3 und, da er durch $a_6 a_8 a_7 a_8 a_9$ geht, zu K^3 apolar wäre. C^3 bestünde alsdann aus einem apolaren Kegelschnitt von K^3 und einer Geraden, was nach Seite 463 ausgeschlossen ist.

apolaren Curven von K^3. Wir betrachten die beiden Fälle der Reihe nach:

a) Die Gerade w bildet mit *jeder* Geraden p durch π eine apolare Curve von $K(u_\alpha{}^3=0)$, d. h. es ist:

$$w_\alpha p_\alpha u_\alpha \underset{u}{\equiv} 0.$$

Die erste Polare von w in Bezug auf K besteht also aus einem Punktepaar der Geraden p; da aber dasselbe von *jeder* durch π gehenden Geraden p gesagt werden kann, so ist die erste Polare von w der doppeltgezählte Punkt π. Es ist mithin:

$$w_\alpha u_\alpha{}^2 \underset{u}{\equiv} \varrho\, u_\pi{}^2$$

und daraus folgt erstens, dass *alle* apolaren Curven durch π gehen und zweitens, dass jede durch π gehende Curve zweiter Ordnung mit w zusammen zu K conjugirt ist. Schneidet w die Curve C^3 noch in $\xi\eta\zeta$, so gehen, wenn $C_1{}^2 C_2{}^2 \ldots C_5{}^2$ fünf independente durch π gehende Curven sind, durch $\xi\eta\zeta\pi$ folgende 6 zu K^3 conjugirte Curven:

$$w C_1{}^2\, w C_2{}^2 \ldots w C_5{}^2,\ C^3.$$

Wenn diese Curven, wie im Allgemeinen der Fall, independent sind, so ist nach Satz 2 $\xi\eta\zeta\pi$ ein Polarviereck von K, welches auf C^3 liegt, ein Fall, den wir ausgeschlossen haben.

Sind die Curven dependent, so besteht C^3 selbst aus der Geraden w und einer durch den Punkt π gehenden Curve C^2, während die übrigen Verhältnisse erhalten bleiben. Sind nun ξ, η zwei beliebige Punkte von w, so geht durch $\xi\eta\pi$ eine 6-gliedrige Gruppe von Curven, die zu K conjugirt sind. In dieser 6-gliedrigen ist eine 5-gliedrige Gruppe von Curven enthalten, die aus w und je einer durch π gehenden Curve 2. Ordnung bestehen und durch

$$C^3 = w C^2,\ w C_1{}^2 \ldots w C_4{}^2$$

repräsentirt sein möge. Ist nun $C_1{}^3$ eine Curve der 6-gliedrigen Gruppe, die *nicht* w als Theil enthält und schneidet diese w ausser in $\xi\eta$, noch in ζ, so gehen durch $\xi\eta\zeta\pi$ folgende 6 zu K conjugirte Curven:

$$C^3 = w C^2,\ w C_1{}^2 \ldots w C_4{}^2,$$
$$C_1{}^3.$$

Da diese nie dependent sind, so bildet $\xi\eta\zeta\pi$ ein auf C^3 liegendes Polarviereck von K, also auch dieser Fall bedarf keiner näheren Betrachtung.

b) Das Büschel der durch π gehenden apolaren Curven besteht aus einer Involution von Geradenpaaren mit dem Centrum π.

v, w sei ein solches Geradenpaar; dann ist:

$$v_\alpha w_\alpha u_\alpha \underset{u}{\equiv} 0$$

d. h. die erste Polare von v besteht aus einem auf w liegenden Punktepaar $\xi\eta$. Nun sei $v'w'$ ein zweites Geradenpaar der Involution, $\xi'\eta'$ die auf w' liegende erste Polare von v'; dann ist

$$v_\alpha v'_\alpha u_\alpha = 0$$

der Polarpunkt von v' in Bezug auf $u_\xi u_\eta$ oder, was dasselbe, der vierte harmonische Punkt von π in Bezug auf $\xi\eta$ und als solcher auf w gelegen; er ist aber ebenso Polarpunkt von v in Bezug auf $\xi'\eta'$, d. h. der vierte harmonische Punkt von π in Bezug auf $\xi'\eta'$ und als solcher auf w' liegend. Er muss also mit π selbst coincidiren und damit dies möglich, muss je einer der Punkte $\xi\eta$, resp. $\xi'\eta'$ in π hineinfallen; d. h. jede Gerade durch π hat in Bezug auf K^3 eine Polare, die aus dem Punkte π und einem andern Punkte ξ besteht. Demnach hat jede durch π gehende Gerade zur zweiten Polare den Punkt π selbst, der auf ihr liegt, und ist in Folge dessen Tangente der Curve. $u_\pi = 0$ ist also ein Theil von K^3. Umgekehrt sieht man leicht, dass wenn K^3 durch die Gleichung:

$$u_\pi u_\beta^2 = 0$$

dargestellt wird, die apolaren Curven durch π eine Involution von Geradenpaaren bilden und überhaupt die eben geschilderten Verhältnisse stattfinden. Der Ort der Punkte ξ ist alsdann die Gerade g, für welche $g_\beta u_\beta \equiv \varrho u_\pi$ ist.

Von den Schnittpunkten eines der Involution angehörigen Geradenpaares v, w mit der C^3 liegen zwei in π vereinigt, $\alpha_5\alpha_6$ seien die weiteren Schnittpunkte von v, $\alpha_7\alpha_8$ diejenigen von w. Es frägt sich ob es vorkommt, dass v, w ein Polarfünfeck ausschneidet, welches also aus $\pi\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$ bestände. In diesem Fall müsste, wenn man durch $\alpha_7\alpha_8$ *irgend eine* Curve 2. Ordnung legt, die noch in $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ schneidet, diese zusammen mit v nach Satz 1 eine conjugirte Curve von K^3 bilden, oder was dasselbe ist, jede durch $\alpha_7\alpha_8$ gehende Curve 2. Ordnung müsste zu $v_\alpha u_\alpha^2 = 0$, d. h. zum Punktepaar $\pi|(w, g)$ conjugirt sein. $\alpha_7\alpha_8$ selbst müsste also zu $\pi|(w, g)$ harmonisch liegen Nach der bekannten Eigenschaft der Polarcurve eines Punktes einer C^3 folgt hieraus, dass (w, g) auf der ersten Polaren von π in Bezug auf $C^3(a_x^3=0)$ liegen muss, und da der Punkt auch auf g liegt, so resultirt, dass er Schnittpunkt von g und $a_\pi a_x^2 = 0$ ist. Da dasselbe von (v, g) bewiesen werden kann, so müssen, wenn überhaupt ein Geradenpaar v, w der gewünschten Art existiren soll, v, w die Geraden sein, welche π mit den Schnittpunkten von g und $a_\pi a_x^2 = 0$ verbinden.

Man sieht aber ganz ebenso ein, dass wenn v, w die so construirten Geraden sind und v die C^3 noch in $\alpha_5\alpha_6$, w noch in $\alpha_7\alpha_8$ schneidet, $\pi\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$ ein Polarfünfeck bildet, da jede durch diese Punkte gehende Curve 3. Ordnung zu K^3 conjugirt ist.

Wir können also jetzt ganz allgemein den Satz aussprechen:

14. *Sind C^3 und K^3 zwei Curven 3. Ordnung resp. Classe, die zu einander conjugirt sind, und enthält C^3 kein Polarviereck von K^3, so geht durch jeden Punkt von C^3 eine und nur eine Curve C_π, welche ein Polarfünfeck von K^3, das den Punkt π selbst nicht enthält, auf C^3 ausschneidet.*

Der Satz 12 giebt eine geometrische Deutung für das Verschwinden der Invariante $a_\alpha{}^3$ der Curven $C^3(a_x{}^3=0)$ und $K^3(u_\alpha{}^3=0)$. Wir wussten schon, dass wenn C^3 durch ein Polarfünfeck von K^3 geht, $a_\alpha{}^3=0$ ist; aus unserem Satz ergiebt sich auch das Umgekehrte. Berücksichtigen wir noch das dual gegenüberstehende Resultat, so folgt:

14a. *Eine Curve dritter Ordnung C^3 und eine Curve dritter Classe K^3 sind dann und nur dann conjugirt, wenn C^3 unendlich viele Polarfünfecke von K^3 eingeschrieben sind. Dann sind aber auch K^3 unendlich viele Polarfünfseite von C^3 umschrieben.*

Dieser Satz *gilt ganz allgemein*, da er im Falle, dass C^3 ein Polarviereck von K^3 enthält, evident ist.

Ich schliesse diesen Paragraphen mit einem Satze, der in die Vertheilung der Curven C_π einen näheren Einblick gestattet.

15. *Wenn durch einen Punkt α von C^3 die Fünfeckscurve eines Punktes π hindurchgeht, und π' der dritte Schnittpunkt von $\overline{\pi\alpha}$ und C^3 ist, so geht auch die Fünfeckscurve von π' durch α hindurch.*

Beweis. Die Curve C_π schneide C^3 ausser in α noch in $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Dann ist $\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ein Polarfünfeck von $K(u_\alpha{}^3=0)$ d. h. es ist:

$$u_\alpha{}^3 \equiv \sum_0^4 k_i\, u_{\alpha_i}^3. \tag{12}$$

Ist nun $a_x{}^2=0$ irgend eine Curve 2. Ordnung durch $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, so folgt aus (12) sehr leicht durch Polarisirung, dass ihr Polarpunkt in Bezug auf K mit α coincidirt. Alle Curven des Büschels $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ haben also denselben Polarpunkt α.

Construirt man aber nach Anleitung von Satz 12 die Curve $C_{\pi'}$, indem man für die dort benutzte Gerade g die Gerade $\overline{\pi\alpha\pi'}$ einsetzt, so ergiebt sich der dort erwähnte Punkt ε als Polarpunkt aller Curven des Büschels $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Es ist also in unserm Fall $\varepsilon=\alpha$, und die Curve $C_{\pi'}$ ist die durch $\pi'\alpha$ gehende apolare Curve. Unser Satz ist mithin bewiesen.

Man erkennt hieraus, dass die Zahl der Curven C_π welche ausser C_α durch den Punkt α der Curve hindurchgehen, stets eine *gerade* sein muss.

§ 4.

Die Vertheilung der Polarfünfecke auf der C^3.

Wir wissen, dass jedem Punkte π unserer C^3 eine und nur eine Curve (C_π) zugehört, deren fünf weitere Schnittpunkte ein Polarfünfeck von K^3 bilden. Alle Curven C_π constituiren eine gewisse einfache Mannigfaltigkeit, die ganz in dem Netz der apolaren Curven enthalten ist. Aber es gilt zugleich der Satz:

16. *Jede Curve zweiter Ordnung* ϱ, *welche ein Polarfünfeck auf* C^3 *ausschneidet, lässt sich nur auf eine Art als Curve* C_π *auffassen.*

Denn würde eine solche Curve, die C^3 in $\pi\pi'\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ schneidet, zugleich als Curve C_π und als $C_{\pi'}$ betrachtet werden können, so müssten die Punktgruppen

$$\pi'\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$$

$$\pi\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$$

je ein Polarfünfeck von K^3 bilden; d. h. es wäre

$$u_\alpha{}^3 \equiv \sum_1^4 k_i u_{\alpha_i}^3 + k u_\pi^3,$$

$$u_\alpha{}^3 \equiv \sum_1^4 \lambda_i u_{\alpha_i}^3 + \lambda' u_{\pi'}^3,$$

In diesen Gleichungen sind k und λ' von Null verschieden, weil sonst $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ein Polarviereck von K^3 vorstellen würde, was ausgeschlossen ist.

In Folge dessen ergiebt sich:

$$\sum_1^4 (k_i - \lambda_i) u_{\alpha_i}^3 + k u_\pi^3 - \lambda' u_{\pi'}^3 \underset{u}{\equiv} 0.$$

Ist nun $a_x{}^2 = 0$ irgend eine durch $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ gehende von dem Kegelschnitt $(\pi\pi'\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ verschiedene Curve, so folgt durch Polarisirung der letzten Gleichung nach $a_x{}^2$:

$$k a_\pi^2 u_\pi - \lambda a_{\pi'}^2 u_{\pi'} \underset{u}{\equiv} 0$$

und mithin, da $k a_\pi{}^2$ und $\lambda a_{\pi'}^2$ von Null verschieden sind $\pi = \pi'$. Jede Curve unserer Art gehört also nur zu einem Punkte π, q. e. d.

Wenn $a_{1x}^2 = 0$, $a_{2x}^2 = 0$, $a_{3x}^2 = 0$ drei independente apolare Curven von K^3 sind, mithin

$$\varkappa_1 a_{1x}^2 + \varkappa_2 a_{2x}^2 + \varkappa_3 a_{3x}^2 = 0$$

für variables $\varkappa$ alle apolaren Curven darstellt, so giebt es unendlich viele Parameterwerthe $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$, welche Curven C_π liefern. Alle diese Werthe werden durch eine algebraische Gleichung

$$F(\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3) = 0 \tag{13}$$

ausgeschieden werden.*) Wir können (13) als Gleichung einer algebraischen Curve in den Coordinaten $x_1 x_2 x_3$ ansehen und wollen dies des bequemeren Ausdrucks halber weiterhin thun, und dementsprechend auch von Punkten x dieser Curve reden.

Ist nun

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0 \tag{14}$$

die Gleichung unserer C^3, so wissen wir jetzt, dass jedem Punkt x von $f = 0$ ein und nur ein Punkt x von $F = 0$, aber auch umgekehrt, nach dem eben bewiesenen Satze jedem Punkte x von $F = 0$ *ein* Punkt x von $f = 0$ zugehört. Die beiden Curven sind also eindeutig auf einander bezogen und mithin *von gleichem Geschlecht.*

Es ist aber wohl zu beachten, dass es hier nie vorkommen kann, dass zwei einfache Punkte von $f = 0$ sich zu einem Doppelpunkt von $F = 0$ vereinigen oder umgekehrt.

In der That entspricht jedem Doppelpunkt π von $f = 0$ nach unserer Construction, die dadurch nicht abgeändert wird, nur *eine* Curve C_π, also nur ein Punkt x, welcher mithin auch Doppelpunkt von $F = 0$ sein muss, weil sonst die eindeutige Beziehung unterbrochen würde. Andere Doppel- oder Rückkehrpunkte von $F = 0$ kann es aber nicht geben. Denn sie könnten nur dadurch entstehen, dass zwei Punkten der C^3 dasselbe x, d. h. dieselbe Curve C_π zugeordnet wäre, was nach Satz 16 unmöglich ist.

Die Curve $F = 0$ hat in Folge dessen genau so viele Doppel- resp. Rückkehrpunkte, als $f = 0$ und da auch Gleichheit des Geschlechts stattfindet, so folgt Gleichheit der Ordnung. $F = 0$ *ist also eine algebraische Gleichung der dritten Ordnung.*

Es ist nun leicht, die Fünfeckscurven zu bestimmen, die durch einen beliebigen Punkt y der Ebene hindurchgehen. Soll eine solche dargestellt sein durch:

$$x_1 a_{1x}^2 + x_2 a_{2x}^2 + x_3 a_{3x}^2 = 0,$$

so ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen gelten:

$$x_1 a_{1y}^2 + x_2 a_{2y}^2 + x_3 a_{3y}^2 = 0,$$
$$F(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Es giebt drei Werthe $x_1 x_2 x_3$ welche ihnen genügen, also folgt:

17. *Durch jeden Punkt y der Ebene gehen drei Fünfeckscurven (welche demselben Büschel angehören).*

Ist y ein Punkt der Curve, so ist C_y die eine durchgehende Fünfeckscurve; das durch C_y bestimmte Polarfünfeck enthält aber den Punkt

*) In der That könnte man diese Gleichung dadurch hergestellt denken, dass man die in Satz 12 gegebene Construction algebraisch verfolgt.

y nicht; wohl aber ist y in den durch die beiden andern Curven ausgeschnittenen Fünfecken enthalten; es folgt also:

18. *Ein Punkt y der C^3 lässt sich auf zwei verschiedene Arten zu einem Polarfünfeck von K^3 ergänzen.*

Wir sehen also, dass die Zahl der ausser C_y durch einen Punkt y gehenden C_π in der That eine gerade ist, wie wir schon aus Satz 15 erkannten. Aus demselben Satz folgt aber noch:

19. *Sind $C_\pi C_{\pi'}$ die beiden ausser C_y durch einen Punkt y der C^3 gehenden Fünfeckscurven, so liegen $\pi y \pi'$ in derselben Geraden.*

Zu jedem Punkte y der C^3 gehört in Folge dessen eine bestimmte Gerade Γ_y, nämlich die Verbindungslinie der Punkte $\pi\pi'$, deren zugehörige Fünfeckscurven durch y gehen. Die Gerade Γ_y geht dabei selbst durch y hindurch. Um die Classe des Ortes zu bestimmen, den die Geraden Γ umhüllen, fragen wir uns, welche dieser Geraden ausser Γ_y einen Punkt y unserer C^3 enthalten. Soll Γ_z von dieser Art sein, so muss C_y durch den Punkt z gehen; umgekehrt, ist z Punkt des zugehörigen Fünfecks, so ist $\overline{zy} = \Gamma_z$ eine durch y gehende Gerade Γ. Die Gerade Γ_y und die Verbindungslinien von y mit den Punkten des zugehörigen Fünfecks stellen also *alle* Geraden Γ vor, die durch y gehen; d. h. *der Ort der Geraden Γ ist von der sechsten Classe.* Jede Gerade des Ortes kann aber im Allgemeinen nur zu einem Punkt y gehören; in Folge dessen ist der Ort *von demselben Geschlecht p, wie die gegebene C^3 und besitzt demnach $(10-p)$ Doppeltangenten resp. Wendetangenten.*

Ich kehre nunmehr zu der Beziehung zurück, die zwischen den Punkten von C^3 und den Fünfeckscurven bestand. Da die Curven (13) und (14) eindeutig auf einander bezogen sind, so giebt es bekanntlich eine rationale Transformation*)

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \Phi_1(x_1 x_2 x_3), \\ \varrho x_2 &= \Phi_2(x_1 x_2 x_3), \\ \varrho x_3 &= \Phi_3(x_1 x_2 x_3), \end{aligned} \tag{16}$$

durch welche die Curve $F = 0$ in $f = 0$ übergeführt wird. Die Curven $\Phi_i(x) = 0$ seien von der s^{ten} Ordnung.

Jede Gleichung

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 = 0 \tag{17}$$

scheidet aus der Gesammtheit der apolaren Curven eine zweigliedrige Gruppe (ein Büschel) aus. In demselben sind, wie wir wissen, drei Fünfeckscurven enthalten, da deren Parameter x zugleich (17) und (13) befriedigen müssen.

Wir können aber zu diesen drei Curven auch auf anderem Wege gelangen. Soll nämlich C_y eine dieser Curven sein, so ist nothwendig

*) Cfr. Clebsch und Gordan, Abelsche Functionen p. 54 ff.

und hinreichend, dass erstens y auf C^3 liege, zweitens das dem Punkt y nach (16) entsprechende Werthsystem x der Gleichung (17) genügt. y muss also die Gleichungen befriedigen:

$$(18)\qquad \begin{aligned} f(y_1 y_2 y_3) &= 0, \\ h_1\Phi_1(y) + h_2\Phi_2(y) + h_3\Phi_3(y) &= 0. \end{aligned}$$

Umgekehrt, wenn y eine gemeinschaftliche Lösung von (18) ist, welche *nicht* $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, $\Phi_3(y)$ gleichzeitig annulirt, so liefert das aus (16) bestimmbare zugehörige Werthsystem x eine der gesuchten Curven.

Da die Zahl der Lösungen drei ist, so müssen von den $3s$ Schnittpunkten der Curven (18) $3(s-1)$ feste gemeinsame Punkte von

$$(19)\qquad f(y_1 y_2 y_3) = 0,\ \Phi_1(y) = 0,\ \Phi_2(y) = 0,\ \Phi_3(y) = 0$$

vorstellen, während drei andere mit $h_1 h_2 h_3$ beweglich sind. Setzen wir nun an Stelle der Gleichung (17) die Gleichung

$$(17\,a)\qquad a_{1\xi}^2 x_1 + a_{2\xi}^2 x_2 + a_{3\xi}^2 x_3 = 0,$$

so scheidet dieselbe das Büschel der durch einen Punkt ξ hindurchgehenden apolaren Curven aus. Wenn ξ ein Punkt von C^3 ist, so wissen wir, dass das Büschel drei Fünfeckscurven enthält, deren eine C_ξ ist, während die andern zwei Punkten $\xi'\xi''$ angehören mögen. Nach unserer Betrachtung sind $y = \xi$, $y = \xi'$, $y = \xi''$ die *beweglichen* Schnittpunkte der Curven:

$$(18a)\qquad \begin{aligned} f(y_1 y_2 y_3) &= 0, \\ a_{1\xi}^2\Phi_1(y) + a_{2\xi}^2\Phi_2(y) + a_{3\xi}^2\Phi_3(y) &= 0. \end{aligned}$$

Wir wissen aber aus Satz 19, dass $\xi\xi'\xi''$ in gerader Linie liegen. Von den Schnittpunkten der beiden Curven (18a), von denen die erste von 3^{ter}, die zweite von s^{ter} Ordnung ist, liegen drei in einer Geraden ($v_y = 0$), mithin nach einem bekannten Satze die übrigen $3(s-1)$, nämlich die festen gemeinsamen Punkte der Curven (19) auf mindestens einer Curve $(s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Eine solche Curve sei $\chi(x) = 0$; dann muss sich in:

$$\lambda\left[a_{1\xi}^2\Phi_1(y) + a_{2\xi}^2\Phi_2(y) + a_{3\xi}^2\Phi_3(y)\right] - v_y\chi(y)$$

die Constante λ so bestimmen lassen, dass der Ausdruck durch $f(y)$ theilbar wird. Es giebt also ein λ und eine Function $(s-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Psi(y)$, so dass:

$$(20\,a)\qquad \lambda\left[a_{1\xi}^2\Phi_1(y) + a_{2\xi}^2\Phi_2(y) + a_{3\xi}^2\Phi_3(y)\right] + \Psi(y)f(y) \underset{y}{\equiv} v_y\chi(y).$$

Da χ von ξ ganz unabhängig ist, so werden, wenn η, ζ zwei andere Punkte von C^3 sind, zwei ganz analoge Gleichungen bestehen:

$$(20\,b)\qquad \mu\left[a_{1\eta}^2\Phi_1(y) + a_{2\eta}^2\Phi_2(y) + a_{3\eta}^2\Phi_3(y)\right] + \Psi'(y)f(y) \underset{y}{\equiv} w_y\chi(y),$$

$$(20\,c)\qquad \nu\left[a_{1\zeta}^2\Phi_1(y) + a_{2\zeta}^2\Phi_2(y) + a_{3\zeta}^2\Phi_3(y)\right] + \Psi''(y)f(y) \underset{y}{\equiv} t_y\chi(y).$$

Für Punkte y unserer C^3 $[f(y) = 0]$ ist daher:

$$a_{1\xi}^2 \Phi_1(y) + a_{2\xi}^2 \Phi_2(y) + a_{3\xi}^2 \Phi_3(y) = \frac{1}{\lambda} \chi(y) v_y,$$

$$a_{1\eta}^2 \Phi_1(y) + a_{2\eta}^2 \Phi_2(y) + a_{3\eta}^2 \Phi_3(y) = \frac{1}{\mu} \chi(y) w_y,$$

$$a_{1\zeta}^2 \Phi_1(y) + a_{2\zeta}^2 \Phi_2(y) + a_{3\zeta}^2 \Phi_3(y) = \frac{1}{\nu} \chi(y) t_y.$$

Ist also die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1\xi}^2 & a_{2\xi}^2 & a_{3\xi}^2 \\ a_{1\eta}^2 & a_{2\eta}^2 & a_{3\eta}^2 \\ a_{1\zeta}^2 & a_{2\zeta}^2 & a_{3\zeta}^2 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, was durch Wahl von $\xi\eta\zeta$ stets bewirkt werden kann,*) so sind $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, $\Phi_3(y)$ proportional zu Ausdrücken der Form:

$$\begin{aligned} A_1 v_y + B_1 w_y + C_1 t_y &= l_{1y}, \\ A_2 v_y + B_2 w_y + C_2 t_y &= l_{2y}, \\ A_3 v_y + B_3 w_y + C_3 t_y &= l_{3y}. \end{aligned} \tag{21}$$

wo $A_i\, B_i\, C_i$ Constante bedeuten; da aber nach (16), wenn y ein Punkt der C_3, x der Parameterwerth von C_y ist, die Proportion gilt:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Phi_1(y) : \Phi_2(y) : \Phi_3(y);$$

so sind $x_1\, x_2\, x_3$ proportional zu linearen Functionen von y. Es folgt also:

Die beiden Curven $f = 0$, $F = 0$ können durch eine Collineation in einander übergeführt werden.

Ist also y Punkt der C_3, so werden die Parameter $k_1\, k_2\, k_3$ der zugehörigen Fünfeckscurve nach (21) gegeben durch

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= l_{1y}, \\ \varrho x_2 &= l_{2y}, \\ \varrho x_3 &= l_{3y} \end{aligned} \tag{21a}$$

und die Fünfeckscurve selbst ist:

$$l_{1y} a_{1x}^2 + l_{2y} a_{2x}^2 + l_{3y} a_{3x}^2 = 0. \tag{22}$$

Da sie aber durch y geht, so gilt

$$l_{1y} a_{1y}^2 + l_{2y} a_{2y}^2 + l_{3y} a_{3y}^2 = 0 \tag{23}$$

für alle Punkte y der C^3. (23) ist mithin die Gleichung der Curve C^3 selbst.

*) Denn sonst müssten *alle* Punkte der C^3 auf derselben apolaren C^2 liegen; d. h. C^3 müsste jedenfalls eine apolare Curve enthalten, was ausgeschlossen.

In der That lässt sich im Allgemeinen jede zu K^3 conjugirte Curve 3. Ordnung in der Form (23) darstellen. Alle Curven dieser Art bilden nämlich eine neungliedrige Gruppe und specielle Curven derselben sind:

$$\begin{aligned} a_{1x}^2 x_1 &= 0, \quad a_{2x}^2 x_1 = 0, \quad a_{3x}^2 x_1 = 0, \\ a_{1x}^2 x_2 &= 0, \quad a_{2x}^2 x_2 = 0, \quad a_{3x}^2 x_2 = 0, \\ a_{1x}^2 x_3 &= 0, \quad a_{2x}^2 x_3 = 0, \quad a_{3x}^2 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Wenn also zwischen diesen Curven keine Dependenz stattfindet, so lässt sich jede zu K^3 conjugirte Curve 3. Ordnung ($C_x^3 = 0$) aus ihnen zusammensetzen; d. h. für jede solche Curve lassen sich Constante

$$\begin{matrix} l_{11} & l_{12} & l_{13}, \\ l_{21} & l_{22} & l_{23}, \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{matrix}$$

so bestimmen, dass:

$$C_x^3 \underset{x}{\equiv} l_{1x} a_{1x}^2 + l_{2x} a_{2x}^2 + l_{3x} a_{3x}^2.$$

Alsdann stellt (22) die Fünfeckscurve vor, die zu einem Punkte y von $C_x^3 = 0$ gehört. Man kann nachträglich auch durch Rechnung bestätigen, dass die Curve der Gleichung (22) durch die unter Satz 12 angegebene Construction erhalten werden kann.

Das oben erlangte Resultat können wir folgendermassen aussprechen:

20. *Es giebt zwischen den Punkten der Ebene und dem ternären Gebict der zu K^3 apolaren Curven eine bestimmte (durch die Gleichung* 21 a *vermittelte) Collineation, welche jedem Punkt y unserer C^3 die zugehörige Fünfeckscurve zuordnet.*

Mit Hülfe dieser Thatsache können wir leicht die Aufgabe lösen, einen Punkt y der C^3 zu einem auf der Curve liegenden Polarfünfeck von K^3 zu ergänzen. Die Aufgabe besitzt nach Satz 18 zwei Lösungen und ist erledigt, sobald man die zum Punkte y gehörige Gerade Γ_y construiren kann. Γ_y ist aber nichts anderes, als die Punktreihe, welche in unserer Collineation V dem durch y gehenden Büschel apolarer Curven zugehört, denn wir wissen ja von drei Punkten der Geraden Γ_y (nämlich von den Schnittpunkten derselben mit C^3), dass ihre zugehörigen Curven durch y hindurchgehn.

Nun sei ξ ein beliebiger Punkt der C^3, η ein Schnittpunkt seiner Fünfeckscurve, ζ der dritte Schnittpunkt von $\xi\eta$ mit unserer Curve dritter Ordnung. Da C_ξ durch η geht, so weiss ich aus Satz 15 dass C_ζ dasselbe thut, und erkenne, dass die Gerade $\overline{\xi\eta\zeta}$ der Ort der Punkte ist, welchen innerhalb V durch η gehende Curven entsprechen, also $\overline{\xi\eta\zeta} = \Gamma_\eta$. Lege ich nun durch η und y die eine durchgehende apolare

Curve $\mathfrak{C}(\eta y)$, so gehört dieselbe sowohl dem Büschel der durch η gehenden, also auch dem Büschel der durch y gehenden Curven an, und der Punkt ε, dem diese Curve in unserer Collineation entspricht, muss sowohl auf Γ_y als auf Γ_η liegen; es ist also

$$\varepsilon = \Gamma_y - \Gamma_\eta. \tag{24a}$$

Da aber vier Punkte einer Geraden und die ihnen innerhalb V entsprechenden Curven dasselbe Doppelverhältniss haben müssen, so gilt andererseits:

$$(\xi\eta\zeta\varepsilon) \curlywedge (C_\xi C_\eta C_\zeta \mathfrak{C}(\eta y)). \tag{24b}$$

Aus (24a) und (24b) ergiebt sich also folgende *Construction:*

21. *Es sei ξ ein beliebiger Punkt der Curve dritter Ordnung, C_ξ seine auf bekanntem Wege hergestellte Fünfeckscurve, η einer der Schnittpunkte derselben mit C^2, C_η die in derselben Weise, wie C_ζ, construirte Fünfeckscurve von η. Ferner sei ζ der dritte Schnittpunkt von $\overline{\xi\eta}$ und C^3 und C_ζ die durch $\eta\zeta$ gehende apolare Curve. $l_\xi l_\eta l_\zeta$ seien die Tangenten von $C_\xi C_\eta C_\zeta$ im Punkte η.*

Ist dann y ein beliebiger Punkt der C^3, so lege man durch y und η die eine durchgehende apolare Curve $\mathfrak{C}(y, \eta)$, welche in η die Tangente l_y habe und bestimme den Punkt ε der Geraden $\overline{\xi\eta\zeta}$, für welchen: (*cfr.* 24b)

$$(\xi\eta\zeta\varepsilon) \curlywedge (l_\xi l_\eta l_\zeta l_y).$$

Man ziehe $\overline{y\varepsilon} = \Gamma_y$ und bestimme die weiteren Schnittpunkte $y_1 y_2$ dieser Geraden mit C^3. Die durch yy_1 resp. yy_2 gehenden apolaren Curven $C_{y_1} C_{y_2}$ sind so beschaffen, dass jede von ihnen C^3 noch in vier Punkten trifft, welche y zu einem Polarfünfeck von K^3 ergänzen.

§ 5.

Ueber die Polarsechsecke etc. einer K^3, die auf einer zu ihr conjugirten C^3 enthalten sind.

Wenn eine Curve 2^{ter} Ordnung C^2 zu einer Curve 2^{ter} Classe K^2 conjugirt ist, so liegt auf C^2 bekanntlich nicht nur eine einfache Mannigfaltigkeit von Polardreiecken der K^2, sondern auch eine dreifache Mannigfaltigkeit von Polarvierecken derselben Curve.

Etwas ganz Analoges findet auch bei den Curven dritter Ordnung und dritter Classe statt und zwar ergiebt sich, dass wenn C^3 zu K^3 conjugirt ist, C^3 *eine dreifache Mannigfaltigkeit von Polarsechsecken, eine fünffache von Polarsiebenecken, eine Z-fache von Polarachtecken* enthält. Da ich die Untersuchungen, die sich daran anknüpfen, noch nicht habe abschliessen können, anderseits der Gegenstand nicht füglich ohne Erwähnung bleiben darf, so sei es mir gestattet, einstweilen einige diesbezügliche Resultate hier ohne Beweis mitzutheilen. Es ergiebt sich:

22. *Sind zwei Punkte $\alpha_5 \alpha_6$ der C^3 gegeben, so giebt es durch jeden Punkt α der Curve einen Kegelschnitt, der durch α_5 geht und dessen weitere Schnittpunkte $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ mit $\alpha_5 \alpha_6$ zusammen ein Polarsechseck von K^3 bilden.*

23. *Ist K^3 zu C^3 conjugirt und ist α ein beliebiger Punkt der C^3, so lassen sich zu vier beliebigen Punkten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ derselben Curve stets drei Punkte $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7$ auf eine und nur eine Art so hinzubestimmen, dass die sieben Punkte $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_7$ zugleich einen beigeordneten Rest von α und ein Polarsiebeneck von K^3 bilden.*

Zürich, im Juni 1887.

Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Functionen.

Von

Oskar Bolza in Freiburg i/Br.*).

Einleitung.

Für die Theorie der hyperelliptischen Modulfunctionen ist es wünschenswerth, eine Darstellung der Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Functionen zu besitzen. Eine derartige Darstellung ist bisher nur für einzelne specielle Invarianten vorhanden:

für die Doppelverhältnisse (Rosenhain), für gewisse irrationale Invarianten, welche mit den vierten Potenzen der geraden ϑ-Nullwerthe proportional sind (Thomae**)) und endlich für die Discriminante (Thomae**)).

Die folgende Arbeit, die auf Anregung von Herrn Professor F. Klein entstanden ist, stellt sich die Aufgabe, diese Darstellung für alle rationalen Invarianten der Binärform sechsten Grades durchzuführen. Es wird sich dabei das nach Analogie der elliptischen Functionen unerwartete Resultat ergeben, dass *nicht alle ganzen rationalen Invarianten sich als ganze Functionen der ϑ-Nullwerthe ausdrücken lassen;* vielmehr wird sich zeigen:

Die Invariante zweiten Grades (A in der Bezeichnungsweise von Salmon) ist eine gebrochene Function der ϑ-Nullwerthe, erst das Product aus A in die Discriminante Δ wird eine ganze Function.

Unter den Invarianten vierten und sechsten Grades giebt es je eine einzige, welche als ganze Function der ϑ-Nullwerthe darstellbar ist, nämlich die Invarianten:

---

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1887, Nr. 14.

**) Borchardt's Journal, Bd. 71.

$$B^* = A^2 - 100\,B$$

und

$$C^* = A^3 - 300\,AB + 250\,C.$$

Es sind dies gerade die beiden Invarianten, deren Verschwinden zusammen mit dem der Discriminante die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ausdrückt, dass f eine dreifache Wurzel besitzt*).

Die Discriminante Δ ist ganz ausdrückbar, dagegen die schiefe Invariante E nicht, sondern wieder erst das Product $E(\sqrt{\Delta})^3$.

Es wird sich daher für den vorliegenden Zweck als angemessen erweisen, an Stelle der fünf Fundamentalinvarianten von Salmon oder Clebsch die Invarianten

$$A,\ B^*,\ C^*,\ \Delta,\ E$$

zu Grunde zu legen, welche ebenfalls ein volles System für die Invarianten der Binärform sechster Ordnung bilden.

Der Umstand, dass die Invariante A sich nicht als ganze Function der ϑ-Nullwerthe darstellen lässt, drückt einen principiellen Unterschied zwischen den hyperelliptischen und den elliptischen Modulfunctionen aus, der seinen Grund darin hat, *dass bei den hyperelliptischen Modulfunctionen auch im Innern des Bereiches der Moduln* $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, *für welchen die ϑ-Reihen convergiren, solche Stellen existiren, an denen die Discriminante verschwindet, nämlich die Stelle* $\tau_{12} = 0$ *und die mit ihr äquivalenten.*

§ 1.

Bezeichnungen.

Die Binärform sechsten Grades werde bezeichnet mit:

$$f = a_0x_1^6 + 6a_1x_1^5x_2 + 15a_2x_1^4x_2^2 + 20a_3x_1^3x_2^3 + 15a_4x_1^2x_2^4 + 6a_5x_1x_2^5 + a_6x_2^6;$$

in Linearfactoren zerlegt werden wir dieselbe schreiben:

$$(1)\qquad f = a_0\prod_{i=0}^{5}(x_1 - a_ix_2),$$

oder auch

$$f = a\prod_{i=0}^{5}(p_1^{(i)}x_1 + p_2^{(i)}x_2) = \prod_i p_i.$$

Ferner seien u_1 und u_2 die beiden Integrale erster Gattung:

*) Maisano, la Sestica binaria, Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie vol. XIX, 1884 (cf. p. 50 daselbst).

$$(2)\qquad u_1 = \int \frac{x_1(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f}}, \qquad u_2 = \int \frac{x_2(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f}}$$

mit dem simultanen System primitiver Normalperioden:

	K_1	K_2	K_3	K_4
u_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
u_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

wobei wir, um später bestimmte Formeln schreiben zu können, die Periodenwege K_i in bestimmter Weise fixiren wollen: Der Integrationsweg K_1 möge die beiden Verzweigungspunkte α_2, α_1 und nur diese einschliessen, K_2 die beiden Punkte α_3, α_4, K_3 die beiden Punkte α_1, α_0, K_4 die beiden Punkte α_4, α_5.

Endlich seien:

$$(3)\qquad v_1 = \frac{\omega_{22}u_1 - \omega_{12}u_2}{p_{12}}, \qquad v_2 = \frac{-\omega_{21}u_1 + \omega_{11}u_2}{p_{12}}, \qquad (p_{12} = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}),$$

die beiden zu diesem Periodensystem gehörigen Normalintegrale erster Gattung, mit dem Periodentableau:

	K_1	K_2	K_3	K_4
v_1	1	0	τ_{11}	τ_{12}
v_2	0	1	τ_{12}	τ_{22}

Unsere Aufgabe lautet dann genauer formulirt:

Die rationalen Invarianten der Form f durch die Nullwerthe der ϑ-Functionen mit den Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} auszudrücken.

§ 2.

Transcendente Normalform für die Binärform sechster Ordnung.

Das Verfahren, das wir zur Lösung dieser Aufgabe anwenden werden, besteht darin, dass wir die Binärform auf eine geeignete Normalform bringen und an dieser die Invarianten berechnen. Es eignet sich hierzu am besten die transcendente Normalform, welche ich in meiner Dissertation*) angegeben habe. Ich habe dort gezeigt,

*) *Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung auf elliptische* etc. (Göttingen 1886, und Mathematische Annalen Bd. 28).

wie man die Binärform sechster Ordnung in der Richelot'schen Normalform durch eine lineare Transformation auf die Form bringen kann:

$$\prod_{(i)} (\vartheta_i^{(1)} y_1 + \vartheta_i^{(2)} y_2),$$

wobei zur Abkürzung:

$$\left(\frac{\partial \vartheta_\lambda(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})}{\partial v_\alpha}\right)_{v_1=0,\, v_2=0} = \vartheta_\lambda^{(\alpha)}$$

gesetzt ist, während das Productzeichen sich über die sechs ungeraden ϑ-Functionen erstreckt.

Ich will hier, ohne durch die Richelot'sche Normalform zu passiren, die lineare Transformation ableiten, welche direct von der allgemeinen Binärform sechster Ordnung zu der angegebenen Normalform führt.

Nach einer von Herrn Klein in der Abhandlung „Ueber hyperelliptische σ-Functionen" (Mathematische Annalen, Bd. 27) angegebenen Formel ist:

$$(4) \qquad p_1^{(i)} = \frac{\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial u_1}\right)_{u_1=0, u_2=0}}{C_i}, \qquad p_2^{(i)} = \frac{\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial u_2}\right)_{u_1=0, u_2=0}}{C_i},$$

wo ϑ_i die der Zerlegung

$$f = p_i \chi_i$$

zugeordnete ungerade ϑ-Function bezeichnet, während C_i den Werth hat:

$$(5) \qquad C_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_{12}}{(2\pi i)^2}} \sqrt[8]{\Delta_{\chi_i}},$$

unter Δ_{χ_i} die Discriminante der Form fünfter Ordnung χ_i verstanden.

Wir wenden jetzt auf die Variabeln x_1, x_2 die lineare Substitution an:

$$(6) \qquad \begin{aligned} x_1 &= (\omega_{11} y_1 + \omega_{12} y_2) \sqrt[8]{N}, \\ x_2 &= (\omega_{21} y_1 + \omega_{22} y_2) \sqrt[8]{N}, \end{aligned}$$

wo:

$$N = \prod_{i=0}^{5} C_i.$$

Alsdann findet man mit Hilfe der Formeln (4):

$$p_i = p_1^{(i)} x_1 + p_2^{(i)} x_2 = \frac{\sqrt[8]{N}}{C_i} (\vartheta_i^{(1)} y_1 + \vartheta_i^{(2)} y_2),$$

also

$$(7) \qquad f(x_1, x_2) = \prod_{(i)} (\vartheta_i^{(1)} y_1 + \vartheta_i^{(2)} y_2) = F(y_1, y_2).$$

Für die Determinante r der Substitution (6) hat man:

$$r^3 = p_{12}^3 N;$$

nun ist aber nach (5)

$$N = \frac{j}{2^6} \frac{p_{12}^3}{(2\pi i)^6} \sqrt{\Delta},$$

wo j eine achte Einheitswurzel, Δ das Quadrat des Differenzenproductes der Wurzeln von f bezeichnet, multiplicirt mit a_0^{10}; benutzt man aber die Formel von Herrn Thomae*):

$$\sqrt{\Delta} = \frac{(2\pi i)^{10}}{p_{12}^5} \prod_{(\alpha)} \vartheta_\alpha,$$

das Productzeichen über die Nullwerthe der zehn geraden ϑ-Functionen erstreckt, so kommt:

$$r^3 = j' \frac{\pi^4}{4} p_{12} \prod_{\alpha} \vartheta_\alpha,$$

wo j' wieder eine achte Einheitswurzel ist; für das von uns zu Grunde gelegte System von Perioden hat dieselbe den Werth 1, wie sich durch Vergleichung mit den in meiner Dissertation gegebenen Formeln ergiebt. Wir haben also das Resultat:

Die Binärform sechsten Grades $f(x_1, x_2)$ geht durch die lineare Substitution:

$$(6) \quad \begin{aligned} x_1 &= (\omega_{11} y_1 + \omega_{12} y_2) \sqrt[6]{\frac{\pi^4}{4 p_{12}^2} \prod_{(\alpha)} \vartheta_\alpha}, \\ x_2 &= (\omega_{21} y_1 + \omega_{22} y_2) \sqrt[6]{\frac{\pi^4}{4 p_{12}^2} \prod_{(\alpha)} \vartheta_\alpha} \end{aligned}$$

über in die Form:

$$F(y_1, y_2) = \prod_{(i)} (\vartheta_i^{(1)} y_1 + \vartheta_i^{(2)} y_2),$$

wo das Productzeichen sich auf die sechs ungeraden ϑ-Functionen bezieht.

Für die Determinante dieser Substitution gilt die Relation:

$$(8) \quad r^3 = \frac{\pi^4}{4} p_{12} \prod_{(\alpha)} \vartheta_\alpha.$$

§ 3.

Die Wurzeldifferenzen und die einfachsten irrationalen Invarianten als Functionen der ϑ-Nullwerthe.

Wir bezeichnen jetzt mit (i, k) die Functionaldeterminante aus den beiden Linearfactoren p_i und p_k, also:

$$(i, k) = p_1^{(i)} p_2^{(k)} - p_1^{(k)} p_2^{(i)},$$

*) Borchardt's Journal Bd. 71.

mit $(i, k)'$ die entsprechende Grösse für die transformirte Form $F(y_1, y_2)$, dann ist:

$$(i, k) = \frac{(i, k)'}{r}.$$

Nun ist aber:

$$(ik)' = \vartheta_i^{(1)} \vartheta_k^{(2)} - \vartheta_i^{(2)} \vartheta_k^{(1)}$$

und dies lässt sich nach Rosenhain auf die Form bringen:

$$\pm \pi^2 \vartheta_\alpha \vartheta_\beta \vartheta_\gamma \vartheta_\delta.$$

Indem wir den oben gefundenen Werth für r einsetzen, erhalten wir das Resultat:

Setzt man zur Abkürzung:

$$(9) \qquad \begin{cases} \prod_{(\alpha)} \vartheta_\alpha = P, \\ \frac{(2\pi i)^2}{p_{12}} = \varrho, \end{cases}$$

so drückt sich die Functionaldeterminante (i, k) der Linearfactoren p_i, p_k von f durch ϑ-Nullwerthe aus in der Form:

$$(10) \qquad (i, k) = \pm \varrho^{\frac{1}{3}} \frac{\vartheta_\alpha \vartheta_\beta \vartheta_\gamma \vartheta_\delta}{P^{\frac{1}{3}}}.$$

Das Vorzeichen und die Indices der ϑ-Functionen hängen dabei von der Wahl des zu Grunde gelegten Periodensystems ab. Bei der oben getroffenen Festsetzung erhält man die folgende Tabelle:

$$(11) \qquad \begin{cases} (01) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_0 \vartheta_{03} \vartheta_{12} \vartheta_{14}, \\ (02) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_5 \vartheta_4 \vartheta_{14} \vartheta_{34}, \\ (03) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_0 \vartheta_{01} \vartheta_{23} \vartheta_{34}, \\ (04) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_5 \vartheta_2 \vartheta_{12} \vartheta_{23}, \\ (05) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_2 \vartheta_4 \vartheta_{01} \vartheta_{03}, \\ (12) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_2 \vartheta_{01} \vartheta_{14} \vartheta_{23}, \\ (13) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_5 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_4, \\ (14) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_4 \vartheta_{01} \vartheta_{12} \vartheta_{34}, \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} (15) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_5\, \vartheta_{03}\, \vartheta_{23}\, \vartheta_{34}, \\ (23) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_2\, \vartheta_{03}\, \vartheta_{12}\, \vartheta_{34}, \\ (24) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_5\, \vartheta_0\, \vartheta_{03}\, \vartheta_{01}, \\ (25) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_0\, \vartheta_4\, \vartheta_{12}\, \vartheta_{23}, \\ (34) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_4\, \vartheta_{03}\, \vartheta_{14}\, \vartheta_{23}, \\ (35) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_5\, \vartheta_{01}\, \vartheta_{12}\, \vartheta_{14}, \\ (45) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \vartheta_0\, \vartheta_2\, \vartheta_{14}\, \vartheta_{34}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke sind nur bis auf eine dritte Einheitswurzel bestimmt; diese Unbestimmtheit fällt aber weg, so wie wir dazu übergehen aus diesen Determinanten Invarianten der Form f zu bilden, weil das Gewicht einer solchen Invariante stets durch 3 theilbar ist.

Wir wenden die Formeln (11) zunächst zur Darstellung einiger irrationaler Invarianten an, die für die Bildung rationaler Invarianten von Wichtigkeit sind.

a) An die Zerlegung von f in drei quadratische Factoren

$$f = \xi\, \eta\, \zeta$$

knüpft sich die irrationale Invariante vom Gewicht 3 : $\sqrt{\Delta_\xi}\, \sqrt{\Delta_\eta}\, \sqrt{\Delta_\zeta}$. Es ist z. B.

$$(12)\qquad (12)\,(34)\,(05) = \varrho \cdot \frac{\vartheta_2^2 \vartheta_4^2 \vartheta_{01}^2 \vartheta_{03}^2 \vartheta_{14}^2 \vartheta_{23}^2}{P}.$$

Ferner gehört hierher die Invariante vom Gewicht 3:

$$(13)\qquad \Theta = a_0 \begin{vmatrix} . & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_3 + \alpha_4, & \alpha_5 + \alpha_0 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_3\alpha_4 & \alpha_5\alpha_0 \end{vmatrix}$$

$$= (45)\,(13)\,(02) + (03)\,(24)\,(15),$$

deren Verschwinden die Bedingung dafür ausdrückt, dass die drei Punktepaare $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ in Involution liegen.

Man findet

$$(14)\qquad \Theta = \varrho\, \frac{\vartheta_5^2 \vartheta_0^2 \vartheta_{12}^2 \vartheta_{34}^2 (\vartheta_{01}^4 - \vartheta_2^4)}{P}.$$

b) Die Zerlegung von f in zwei cubische Formen:

$$f = \varphi\,\psi$$

führt zu den irrationalen Invarianten vom Gewicht 6, $\sqrt{\Delta_\varphi}\,\sqrt{\Delta_\psi}$. Es ist z. B.

(15) $$(13)\,(35)\,(51)\,(02)\,(24)\,(40) = \varrho^2\vartheta_5^4.$$

Dies sind die bekannten Formeln, welche Herr Thomae im 71ten Bande von Borchardt's Journal angegeben hat*).

c) Endlich mag hier noch die Quadratwurzel aus der Discriminante angegeben werden:

(16) $$\sqrt{\Delta} = \prod_{(i<k)} (i, k) = \varrho^5 P.$$

§ 4.

Die rationalen Invarianten A, B^*, C^*, Δ, E als Functionen der ϑ-Nullwerthe.

Aus diesen irrationalen Invarianten kann man nun leicht rationale Invarianten von vorgeschriebenem Grad in den Coefficienten zusammensetzen. Ich will hier den Weg angeben, wie man auf diese Weise zur Darstellung der Invarianten A, B^*, C^*, Δ, E gelangt, und verweise für die fertigen Formeln auf die Schlusszusammenstellung im § 7.

Eine Invariante *zweiten Grades*, die sicher nicht identisch verschwindet, erhalten wir in der Form:

$$\sum \Delta_\xi\,\Delta_\eta\,\Delta_\zeta,$$

wo die Summation sich auf die 15 Werthe der unter dem Summenzeichen stehenden Function bezieht. Diese Invariante muss bis auf einen Zahlenfactor, für den man leicht den Werth -240 findet, mit der Invariante A identisch sein.

Ferner hat man für die *Discriminante* Δ die Formel von Herrn Thomae:

$$\Delta = \prod (ik)^2 = \varrho^{10} P^2.$$

Die *schiefe Invariante* E ist bis auf einen Zahlenfactor gleich dem Product aus den 15 Werthen, welche die irrationale Invariante Θ — vom Vorzeichen abgesehen — bei allen möglichen Vertauschungen der Wurzeln annimmt**).

---

*) Vergl. auch Staude, Mathematische Annalen, Bd. 24, pg. 286.

**) Vgl. Salmon, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, Deutsche Ausgabe pg. 355.

Ebenso kann man sich leicht rationale Invarianten *vierten und sechsten Grades* aus unsern irrationalen Invarianten zusammensetzen. Will man speciell solche Invarianten erhalten, welche sich als *ganze* Functionen der ϑ-Nullwerthe ausdrücken lassen, so hat man von den irrationalen Invarianten $\sqrt{\Delta_\varphi}\,\sqrt{\Delta_\psi}$ von Herrn Thomae auszugehen.

Quadrirt man die 10 Gleichungen (15) und addirt sie, so erhält man:

$$\sum \Delta_\varphi \Delta_\psi = \varrho^4 \sum_\alpha \vartheta_\alpha^8.$$

Die linke Seite stellt dann in der That eine rationale, nicht identisch verschwindende Invariante vom Gewicht 12, als vom Grad 4 in den Coefficienten von f dar, die wir bis auf einen constanten Factor mit B^* bezeichnen wollen.

Eine rationale Invariante *sechsten Grades* kann man aus den irrationalen Invarianten $\sqrt{\Delta_\varphi}\,\sqrt{\Delta_\psi}$ auf folgende Weise zusammensetzen:

Greift man irgend eine der 10 irrationalen Invarianten (15) heraus, z. B. die folgende:

$$\varphi_0 = (03)\,(35)\,(50)\,(12)\,(24)\,(41) = \varrho^2 \vartheta_{01}^4$$

und wendet darauf die successiven Potenzen der cyklischen Permutation von der Periode 5 an:

$$S = (0,\ 1,\ 4,\ 3,\ 2),$$

so erhält man ausser φ_0 noch vier andere Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Die Summe:

$$\begin{aligned}\Phi_5 &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \\ &= \varrho^2(\vartheta_{01}^4 + \vartheta_{23}^4 - \vartheta_2^4 - \vartheta_5^4 - \vartheta_0^4)\ ^*)\end{aligned}$$

bleibt dann ungeändert bei den Potenzen der Substitution S, aber auch noch bei der cyklischen Permutation von der Periode 4:

$$T = (1,\ 4,\ 2,\ 3)$$

und bei der cyklischen Permutation von der Periode 6:

$$U = (0,\ 5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Denn bei T geht Φ_5 über in:

$$\varrho^2(-\vartheta_{03}^4 - \vartheta_{14}^4 + \vartheta_4^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{12}^4),$$

bei U in:

$$\varrho^2(-\vartheta_{34}^4 - \vartheta_2^4 - \vartheta_{03}^4 + \vartheta_{01}^4 - \vartheta_0^4),$$

und beide Ausdrücke erweisen sich mit Rücksicht auf die Rosenhain'schen Relationen:

---

*) Die Function Φ geht — abgesehen von dem Factor ϱ^2 — aus der von Herrn Maschke in seiner Arbeit „Ueber die lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln" mit demselben Buchstaben bezeichneten Function hervor, wenn man in derselben die Borchardt'schen Moduln durch die ϑ-Nullwerthe ausdrückt, und ist auf diesem Wege gefunden worden. (Vgl. § 8.)

$$\vartheta_{01}^4 - \vartheta_2^4 = \vartheta_4^4 - \vartheta_{03}^4, \qquad \vartheta_{23}^4 - \vartheta_5^4 = -\vartheta_{03}^4 - \vartheta_{34}^4,$$
$$-\vartheta_2^4 - \vartheta_0^4 = -\vartheta_{34}^4 - \vartheta_{14}^4, \qquad -\vartheta_5^4 + \vartheta_{01}^4 = -\vartheta_{14}^4 - \vartheta_{12}^4,$$
$$-\vartheta_0^4 + \vartheta_{23}^4 = -\vartheta_{12}^4 + \vartheta_4^4$$

als identisch mit dem ursprünglichen Ausdruck Φ_5.

Die Function Φ_5 bleibt daher auch ungeändert bei derjenigen Gruppe von Permutationen, deren Erzeugende die drei Permutationen S, T, U sind; diese drei Permutationen erzeugen aber die bekannte *dreifach transitive Gruppe von* 120 *Permutationen* (vgl. Serret, Cours d'Algèbre supérieure, II, pg. 325 und 432). Φ_5 ist also eine *sechswerthige* Function der Wurzeln.

Bilden wir daher die Summe der dritten Potenzen dieser sechs Werthe:

$$\sum \Phi_i^3,$$

so ist dies eine rationale Invariante von f vom Grad sechs in den Coefficienten, die, wie sich im § 5 ergeben wird, nicht identisch verschwindet, und die wir bis auf einen Zahlenfactor mit C^* bezeichnen.

Es bleibt nun noch übrig, die bisher nur als Functionen der Wurzeln definirten Invarianten B^* und C^* durch die Invarianten A, B, C von Salmon auszudrücken, sowie der Nachweis, dass B^* und C^* die einzigen rationalen Invarianten vierten resp. sechsten Grades von f sind, welche als ganze Functionen der ϑ-Nullwerthe darstellbar sind.

§ 5.

Bestimmung der Anfangsterme der Entwicklungen der Salmon'schen Invarianten A, B, C nach Potenzen von q_1, q_2.

Um die Invarianten B^*, C^* durch die Salmon'schen Invarianten auszudrücken, bestimmen wir mit Hilfe der Richelot'schen Normalform die Anfangsterme der Entwicklungen von A, B, C nach Potenzen von: $q_1 = e^{\pi i \tau_{11}}$ und $q_2 = e^{\pi i \tau_{22}}$.

Die lineare Substitution, welche die Form f in die zu dem oben gewählten System von Perioden gehörige Normalform überführt, lautet:

$$(17) \qquad x_1' = \frac{(3,5)}{\sqrt[4]{M}} p_4, \qquad x_2' = \frac{(3,4)}{\sqrt[4]{M}} p_5,$$

deren inverse Substitution wir schreiben wollen:

$$(18) \qquad x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2', \qquad x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2' \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = r').$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$M = \frac{(34)^4\,(45)^4\,(35)}{(04)\,(14)\,(24)},$$

und der sechsten Wurzel ist irgend einer ihrer sechs Werthe beizulegen.

Durch die Substitution (17) geht die Form f über in:

$$(19)\quad f'(x_1'x_2') = x_1'x_2'(x_2'-x_1')\,(x_2-\varkappa^2x_1')\,(x_2'-\lambda^2x_1')\,(x_2'-\mu^2x_1') = f(x_1, x_2),$$

wo:

$$(20)\quad \begin{cases} \varkappa^2 = \dfrac{(34)\,(25)}{(35)\,(24)} = \dfrac{\vartheta_{23}^2\vartheta_4^2}{\vartheta_{01}^2\vartheta_5^2} = 8(1+\cos\pi\tau_{12})\,q_2[1+\cdots], \\ \lambda^2 = \dfrac{(34)\,(15)}{(35)\,(14)} = \dfrac{\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{12}^2\vartheta_{01}^2} = 8(1+\cos\pi\tau_{12})\,q_2[1+\cdots], \\ \mu^2 = \dfrac{(34)\,(05)}{(35)\,(04)} = \dfrac{\vartheta_{03}^2\vartheta_4^2}{\vartheta_{12}^2\vartheta_5^2} = 16q_2[1+\cdots]. \end{cases}$$

Für die Determinante r' ergiebt sich:

$$(21)\quad r'^3 = \frac{(34)\,(45)}{(35)^2\,(04)\,(14)\,(24)},$$

oder mit Hilfe der Formeln (11):

$$(22)\quad r'^3 = \frac{P}{\varrho\,\vartheta_5^4\,\vartheta_{01}^4\,\vartheta_{12}^4}.$$

Für die Coefficienten a' der Form f' findet man:

$$a_0' = 0, \quad a_6' = 0, \quad a_5' = \frac{1}{6},$$

$$a_1' = \frac{\varkappa^2\lambda^2\mu^2}{6} = \frac{(1+\cos\pi\tau_{12})^2}{3}\cdot(8q_2)^3+\cdots,$$

$$a_2' = -\frac{\varkappa^2\lambda^2+\mu^2\varkappa^2+\mu^2\lambda^2+\varkappa^2\lambda^2\mu^2}{15} = -\frac{(1+\cos\pi\tau_{12})\,(5+\cos\pi\tau_{12})}{15}\cdot(8q_2)^2+\cdots,$$

$$a_3' = \frac{\varkappa^2+\lambda^2+\mu^2+\varkappa^2\lambda^2+\lambda^2\mu^2+\mu^2\varkappa^2}{20} = \frac{(2+\cos\pi\tau_{12})}{10}\cdot 8q_2+\cdots,$$

$$a_4' = -\frac{1+\varkappa^2+\lambda^2+\mu^2}{15} = -\frac{1}{15}+\cdots.$$

Hiernach kann man die Anfangsterme der Entwicklungen der Invarianten A', B', C' mit Hilfe der von Salmon gegebenen Formeln berechnen; *man braucht dabei nur diejenigen Terme zu berücksichtigen, welche keine der Grössen a_0', a_5', a_6' enthalten*, was die Rechnung vereinfacht.

Beachtet man weiter, dass

$$A = \frac{1}{r'^6} A', \quad B = \frac{1}{r'^{12}} B', \quad C = \frac{1}{r'^{16}} C'$$

und dass die Entwicklung von $\frac{1}{r'^3}$ beginnt mit:

$$\frac{1}{r^3} = -\frac{\varrho}{\sin \pi \tau_{12} \cdot q_2} \left[\frac{i}{8} + \cdots\right],$$

so erhält man für die Anfangsterme der Invariante A, B, C, die wir durch $[A], [B], [C]$ bezeichnen wollen, die Werthe:

$$(23) \quad \begin{cases} [A] = \frac{\varrho^2}{30^2 \sin^2 \pi \tau_{12}} \cdot 30[2 + \cos^2 \pi \tau_{12}], \\ [B] = \frac{\varrho^4}{30^4 \sin^4 \pi \tau_{12}} [16 + 76 \cos^2 \pi \tau_{12} - 11 \cos^4 \pi \tau_{12}], \\ [C] = -\frac{\varrho^6}{30^6 \sin^6 \pi \tau_{12}} 8 [64 - 894 \cos^2 \pi \tau_{12} + 138 \cos^4 \pi \tau_{12} \\ \qquad\qquad - 37 \cos^6 \pi \tau_{12}]. \end{cases}$$

Wir knüpfen hieran zunächst die Bemerkung, dass keine der Invarianten A, B, C sich als *ganze* Function der ϑ-Nullwerthe darstellen lassen kann, weil jeder der drei Anfangsterme für $\tau_{12} = 0$ unendlich wird, während die ϑ-Nullwerthe endliche Werthe behalten.

Weiterhin benutzen wir nun diese Anfangsterme dazu, die Invarianten B^*, C^* durch A, B, C auszudrücken. Wir wissen, dass der Ausdruck

$$\varrho^4 \sum_\alpha \vartheta_\alpha^8$$

eine rationale Invariante vierten Grades ist, also sich ausdrücken lassen muss in der Form:

$$\varrho^4 \sum_\alpha \vartheta_\alpha^8 = mA^2 + nB;$$

wir entwickeln beiderseits nach Potenzen von q_1 und q_2 und setzen die Anfangsterme einander gleich. Dies liefert drei lineare Gleichungen zwischen m und n, welche durch das *eine* Werthsystem:

$$m = 1620, \qquad n = 1620 \cdot (-100)$$

befriedigt werden, sodass man zugleich eine Controlle hat. Wir definiren jetzt:

$$A^2 - 100\, B = B^*,$$

so ist

$$B^* = \frac{1}{1620} \varrho^4 \sum_\alpha \vartheta_\alpha^8.$$

Genau ebenso findet man, wieder mit einer Controlle, dass

$$\sum \Phi_i^3 = 2^2 \cdot 3^7 \cdot 5\,(A^3 - 300 AB + 250 C)$$

und wir setzen wieder

$$A^3 - 300AB + 250C = C^*.$$

Die Rechnung zeigt zugleich, dass die Invarianten B^* und C^* die einzigen rationalen Invarianten vierten, resp. sechsten Grades sind, welche sich als ganze Functionen der ϑ-Nullwerthe ausdrücken lassen.

§ 6.

Excurs: Neuer Beweis der Thomae'schen Formeln.

Bei der Wichtigkeit der Thomae'schen Formeln für die Nullwerthe der geraden ϑ-Functionen, mag es gestattet sein, hier einen neuen Beweis für dieselben einzuschalten, der sich an die Reduction der allgemeinen Binärform 6ten Grades auf die Richelot'sche Normalform anschliesst, und der nichts weiter als die Formeln von Rosenhain benutzt.

Man kann die dritte Potenz der Determinante r', ohne auf unsere Formeln (11) zurückzugehen, auf folgendem Wege durch die ϑ-Nullwerthe ausdrücken:

Bezeichnen wir mit u_1', u_2' die beiden Integrale:

$$u_1' = \int \frac{x_1'(x_2'dx_1' - x_1'dx_2')}{\sqrt{f'(x_1', x_2')}},$$

$$u_2' = \int \frac{x_2'(x_2'dx_1' - x_1'dx_2')}{\sqrt{f'(x_1', x_2')}},$$

so ist*):

$$u_1 = r(\alpha u_1' + \beta u_2'),$$

$$u_2 = r(\gamma u_1' + \delta u_2');$$

die Determinante dieser linearen Substitution ist r'^3.

Andererseits hat man:

$$u_1 = \omega_{11}v_1 + \omega_{12}v_2,$$

$$u_2 = \omega_{21}v_1 + \omega_{22}v_2,$$

und:

$$v_1 = C_{11}u_1' + C_{12}u_2',$$

$$v_2 = C_{21}u_1' + C_{22}u_2',$$

wo die Grössen C_{ik} nach Rosenhain in bekannter Weise durch die Nullwerthe gerader ϑ-Functionen und die Nullwerthe der partiellen Ableitungen ungerader ϑ-Functionen ausdrückbar sind.

Hieraus folgt durch Composition der Determinanten:

$$r'^3 = p_{12}(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}),$$

*) Vgl. F. Klein, hyperelliptische Sigmafunctionen, Math. Ann. Bd. 27, pag. 437.

oder da nach Rosenhain:

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = -\frac{P}{4\pi^2\vartheta_{12}^4\vartheta_{01}^4\vartheta_5^4},$$

so haben wir nach (21):

$$r'^3 = \frac{(34)(45)}{(35)^2(04)(14)(24)} = \frac{P}{\varrho\vartheta_5^4\vartheta_{01}^4\vartheta_{12}^4},$$

in Uebereinstimmung mit (22).

Beachtet man nun, dass nach Rosenhain:

$$\lambda_\varkappa^2\mu_\varkappa^2\mu_\lambda^2 = \frac{(21)(20)(10)(34)^3(54)^3}{(35)^3(24)^2(14)^2(04)^2} = \frac{P^2\vartheta_{14}^4}{\vartheta_{12}^8\vartheta_{01}^8\vartheta_5^8},$$

so findet man durch Vergleichung mit der vorigen Gleichung die Thomae'sche Formel:

$$(01)(12)(20)(45)(53)(34) = \varrho^4\vartheta_{14}^4,$$

woraus sich dann nach den Rosenhain'schen Formeln für die Quotienten $\frac{\vartheta_\alpha^4}{\vartheta_\beta^4}$ die übrigen neun Formeln ergeben.

§ 7.

Zusammenstellung der Resultate.

Es folgen hier die vollständigen Ausdrücke der rationalen Invarianten A, B^*, C^*, Δ, E, wie sie sich auf dem bisher beschriebenen Wege ergeben haben.

Wir gebrauchen, wie bisher, die Abkürzungen:

$$(i,k) = p_1^{(i)}p_2^{(k)} - p_1^{(k)}p_2^{(i)},$$

$$\varrho = \frac{(2\pi i)^2}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}},$$

$$P = \prod_\alpha \vartheta_\alpha,$$

wo das Productzeichen sich über die zehn geraden ϑ-Nullwerthe erstreckt. Die Buchstaben A, B, C, E bedeuten die von Salmon so bezeichneten Invarianten.

(24)
$$1.\quad A = -\frac{1}{2^4\cdot 3\cdot 5}\sum (ik)^2(i'k')^2(i''k'')^2$$
$$= \frac{\varrho^2}{2^4\cdot 3\cdot 5}\,\frac{\sum\vartheta_\alpha^4\vartheta_\beta^4\vartheta_\gamma^4\vartheta_\delta^4\vartheta_\varepsilon^4\vartheta_\zeta^4}{P^2}.$$

Dabei erstreckt sich die Summation einerseits über die 15 Werthe der Function $(ik)^2(i'k')^2(i''k'')^2$, andererseits über die 15 Sextupel, welche

die 15 Göpel'schen Quadrupel aus geraden ϑ-Functionen zum Product aller geraden ϑ-Functionen ergänzen.

2. $B^* = A^2 - 100\,B$

$$(25)\qquad \begin{aligned} &= \frac{1}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5} \sum (ik)^2\,(kl)^2\,(li)^2\,(i'k')^2\,(k'l')^2\,(l'i')^2 \\ &= \frac{\varrho^4}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5} \sum_{\alpha} \vartheta_\alpha^8. \end{aligned}$$

Dabei erstreckt sich die Summation einerseits über die zehn Werthe der Function $(ik)^2\,(kl)^2\,(li)^2\,(i'k')^2\,(k'l')^2\,(l'i')^2$, andererseits über die zehn geraden ϑ-Nullwerthe.

3. Wendet man auf die Function:

$$\varphi_0 = (03)\,(35)\,(50)\,(12)\,(24)\,(41)$$

die successiven Potenzen der cyklischen Vertauschung von der Periode 5 an:

$$(0,\ 1,\ 4,\ 3,\ 2)$$

und addirt die so entstehenden Werthe $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, so ist die Function

$$\Phi_5 = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

sechswerthig. Es ist alsdann:

$$(26)\qquad \left\{ \begin{aligned} C^* &= A^3 - 300\,AB + 250\,C \\ &= \frac{1}{2^2 \cdot 3^7 \cdot 5} \sum_i \Phi_i^3 \\ &= \frac{\varrho^6}{2^2 \cdot 3^7 \cdot 5} [(-2\vartheta_5^4 + \vartheta_0^4 + \vartheta_{12}^4 + \vartheta_{34}^4)^3 \\ &+ (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_{23}^4 + \vartheta_4^4 + \vartheta_{01}^4)^3 + (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_{14}^4 + \vartheta_{03}^4 + \vartheta_2^4)^3 \\ &- (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_2^4 + \vartheta_{01}^4 + \vartheta_{34}^4)^3 - (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_{14}^4 + \vartheta_{23}^4 + \vartheta_0^4)^3 \\ &- (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_{03}^4 + \vartheta_4^4 + \vartheta_{12}^4)^3]. \end{aligned} \right.$$

$$(27)\qquad \begin{aligned} 4.\quad \Delta &= \prod (ik)^2 \\ &= \varrho^{10} P^2. \end{aligned}$$

5. Die Function:

$$\psi_0 = a_0 [\alpha_5 \alpha_0 (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) + \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_0) + \alpha_3 \alpha_4 (\alpha_5 + \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2)]$$

nimmt bei den Vertauschungen der Wurzeln, abgesehen vom Vorzeichen, 15 verschiedene Werthe an. Wir fixiren die Vorzeichen so, dass die 15 Werthe alle aus den drei Functionen:

$$\begin{aligned}
&a_0[\alpha_5\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)+\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4-\alpha_5-\alpha_0)\\
&\qquad\qquad+\alpha_3\alpha_4(\alpha_5+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)],\\
&a_0[\alpha_5\alpha_0(\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2-\alpha_4)+\alpha_1\alpha_3(\alpha_2+\alpha_4-\alpha_5-\alpha_0)\\
&\qquad\qquad+\alpha_2\alpha_4(\alpha_5+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_3)],\\
&a_0[\alpha_5\alpha_0(\alpha_1+\alpha_4-\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_1\alpha_4(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5-\alpha_0)\\
&\qquad\qquad+\alpha_2\alpha_3(\alpha_5+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_4)]
\end{aligned}$$

durch Anwendung der Potenzen der cyklischen Permutation:

$$(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

hervorgehen. Dann ist:

$$E=-\frac{1}{2^9\cdot 3^9\cdot 5^{10}}\prod_i \psi_i. \tag{28}$$

Jedem Factor ψ_i ist ein Göpel'sches Quadrupel aus geraden ϑ-Functionen zugeordnet und diesem wieder entspricht eine Rosenhain'sche Doppelrelation zwischen den vierten Potenzen der sechs nicht an dem Göpel'schen Quadrupel betheiligten ϑ-Nullwerthe, von der Form:

$$\vartheta_\alpha^4 \pm \vartheta_\beta^4 = \vartheta_{\alpha'}^4 \pm \vartheta_{\beta'}^4 = \vartheta_{\alpha''}^4 \pm \vartheta_{\beta''}^4.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Werth der drei hier einander gleichgesetzten Ausdrücke mit $\pm R_i$, so ist, bei passender Wahl der Vorzeichen:

$$E=-\frac{\varrho^{15}}{2^9\cdot 3^9\cdot 5^{10}}\,\frac{\prod_i R_i}{P^3}. \tag{29}$$

Ausgeschrieben und zeichenrichtig lauten die 15 Werthe R_i:

$$\begin{aligned}
R_0&=\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4=\vartheta_4^4-\vartheta_{03}^4=\vartheta_{23}^4-\vartheta_{14}^4,\\
R_1&=\vartheta_{12}^4-\vartheta_0^4=\vartheta_4^4-\vartheta_{23}^4=\vartheta_{03}^4-\vartheta_{14}^4,\\
R_2&=\vartheta_5^4-\vartheta_{34}^4=\vartheta_{03}^4+\vartheta_{23}^4=\vartheta_4^4+\vartheta_{14}^4,\\
R_3&=\vartheta_{34}^4-\vartheta_0^4=\vartheta_{01}^4-\vartheta_{23}^4=\vartheta_2^4-\vartheta_{14}^4,\\
R_4&=\vartheta_5^4-\vartheta_{12}^4=\vartheta_2^4+\vartheta_{23}^4=\vartheta_{01}^4+\vartheta_{14}^4,\\
R_5&=\vartheta_{34}^4-\vartheta_2^4=\vartheta_{12}^4-\vartheta_{03}^4=\vartheta_0^4-\vartheta_{14}^4,\\
R_6&=\vartheta_5^4-\vartheta_{01}^4=\vartheta_0^4+\vartheta_{03}^4=\vartheta_{12}^4+\vartheta_{14}^4,\\
R_7&=\vartheta_0^4+\vartheta_2^4=\vartheta_5^4-\vartheta_4^4=\vartheta_{34}^4+\vartheta_{14}^4,\\
R_8&=\vartheta_{34}^4-\vartheta_{01}^4=\vartheta_{12}^4-\vartheta_4^4=\vartheta_0^4-\vartheta_{23}^4,\\
R_9&=\vartheta_{12}^4+\vartheta_{01}^4=\vartheta_{34}^4+\vartheta_4^4=\vartheta_5^4-\vartheta_{14}^4,\\
R_{10}&=\vartheta_5^4-\vartheta_2^4=\vartheta_0^4+\vartheta_4^4=\vartheta_{12}^4+\vartheta_{23}^4,
\end{aligned}$$

$$R_{11} = \vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4 = \vartheta_5^4 - \vartheta_{03}^4 = \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{23}^4,$$
$$R_{12} = \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{12}^4 = \vartheta_{01}^4 - \vartheta_4^4 = \vartheta_2^4 - \vartheta_{03}^4,$$
$$R_{13} = \vartheta_2^4 + \vartheta_{12}^4 = \vartheta_5^4 - \vartheta_{23}^4 = \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{03}^4,$$
$$R_{14} = \vartheta_5^4 - \vartheta_0^4 = \vartheta_{01}^4 + \vartheta_{03}^4 = \vartheta_2^4 + \vartheta_4^4.$$

§ 8.

Uebergang zu den Borchardt'schen Moduln.

Der Vollständigkeit halber füge ich hier noch die Darstellung der rationalen Invarianten durch die *Borchardt'schen Moduln bei*, d. h. durch die Nullwerthe von vier ein Göpel'sches Quadrupel bildenden ϑ-Functionen mit den Moduln $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$, $2\tau_{22}$, wodurch die vorliegende Arbeit in engen Zusammenhang gebracht wird mit der bereits genannten Arbeit von Herrn Maschke, „Ueber die lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln“*). Wir wählen für die Borchardt'schen Moduln die Grössen:

$$z_1 = \vartheta_5(0, 0 \mid 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}), \quad z_2 = \vartheta_{23}(0, 0 \mid 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}),$$
$$z_3 = \vartheta_{01}(0, 0 \mid 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}), \quad z_4 = \vartheta_4(0, 0 \mid 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}).$$

Dann drücken sich die Quadrate der Nullwerthe mit den Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ in folgender Weise durch die Grössen z aus:

$$(30)\quad \begin{cases} \vartheta_5^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2, & \vartheta_{12}^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2, \\ \vartheta_0^2 = z_1^2 + z_2^2 - z_0^2 - z_4^2, & \vartheta_{34}^2 = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2, \\ \vartheta_{23}^2 = 2z_1z_2 + 2z_3z_4, & \vartheta_{14}^2 = 2z_1z_2 - 2z_3z_4, \\ \vartheta_{01}^2 = 2z_1z_3 + 2z_2z_4, & \vartheta_2^2 = 2z_1z_3 - 2z_2z_4, \\ \vartheta_4^2 = 2z_1z_4 + 2z_2z_3, & \vartheta_{03}^2 = 2z_1z_4 - 2z_2z_3. \end{cases}$$

Die Uebertragung der in § 7 gegebenen Ausdrücke für die Invarianten in die z ergiebt hiernach das folgende Resultat, welches ich der erwähnten Arbeit von Herrn Maschke entnehme:

Bezeichnet man:

$$(31)\quad \begin{cases} F_8 = \sum z_i^8 + 14 \sum z_i^4 z_k^4 + 168\, z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2, \\ F_{12} = \sum z_i^{12} - 33 \sum z_i^8 z_k^4 + 330 \sum z_i^4 z_k^4 z_l^4 \\ \qquad\qquad + 792\, z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 \sum z_i^4, \\ D_{20} = 64(z_1^2 z_2^2 - z_3^2 z_4^2)(z_1^2 z_3^2 - z_2^2 z_4^2)(z_1^2 z_4^2 - z_2^2 z_3^2) \\ \qquad\qquad \times \Big[\sum z_i^8 - 2 \sum z_i^4 z_k^4 + 8 z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2\Big], \end{cases}$$

*) Dieselbe findet sich hier nachstehend abgedruckt. D. Red.

mit $H(F_8)$ die durch $8^4 \cdot 7^4$ dividirte Hesse'sche Determinante von F_8 und endlich mit R_i die biquadratische Form der z, welche aus dem einzelnen R_i von pg. 493—494 unmittelbar durch die Substitutionen (30) hervorgeht, so ist:

$$(32) \qquad \begin{cases} A = \frac{2^5 \cdot \varrho^2}{3^4 \cdot 5} \frac{H(F_8)}{D_{20}}, \\ B^* = \frac{\varrho^4}{3^4 \cdot 5} F_8, \\ C^* = -\frac{\varrho^6}{3^6 \cdot 5} F_{12}, \\ \Delta = \varrho^{10} D_{20}, \\ E = -\frac{\varrho^{15}}{2^8 \cdot 3^9 \cdot 5^{10}} \frac{\prod_i R_i}{(\sqrt{D_{20}})^3}, \end{cases}$$

Göttingen, im Juni 1887.

Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln.

Von

Heinrich Maschke in Berlin.*)

Die in der Ueberschrift bezeichnete Gruppe ist zunächst gänzlich ausser Zusammenhang mit der Theorie der hyperelliptischen Functionen von Herrn Klein**) aus der Liniengeometrie abgeleitet worden. Später***) hat Herr Klein gezeigt, dass die sogenannten Borchardt'schen Moduln der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p = 2$ sich nach derselben Gruppe linear substituiren, wodurch dann die Gruppe, welche bisher nur den Vorzug hatte, eine der wenigen Gruppen linearer Substitutionen von *endlicher* Ordnungszahl zu sein — und zwar, von einfachsten Fällen abgesehen, die erste, welche man im quaternären Gebiet kennen lernte — wesentlich an Interesse gewann. Dieses Interesse wird für viele Mathematiker im Vordergrund stehen, wenn es sich, wie es auf Anregung von Herrn Professor Klein im folgenden geschehen soll, darum handelt, *das volle System invarianter Formen* für diese Gruppe aufzustellen.

§ 1.

Definition der Gruppe.

Die Ausdrücke:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = p_{12} + p_{34}, & x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}), \\ x_3 = p_{13} + p_{42}, & x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42}), \\ x_5 = p_{14} + p_{23}, & x_6 = \frac{1}{i}(p_{14} - p_{23}), \end{cases}$$

wo die sechs Grössen p_{ik} in üblicher Bezeichnung die Coordinaten der

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Nachrichten d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen 1887, Nr. 14.

**) Math. Ann. Bd. II, pag. 198 u. 366; Bd. IV, pag. 356 ff.

***) Vorlesung über hyperell. Functionen; gehalten in Leipzig Sommer 1885.

geraden Linie im Raume bedeuten, stellen, gleich Null gesetzt, sechs lineare Complexe, die *Fundamentalcomplexe*, dar. In Folge der, zwischen den p_{ik} bestehenden Identität sind dabei die x_i an die Gleichung gebunden:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0.$$

Der Inbegriff dieser sechs Complexe wird durch beliebige Vertauschung und beliebigen Vorzeichenwechsel der Grössen x_i nicht geändert.*) Durch eine jede dieser beiden „Elementaroperationen" wird aber der Raum in bestimmter Weise einer linearen Transformation unterworfen, welche folgendermassen näher präcisirt wird:

Jede aus einer geraden Anzahl jener Elementaroperationen zusammengesetzte Umänderung der x_i bewirkt eine Collineation, jede aus einer ungeraden Anzahl zusammengesetzte eine dualistische Umformung des Raumes.

Leiten wir so aus den 720 Permutationen und den 64 Zeichenwechseln der x_i alle möglichen Collineationen ab, so entsteht eine wohldefinirte *endliche* Collineationsgruppe. Indem wir diese Collineationen homogen in den Punktcoordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 mit der Substitutionsdeterminante $+1$ schreiben, bekommen wir *eine endliche quaternäre Gruppe linearer Substitutionen*, die wir mit G bezeichnen wollen, und diese ist es, welche der folgenden Untersuchung zu Grunde gelegt werden soll.

Wir stellen zunächst die Ordnung dieser Gruppe fest. Von den $64 \cdot 720$ Umänderungen der x_i liefert dem oben ausgesprochenen Satze zu Folge nur die Hälfte Collineationen des Raumes. Da die Liniencoordinaten:

$$p_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$$

aber quadratisch aus den Punktcoordinaten zusammengesetzt sind, so entsprechen *einer* Umänderung der x_i immer *zwei* Substitutionen der z_i, die sich von einander nur durch simultanen Vorzeichenwechsel unterscheiden, und auch nicht mehr als zwei; *mithin ist die Anzahl der Substitutionen unserer Gruppe, also die Ordnung von G:*

$$N = 64 \cdot 720.$$

In der mit G demnach hemiëdrisch isomorphen Gruppe der x_i bilden die aus einer geraden Anzahl von Vertauschungen, verbunden mit einer geraden Anzahl von Vorzeichenwechseln zusammengesetzten Operationen eine ausgezeichnete Untergruppe, und in dieser ist wieder die aus den Operationen, welche eine gerade Anzahl von Vorzeichen-

*) Vergl. betreffs dieser Gruppe Reichhardt, Math. Ann. Bd. 28 Ueber die Normirung der Borchardt'schen Moduln.

wechseln allein enthalten, bestehende Untergruppe von der Ordnung 32 ausgezeichnet. *In Folge des Isomorphismus schliessen wir daher für G auf die Existenz einer ausgezeichneten Untergruppe H_1 von der Ordnung $\frac{1}{2}N$, und eine in dieser ausgezeichneten Untergruppe H_2 von der Ordnung 64.*

Um zu bestimmten Formeln überzugehen, legen wir das Fundamentaltetraeder (12), (34), (56) als Coordinatentetraeder zu Grunde*), und schreiben nun zunächst die 64 Substitutionen von H_2 auf. Von diesen lauten acht folgendermassen:

$$(2\,a)\qquad \begin{cases} z_1' = \pm z_1 \\ z_2' = \pm z_2 \\ z_3' = \pm z_3 \\ z_4' = \pm z_4 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1' = \pm z_1 \\ z_2' = \pm z_2 \\ z_3' = \mp z_3 \\ z_4' = \mp z_4 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1' = \pm z_1 \\ z_2' = \mp z_2 \\ z_3' = \pm z_3 \\ z_4' = \mp z_4 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1' = \pm z_1 \\ z_2' = \mp z_2 \\ z_3' = \mp z_3 \\ z_4' = \pm z_4 . \end{cases}$$

Zu diesen acht Formeln — es sind immer gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen zu nehmen — treten acht andere, in denen auf der rechten Seite zu jedem z der Factor $i = \sqrt{-1}$ hinzukommt. Die noch fehlenden 48 erhält man, wenn man immer je 16 ebenso aus den drei Formeln:

$$(2\,b)\qquad \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_1 \\ z_3' = z_4 \\ z_4' = z_3 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1' = z_3 \\ z_2' = z_4 \\ z_3' = z_1 \\ z_4' = z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1' = z_4 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = z_2 \\ z_4' = z_1 \end{cases}$$

bildet, wie die Formeln (2a) aus der Identität.

Was weiter die ausgezeichnete Untergruppe H_1 anbetrifft, so erhalten wir deren Substitutionen, indem wir mit der eben hingeschriebenen H_2 noch combiniren die Untergruppe G_1 von der Ordnung 720, welche einer geraden Anzahl von Vertauschungen der x_i entspricht. *Die aus den Permutationen, welche eine gerade Anzahl von Vertauschungen von 6 Elementen enthalten, bestehende Gruppe lässt sich vollständig durch folgende beiden cyklischen Permutationen von der Periode 3 und 5 erzeugen:*

$$S' = (x_1 x_2 x_3), \quad T' = (x_2 x_3 x_4 x_5 x_6).$$

Transformiren wir nämlich S' der Reihe nach mit T', T'^2, T'^3, T'^4, so erhalten wir: $(x_1 x_3 x_4)$, $(x_1 x_4 x_5)$, $(x_1 x_5 x_6)$, $(x_1 x_6 x_2)$, woraus sich in Verbindung mit S' durch einfache Transformirungen folgende cyklischen Permutationen ergeben:

$$(x_1 x_2 x_3),\ (x_1 x_2 x_4),\ (x_1 x_2 x_5),\ (x_1 x_2 x_6).$$

Hieraus aber lässt sich, wie bekannt, die Gruppe der Permutationen

*) Siehe hierüber auch Rohn: Ueber die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche. Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 143, 144 ff.

der x_i, welche aus einer geraden Anzahl von Vertauschungen bestehen, zusammensetzen.*)

Die beiden Permutationen S' und T' liefern für die Punktcoordinaten z folgende beiden Formeln:

$$(3)\quad \begin{cases} S: \begin{cases} \pm 2z_1' = (1-i)(z_1-z_4), \\ \pm 2z_2' = (1-i)(z_2-z_3), \\ \pm 2z_3' = (1+i)(z_2+z_3), \\ \pm 2z_4' = (1+i)(z_1+z_4), \end{cases} \\ T: \begin{cases} \pm 2z_1' = -z_1+z_2+iz_3-iz_4, \\ \pm 2z_2' = +z_1+z_2+iz_3+iz_4, \\ \pm 2z_3' = -z_1+z_2-iz_3+iz_4, \\ \pm 2z_4' = +z_1+z_2-iz_3-iz_4. \end{cases} \end{cases}$$

S und T sind demnach für die Gruppe G_1 erzeugende Substitutionen. Aus ihnen und den 64 Substitutionen von H_2 setzt sich mithin durch alle Combinationen und Wiederholungen die Gruppe H_1 zusammen.

Zur vollen Gruppe G fehlen jetzt nur noch die Substitutionen, welche einer *ungeraden* Anzahl von Zeichenwechseln verbunden mit einer *ungeraden* Anzahl von Vertauschungen der x_i entsprechen. Für die Gruppe der x_i bekommen wir diese, wie sich ohne Weiteres beweisen lässt, sämmtlich, wenn wir zu den bereits vorhandenen Vertauschungen und Zeichenwechseln nur noch die eine Substitution in allen Combinationen hinzunehmen:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2, \\ x_2' &= x_1. \end{aligned}$$

Die entsprechende Substitution der z aber lautet folgendermassen:

$$(4)\quad U: \begin{cases} \pm\sqrt{2}z_1' = (1+i)z_1, \\ \pm\sqrt{2}z_2' = (1+i)z_2, \\ \pm\sqrt{2}z_3' = (1-i)z_3, \\ \pm\sqrt{2}z_4' = (1-i)z_4. \end{cases}$$

Wir haben jetzt in den 64 Substitutionen von H_2 verbunden mit S, T, U in allen Combinationen und Wiederholungen die ganze Gruppe G von 64 . 720 Substitutionen vor uns.

Für die Folge erweist es sich als vielfach bequemer, neben diesen Formeln die folgenden vier Substitutionen von der Determinante $+1$ zu benutzen, *welche ebenfalls die ganze Gruppe G erzeugen*, wie im letzten Paragraphen näher auseinandergesetzt werden soll:

*) Netto. Substitutionstheorie. Leipzig 1882, pag. 35, Lehrsatz IX.

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} A: \begin{cases} z_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1+z_4), \\ z_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2+z_3), \\ z_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2-z_3), \\ z_4' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1-z_4), \end{cases} & B: \begin{cases} z_1' = \varepsilon z_1, \\ z_2' = \varepsilon z_2, \\ z_3' = -i\varepsilon z_3, \\ z_4' = -i\varepsilon z_4, \end{cases} \\ C: \begin{cases} z_1' = \varepsilon z_1, \\ z_2' = \varepsilon z_4, \\ z_3' = \varepsilon z_3, \\ z_4' = \varepsilon z_2, \end{cases} & D: \begin{cases} z_1' = \varepsilon z_1, \\ z_2' = \varepsilon z_2, \\ z_3' = -\varepsilon z_3, \\ z_4' = \varepsilon z_4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Hierin bedeutet ε eine achte Einheitswurzel, und zwar:

$$\varepsilon = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Das Vorzeichen der $\sqrt{2}$ in A kann dabei nach Belieben positiv oder negativ genommen werden, da man vermittelst der Substitution D^4, welche wegen $\varepsilon^4 = -1$ einen simultanen Zeichenwechsel aller z bewirkt, den einen Fall auf den anderen reduciren kann.

Wie man ferner sofort sieht, hat A die Periode 2, während B, C, D die Periode 8 besitzen.

Selbstverständlich kann jede der Substitutionen S, T, U sowie die zur Gruppe H_2 gehörigen angegebenen 64 durch A, B, C, D ausgedrückt werden und umgekehrt. So ist z. B.:

$$U = B \,.\, D^6, \quad S = B^7 \,.\, A \,.\, B^6 \text{ etc.}$$

Die ausgezeichnete Untergruppe H_1 wird gebildet von all denjenigen Substitutionen, an denen eine gerade Anzahl der 4 Erzeugenden A, B, C, D betheiligt ist, wie man aus den folgenden Formeln entnimmt, welche die den genannten 4 Erzeugenden entsprechenden Operationen der Gruppe der x_i geben:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{lllll} A: \begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_2, \\ x_3' = x_1, \\ x_4' = -x_4, \\ x_5' = -x_5, \\ x_6' = -x_6, \end{cases} & B: \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1, \\ x_3' = -x_3, \\ x_4' = -x_4, \\ x_5' = -x_5, \\ x_6' = -x_6, \end{cases} & C: \begin{cases} x_1' = x_6, \\ x_2' = -x_5, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = -x_3, \\ x_5' = x_2, \\ x_6' = -x_1, \end{cases} & D: \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1, \\ x_3' = -x_4, \\ x_4' = x_3, \\ x_5' = x_6, \\ x_6' = -x_5. \end{cases} \end{array}\right.$$

§ 2.

Eigenschaften der bei G invariant bleibenden Formen.*)

Ueber die Beschaffenheit derjenigen ganzen homogenen Functionen der vier Veränderlichen z_1, z_2, z_3, z_4, welche durch die N linearen Substitutionen der Gruppe G in sich selbst übergehen, kann man von vornherein eine Reihe von Sätzen aufstellen, welche uns späterhin von Nutzen sein werden.

Sei f eine solche Form vom n^{ten} Grade, so wird wegen der Homogeneität bei der Anwendung der Substitution D sich der Factor ε^n absondern, und wenn wir nach geraden und ungeraden Potenzen der Variabelen z_3 ordnen, so kommt:

$$f = f_1(z_1, z_2, z_3^2, z_4) + z_3 f_2(z_1, z_2, z_3^2, z_4),$$
$$f' = \varepsilon^n [f_1(z_1, z_2, z_3^2, z_4) - z_3 f_2(z_1, z_2, z_3^2, z_4)],$$

wo f' den durch D aus f hervorgehenden Ausdruck bedeutet. Indem wir vorläufig auch solche Formen in Betracht ziehen, welche sich bei den Substitutionen der Gruppe bis auf einen Factor reproduciren, zieht die Bedingung: $f' = \varrho \cdot f$ nach sich entweder:

$$\varrho = \quad \varepsilon^n \quad \text{und} \quad f = f_1(z_1, z_2, z_3^2, z_4),$$

oder:

$$\varrho = -\varepsilon^n \quad \text{und} \quad f = z_3 \cdot f_2(z_1, z_2, z_3^2, z_4).$$

Nun sind aber in G Substitutionen vorhanden, welche jede beliebige Vertauschung der z bewirken. So vertauscht C, indem wir den Factor ε ausser Betracht lassen, z_2 mit z_4, ADA z_2 mit z_3, ADB^2A endlich z_1 mit z_4. Aus den genannten drei Vertauschungen aber lässt sich die ganze Vertauschungsgruppe von z_1, z_2, z_3, z_4 zusammensetzen. Mithin hat jede bis auf einen Factor invariante Form entweder die Gestalt $f(z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_4^2)$ oder $z_1 z_2 z_3 z_4 \cdot f(z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_4^2)$. Das Vortreten des Factors $z_1 z_2 z_3 z_4$ der zweiten Form zieht nun aber sofort nach sich, dass auch alle die Ausdrücke als Factoren vorantreten müssen, welche aus $z_1 z_2 z_3 z_4$ durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehen. Es sind dies im Ganzen 15, *welche, einzeln gleich Null gesetzt, die 15 Fundamentaltetraeder der sechs Complexe* $x_i = 0$ *darstellen*. Führen wir die Abkürzungen ein:

$$(7) \qquad \begin{cases} z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 = \varphi, \\ z_1^2 z_2^2 + z_3^2 z_4^2 = \psi_2, \\ z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_4^2 = \psi_3, \\ z_1^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 = \psi_4, \\ z_1 z_2 z_3 z_4 = \chi, \end{cases}$$

*) Betreffs der Terminologie vergl. Klein. Vorlesungen über das Ikosaeder Leipzig 1884, pag. 47 u. f.

so haben wir folgende Gleichungen für die 15 Fundamentaltetraeder:

$$(6)\qquad \begin{cases} 1 \text{ von der Form: } \chi = 0, \\ 6 \;\;,, \quad ,, \quad ,, : \psi_i \pm \psi_k = 0, \\ 2 \;\;,, \quad ,, \quad ,, : \varphi - 2(\psi_2+\psi_3+\psi_4) \pm 8\chi = 0, \\ 6 \;\;,, \quad ,, \quad ,, : \varphi - 2(\psi_i+\psi_k-\psi_l) \pm 8\chi = 0, \end{cases}$$

wenn wir für i, k, l alle von einander verschiedenen Werthe 2, 3, 4 nehmen. Das Product der linken Seiten dieser 15 Gleichungen liefert uns demnach eine Form 60^{ten} Grades: R_{60}, welche bei den N Substitutionen von G zunächst bis auf einen Factor ungeändert bleibt. Aber dieser Factor ist $+1$, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die Substitutionen A, B, C, D der Reihe nach anwendet, *mithin haben wir in R_{60} bereits eine invariante Form unserer Gruppe vor uns.*

Wir können jetzt auf Grund der vorhergehenden Erörterungen den Satz aussprechen:

1) *Jede invariante Form unserer Gruppe enthält entweder nur gerade Potenzen der Variabelen (Formen erster Art), oder ist das Product der invarianten Form R_{60} und einer Form erster Art (Formen zweiter Art).*

Soll aber eine Form erster Art vom n^{ten} Grade absolut invariant sein, so muss der nach Anwendung der Substitution D vortretende Factor $\varepsilon^n = +1$ sein, also folgt:

2) *Der Grad jeder invarianten Form erster Art ist durch 8 theilbar.*

Wir erkennen weiter, dass für invariante Formen erster Art nach dem soeben Gesagten bei Anwendung der Substitutionen B, C, D der Factor ε in diesen Substitutionsformeln einfach weggelassen werden kann, dass also in Folge der früher auseinandergesetzten Eigenschaften der Substitutionen C, ADA, ADB^2A jede invariante Form erster Art in den vier Variabelen z symmetrisch sein muss. Da dasselbe von R_{60} gilt, wie der Anblick der Formeln (8) zeigt, so folgt:

3) *Jede invariante Form ist eine symmetrische Function der vier Variabelen z.*

Endlich wollen wir eine Form erster Art nach geraden und ungeraden Potenzen von z_3^2 und z_4^2 in folgender Weise ordnen:

$$f = f_1(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_4^4) + z_3^2 f_2(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_4^4) + z_4^2 f_3(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_3^4) + z_3^2 z_4^2 f_4(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_4^4).$$

Wenden wir hierauf B an, so bleibt der erste und letzte Term ungeändert, die beiden mittelsten ändern ihr Vorzeichen, dürfen daher, da f invariant bleiben soll, in f nicht vorkommen. Also muss sein:

$$f = f_1(z_1^2, z_2^2, z_3^4 z_4^4) + z_3^2 z_4^2 f(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_4^4).$$

Wegen der Symmetrie in den z folgt aber:

$$f = f_1(z_1^4, z_2^4, z_3^4, z_4^4) + z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 f_4(z_1^4, z_2^4, z_3^4, z_4^4),$$

wir haben also den Satz:

4) *Jede invariante Form erster Art ist eine ganze Function von den vierten Potenzen der Variabelen und dem Product* $z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2$.

§ 3.

Aufstellung des vollen Formensystems.

Wir werden uns nun invariante Formen unserer Gruppe in der Weise zu verschaffen suchen, dass wir uns zunächst eine Form bilden, welche bei einer möglichst ausgedehnten Untergruppe von G invariant bleibt, bei Anwendung von G also möglichst wenige verschiedene Werthe annimmt, indem wir gleichzeitig die Forderung zu erfüllen bestrebt sein werden, dass diese Form auch von möglichst niedrigem Grade ist. Indem wir alsdann solche symmetrischen Verbindungen der sämmtlichen verschiedenen Werthe dieser Function zusammensetzen, welche nicht identisch verschwinden, werden wir zu Formen gelangen, welche bei der Gesammtgruppe invariant bleiben.

Es ist zunächst leicht, Formen anzugeben, welche der ausgezeichneten Untergruppe H_2 gegenüber sich invariant verhalten. Es sind dies die in den Formeln (7) mit φ, ψ_2, ψ_3, ψ_4, χ bezeichneten Ausdrücke. Sie bilden sogar das volle Formensystem der Gruppe H_2, *indem wir unter einem zu einer Gruppe linearer Substitutionen gehörigen vollen Formensysteme den Inbegriff aller derjenigen invarianten Formen verstehen, welche nothwendig und hinreichend sind, damit durch sie eine jede bei den Substitutionen der Gruppe invariant bleibende Form rational und ganz ausgedrückt werden kann.*

Der etwas umständliche Beweis dafür, dass die genannten Functionen das volle Formensystem der Gruppe H_2 bilden, kann hier übergangen werden, da er für die weiteren Entwickelungen nicht erforderlich ist. Eine Folge dieser Thatsache ist es aber, dass, wie die wirkliche Anwendung der vier erzeugenden Substitutionen zeigt, die fünf Grössen φ, ψ_i, χ bei Anwendung der ganzen Gruppe G sich linear unter sich substituiren, also eine mit G isomorphe quinäre endliche Substitutionsgruppe bilden.

Aus den Grössen φ, ψ_i, χ setzen wir nun eine neue Form Φ zusammen, welche noch bei einer anderen in H_1 enthaltenen Untergruppe ungeändert bleibt. Ausser H_2 ist in H_1 nach § 1 noch die aus S und T erzeugte Gruppe als Untergruppe enthalten. Verlangen wir zunächst, dass Φ bei der Substitution T von der Periode fünf ungeändert bleibt — indem wir T der grösseren Periode wegen vor S bevorzugen.

Die Substitution T wirkt auf die Functionen φ, ψ_i, χ folgendermassen:

$$(9)\qquad T:\begin{cases}16\varphi' = 4\varphi + 24\psi_2 - 24\psi_3 - 24\psi_4 - 96\chi,\\ 16\psi_2' = 2\varphi - 4\psi_2 + 4\psi_3 - 12\psi_4 + 16\chi,\\ 16\psi_3' = 2\varphi + 12\psi_2 + 4\psi_3 + 4\psi_4 + 16\chi,\\ 16\psi_4' = 2\varphi - 4\psi_2 - 12\psi_3 + 4\psi_4 + 16\chi,\\ 16\chi' = \varphi - 2\psi_2 + 2\psi_3 + 2\psi_4 - 8\chi.\end{cases}$$

Um an der Forderung fest zu halten, dass Φ von möglichst niedrigem Grade sein soll, setzen wir Φ als lineare Function von φ, ψ_i, χ an, also:

$$\Phi = a\varphi + b\psi_2 + c\psi_3 + d\psi_4 + e\chi.$$

Verlangen wir vorläufig nur, dass Φ bei T bis auf einen Factor ϱ invariant bleiben soll, dass also $\Phi' = \varrho\Phi$ sei, so liefert uns die Gleichung:

$$a\varphi' + b\psi_2' + c\psi_3' + d\psi_4' + e\chi' = \varrho(a\varphi + b\psi_2 + c\psi_3 + d\psi_4 + e\chi),$$

indem wir für φ', ψ_i', χ' ihre Werthe aus (9) eintragen, und nun die Coefficienten von φ, ψ_i, χ beiderseits gleichsetzen, fünf lineare homogene Gleichungen für die fünf Grössen a, b, c, d, e. Sollen diese nicht sämmtlich verschwinden, so muss die Eliminationsdeterminante gleich Null sein, und dies liefert uns eine Gleichung fünften Grades für ϱ. *Diese Gleichung reducirt sich auf die einfache Form:* $\varrho^5 = 1$. Wir wählen als Wurzel natürlich $\varrho = 1$, weil bei dieser Wahl Φ absolut invariant bleibt, und erhalten jetzt als zugehörige Werthe der Coefficienten:

$$a = 1,\ b = 6,\ c = 6,\ d = -6,\ e = 0.$$

Mithin haben wir:

$$(10)\qquad \Phi = \varphi + 6(\psi_2 + \psi_3 - \psi_4).$$

Bei Anwendung der ganzen aus S und T zusammenzusetzenden Untergruppe nimmt, wie sich leicht zeigen lässt, Φ nur 6 verschiedene Werthe an, und zwar die folgenden:

$$(11)\qquad \begin{cases}\Phi_1 = \varphi + 6(-\psi_2 - \psi_3 - \psi_4),\\ \Phi_2 = \varphi + 6(-\psi_2 + \psi_3 + \psi_4),\\ \Phi_3 = \varphi + 6(+\psi_2 - \psi_3 + \psi_4),\\ \Phi_4 = \varphi + 6(+\psi_2 + \psi_3 - \psi_4),\\ \Phi_5 = -2\varphi - 24\chi,\\ \Phi_6 = -2\varphi + 24\chi.\end{cases}$$

Da jedes einzelne der Φ_i bei der H_2 ungeändert bleibt, so haben wir das Resultat: *Die sechs Functionen Φ_i vertauschen sich bei Anwendung der Substitutionen der ausgezeichneten Untergruppe H_1 nur unter einander (ohne zutretenden Factor).*

Um endlich die Wirkung der vollen Gruppe auf diese Functionen zu erkennen, brauchen wir nur das Verhalten der Substitution U (Formel (4)) zu untersuchen. Diese bewirkt ebenfalls nur eine Vertauschung der Φ_i unter sich, aber verbunden mit einem simultanen Zeichenwechsel aller Φ_i. Dasselbe zeigt sich auch, wenn wir die Substitutionen A, B, C, D einzeln auf die Φ_i wirken lassen. *Die Function Φ ist demnach bei der Gesammtgruppe G zwölfwerthig, aber dergestalt, dass sich je zwei Werthe nur durch das Vorzeichen unterscheiden.*

Bilden wir jetzt die elementaren symmetrischen Functionen aus den sechs Grössen Φ_i, so werden uns dieselben, so weit sie nicht identisch verschwinden, entweder absolut invariante Formen für unsere Gruppe darstellen, oder solche, welche nur ihr Vorzeichen wechseln, je nachdem ihre Dimension in den Φ gerade oder ungerade ist.

Wir erhalten so folgendes Formelsystem, wobei bemerkt sein mag, dass die symmetrischen Functionen fünfter und sechster Dimension — welche übrigens *nicht* identisch verschwinden — der Complicirtheit der Ausdrücke wegen nicht explicite in den z hingeschrieben sind, dass dagegen die symmetrische Function vierter Dimension sich bis auf einen Zahlenfactor als das Quadrat der zweiter Dimension erweist. Die Zahlenfactoren auf den linken Seiten sind beigefügt, damit die Coefficienten der Glieder, welche die höchsten Potenzen der einzelnen Variabeln enthalten, $= 1$ werden.

$$
(12)\quad \begin{cases}
\sum \Phi_i = 0, \\
-\frac{1}{6}\sum \Phi_i\Phi_k = \sum z_i^8 + 14\sum z_i^4 z_k^4 + 168 z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 = F_8, \\
-\frac{1}{4}\sum \Phi_i\Phi_k\Phi_l = \sum z_i^{12} - 33\sum z_i^8 z_k^4 + 330\sum z_i^4 z_k^4 z_l^4 \\
\qquad\qquad + 792\, z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 \cdot \sum z_i^4 = F_{12}, \\
\sum \Phi_i\Phi_k\Phi_l\Phi_m = \frac{1}{4}\left(\sum \Phi_i\Phi_k\right)^2 = 9F_8^2, \\
\frac{1}{12}\sum \Phi_i\Phi_k\Phi_l\Phi_m\Phi_n = F_{20}, \\
\frac{1}{4}\,\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6 = F_{24}.
\end{cases}
$$

Links gehen die Indices von 1—6, rechts von 1—4.

Hiernach sind F_8 und F_{24} absolut invariant. F_{12} und F_{20} sind absolut invariant bei der H_1, und erhalten bei den übrigen Substitutionen von G den Factor -1, folglich sind F_{12}^2, F_{20}^2 *und* $F_{12}\cdot F_{20}$ *ebenfalls absolut invariant.*

Ich behaupte nun:

In F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24}, $F_{12}\cdot F_{20}$ und R_{60} haben wir das volle

Formensystem unserer Gruppe vor uns, d. h. jede andere bei den Substitutionen der Gruppe invariant bleibende Form ist eine rationale, ganze Function der Formen des Systems.

Ehe wir zum Beweise dieser Behauptung schreiten, wird es nöthig sein, die Entwickelungen des folgenden Paragraphen vorauszuschicken.

§ 4.

Die Lösung des Formenproblems.

Ertheilen wir den vier invarianten Formen F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24} beliebige aber feste Werthe, setzen wir etwa:

$$F_8 = a,\ F_{12}^2 = b,\ F_{20}^2 = c,\ F_{24} = d, \tag{13}$$

so will ich zunächst zeigen, dass diese Grössen in der That ganz beliebig gewählt werden können, dass also zwischen den Formen F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24} keinerlei Abhängigkeit besteht. Bilden wir zu dem Zwecke die Functionaldeterminante $(F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24})$. Ohne allzugrossen Aufwand von Rechnung findet man, dass das Glied, welches in z_1 von höchstem Grade ist, folgendermassen lautet:

$$2^{11} \cdot 3^{13} \cdot z_1^{45} z_2 z_3 z_4 (z_2^4 - z_3^4)(z_3^4 - z_4^4)(z_4^4 - z_2^4).$$

Damit ist das Nichtverschwinden der Functionaldeterminante und somit der Satz bewiesen: *Die Formen F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24} sind von einander unabhängig.*

Die Ausdrücke (13) stellen uns nun vier Gleichungen mit den vier Unbekannten z_1, z_2, z_3, z_4 vor. Eine vorläufige Abzählung ergiebt, dass dieselben $8 \cdot 24 \cdot 40 \cdot 24 = 4 \cdot 64 \cdot 720 = 4N$ Lösungen besitzen. *Wir sind aber in der Lage, diese Lösungen wirklich angeben zu können.* Dies geschieht auf folgende Weise:

Wie aus den Formeln (12) hervorgeht, können wir die sechs elementaren symmetrischen Functionen der Grössen $\Phi_1, \ldots, \Phi_6$ unmittelbar durch a, b, c, d ausdrücken. Sind daher $y_1, y_2, \ldots, y_6$ die sechs Wurzeln der Gleichung:

$$y^6 - 6ay^4 + 4\sqrt{b} \cdot y^3 + 9a^2y^2 - 12\sqrt{c} \cdot y + 4d = 0, \tag{14}$$

so werden die Gleichungen (13) durch jedes Werthsystem $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_6$ befriedigt, welches wir *in beliebiger Reihenfolge* mit den Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_6$ identificiren. Die Gleichung (14) repräsentirt aber in der That nicht eine, sondern vier Gleichungen, welche sich nur durch die Vorzeichen von $\sqrt{b}$ und $\sqrt{c}$ von einander unterscheiden, was gerade vier Möglichkeiten ausmacht. *Wir erhalten demnach* $4 \cdot 6!$ *Lösungssysteme* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_6$, *welche den Gleichungen* (13) *genügen.*

Nun kommt es darauf an, aus den Φ_i die z_i zu berechnen. Die Grössen φ, ψ_2, ψ_3, ψ_4, χ lassen sich vermittelst der Gleichungen (11)

linear durch die Φ_i ausdrücken. Aus den Gleichungen (7) aber ergiebt sich ohne Weiteres:

$$(15)\quad \begin{cases} (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2)^2 = \varphi + 2(\psi_2+\psi_3+\psi_4) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{3}(\Phi_1+\Phi_5+\Phi_6) = P_1, \\ (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2-\varepsilon_3^2-\varepsilon_4^2)^2 = \varphi + 2(\psi_2-\psi_3-\psi_4) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{3}(\Phi_2+\Phi_5+\Phi_6) = P_2, \\ (\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2-\varepsilon_4^2)^2 = \varphi + 2(-\psi_2+\psi_3-\psi_4) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{3}(\Phi_3+\Phi_5+\Phi_6) = P_3, \\ (\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2-\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2)^2 = \varphi + 2(-\psi_2-\psi_3+\psi_4) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{3}(\Phi_4+\Phi_5+\Phi_6) = P_4, \end{cases}$$

wo die P_i zur Abkürzung für die links danebenstehenden Grössen eingeführt sind. Hieraus hat man:

$$(16)\quad \begin{cases} \varepsilon_1^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}+\sqrt{P_4}), \\ \varepsilon_2^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}-\sqrt{P_3}-\sqrt{P_4}), \\ \varepsilon_3^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{P_1}-\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}-\sqrt{P_4}), \\ \varepsilon_4^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{P_1}-\sqrt{P_2}-\sqrt{P_3}+\sqrt{P_4}). \end{cases}$$

Aus einem Werthsysteme der Φ_i würden sich hiernach 2^4 Werthsysteme der ε_i^2 ergeben, da die Vorzeichen der vier Wurzelgrössen beliebig sind Berechnet man aber aus diesen Formeln:

$$(17)\quad \begin{cases} \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\varepsilon_4^2 = 4^{-4}\Big(\sum P_i^2 - 2\sum P_iP_k + 8\sqrt{P_1}.\sqrt{P_2}.\sqrt{P_3}.\sqrt{P_4}\Big), \\ \text{so hat man andrerseits aus (7) und (11):} \\ \qquad \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\varepsilon_4^2 = \chi^2 = 48^{-2}.(\Phi_5-\Phi_6)^2. \end{cases}$$

Durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke sieht man, dass z. B. $\sqrt{P_4}$ bestimmt ist, wenn die Vorzeichen der drei anderen Wurzeln irgendwie angenommen werden. *Mithin ergeben sich nur 2^3 Werthsysteme ε_i^2 aus einem Werthsystem Φ_i.* Ebenso folgt, dass zu einem Werthsystem ε_i^2 nicht 2^4 Werthsysteme ε_i gehören — der beliebigen Wahl der Vorzeichen der Quadratwurzeln aus den rechten Seiten der Gleichungen (16) entsprechend — sondern nur 2^3, da die Wahl der letzten Quadratwurzel durch die Gleichung:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 48^{-1}.(\Phi_6-\Phi_5)$$

an die der drei übrigen gebunden ist. *Wir erhalten somit, da es* $4 \cdot 720$ *Werthsysteme* Φ_i *giebt, welche den vier Gleichungen* (13) *genügen, in den Quadratwurzeln aus den rechten Seiten der Gleichungen* (16) *in der That* $2^3 \cdot 2^3 \cdot 4 \cdot 720 = 4 \cdot 64 \cdot 720 = 4N$ *d. h. alle Lösungssysteme* z_1, z_2, z_3, z_4, *welche die Gleichungen* (13) *befriedigen.*

Wir setzen jetzt auch noch den Werth der invarianten Form $F_{12} \cdot F_{20}$ als vorgeschrieben voraus, was wir durch die Gleichung andeuten wollen:

$$F_{12} \cdot F_{20} = + \sqrt{bc}. \tag{18}$$

Von den vier in (14) enthaltenen Gleichungen sind jetzt nur noch die zwei beizubehalten, in denen $\sqrt{b}$ und $\sqrt{c}$ gleiches Vorzeichen besitzen, *mithin reducirt sich die Anzahl der Lösungen der Gleichungen* (13) *und* (18) *auf* $2N$.

Ferner bilden wir für jede der beiden Gleichungen (14) die Discriminante. *Diese ist für beide Gleichungen eine und dieselbe.* Denn jede der beiden Gleichungen (14) geht aus der anderen hervor, wenn man $-y$ statt y setzt. Für diesen Wechsel bleibt aber die Discriminante als Quadrat des Products der Wurzeldifferenzen ungeändert.*) Die Discriminante ist aber nach den vorangegangenen Entwickelungen nichts anderes als

$$\prod_{i,k=1}^{6} (\Phi_i - \Phi_k)^2.$$

Sie stellt sich als ganze Function von $a, b, c, d, \sqrt{bc}$, d. h. von $F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24}, F_{12} \cdot F_{20}$ dar, ist mithin eine invariante Form unserer Gruppe. Wie aus dem Term $(\Phi_5 - \Phi_6)^2$ hervorgeht, enthält sie aber den Term $z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2$ als Factor, *mithin ist die Discriminante der Gleichung* (14) *nichts anderes als* R_{60}^2 (von einem etwaigen Zahlenfactor abgesehen), da das 15-gliedrige Product $\Pi(\Phi_i - \Phi_k)$ von der 60ten Dimension ist. Wir haben also den wichtigen Satz bewiesen:

R_{60}^2 *ist eine ganze Function der invarianten Formen* $F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24}, F_{12} \cdot F_{20}$, *und ist als solche dargestellt durch die Discriminante der Gleichung* (14), *wenn wir in derselben* $a, b, c, d, \sqrt{bc}$ *den Gleichungen* (13) *und* (18) *gemäss durch* $F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24}, F_{12} \cdot F_{20}$ *ersetzen.*

Ist nun endlich der Werth der invarianten Form R_{60} selbst vorgeschrieben, was wir durch die Gleichung:

$$R = + \sqrt{\Delta} \tag{19}$$

andeuten wollen, so werden von den $2N$ Werthsystemen z_i, welche

*) Den in den Coeff. ausgerechneten Werth der Discriminante der allgemeinen Form 6. Ordnung siehe bei Salmon, Algebra der linearen Transformationen. Leipzig 1877. pag. 344.

die Gleichungen (13) und (18) befriedigen, nur noch die Hälfte, also N, der Gleichung (19) genügen. Wir fassen dies in den Satz zusammen:

Die Anzahl der Werthsysteme z_i, welche den Gleichungen: $F_8 = a$, $F_{12}^2 = b$, $F_{20}^2 = c$, $F_{24} = d$, $F_{12} \cdot F_{20} = +\sqrt{bc}$, $R_{60} = +\sqrt{\Delta}$ genügen, ist $= N$, also gleich der Anzahl der linearen Substitutionen, welche jede der sechs invarianten Formen $F_8 \ldots R_{60}$ in sich selbst überführen.

Kennt man daher *ein* Lösungssystem z_1, z_2, z_3, z_4 dieser Gleichungen, so erhält man *alle übrigen* durch die N Substitutionen der Gruppe G.

§ 5.

Beweis der Vollständigkeit des Formensystems.

Aus dem soeben gewonnenen Satze können wir nun folgendermassen schliessen: Setzen wir in eine beliebige Form $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ die N Lösungssysteme unserer sechs Gleichungen:

$$F_8 = a, \ldots, R_{60} = +\sqrt{\Delta}$$

ein, so erhält f im Allgemeinen N von einander verschiedene Werthe, ist also durch eine Gleichung vom Grade N in f mit $F_8, \ldots R_{60}$ verknüpft. Ist aber f eine bei den N Substitutionen der Gruppe G *invariante* Form, so werden alle die N Werthsysteme der z_i, da sie sämmtlich aus einem derselben durch die N Substitutionen von G hervorgehen, der Form f auch nur einen einzigen Werth ertheilen; f ist mithin durch eine Gleichung ersten Grades mit den Formen $F_8, \ldots, R_{60}$ verknüpft, d. h. f ist eine *rationale Function* der bezeichneten Formen.

Ich will nun nach dieser orientirenden Vorüberlegung direct beweisen, dass jede invariante Form f nicht nur eine *rationale*, sondern auch eine *ganze* Function der sechs invarianten Formen unseres Formensystems ist.

Ich beweise zu dem Ende zuerst, dass jede invariante Form sich als ganze Function der sechs Grössen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_6$ darstellen lässt. Von R_{60} wissen wir das bereits. Wir hatten gefunden:

$$R_{60} = \text{Const.} \prod_{i,k=1}^{6} (\Phi_i - \Phi_k).$$

Nach Satz 1, 3 und 4 des § 2 wird der Beweis vollständig erbracht sein, wenn es uns zu beweisen gelingt, dass jede ganze symmetrische Function der z, welche nur von den vierten Potenzen der Variabelen und von dem Producte $z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2$ abhängt, sich als ganze Function der Φ_i darstellt.

Nun ist jede Form der erwähnten Eigenschaft darstellbar als

ganze Function des Productes $x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2$ und der elementaren symmetrischen Functionen von x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4. Es ist aber unmittelbar:

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 = 48^{-2} \cdot (\Phi_5 - \Phi_6)^2 \text{ nach (17)},$$

ferner

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = \varphi = -\frac{1}{4}(\Phi_5 + \Phi_6) \text{ nach (7) und (11)},$$

und

$$x_1^4 x_2^4 x_3^4 x_4^4 = 48^{-4} \cdot (\Phi_5 - \Phi_6)^4.$$

$\sum x_i^8$ und $\sum x_i^{12}$, die wir ja an Stelle der entsprechenden elementaren symmetrischen Functionen wählen dürfen, ergeben sich aber, wenn man die Formeln (16) des vorigen Paragraphen benutzt, durch unmittelbare Ausrechnung als ganze Functionen von P_1, P_2, P_3, P_4 und $\sqrt{P_1 P_2 P_3 P_4}$, wo die P_i durch (15) definirt sind. Diese Quadratwurzel ist aber, wie durch Gleichsetzung der rechten Seiten der beiden Formeln (17) hervorgeht, ebenfalls als rationale, ganze Function der Φ_i darstellbar. Alle symmetrischen Functionen von x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4 und das Product $x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2$ sind demnach in der That ganze Functionen der Φ_i. Also können wir zusammenfassend sagen: *Jede invariante Form unserer Gruppe ist als ganze Function der sechs Formen* $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_6$ *darstellbar.*

Aber nicht jede ganze Function der Φ wird eine invariante Form ergeben, sondern nur diejenigen, welche die mit G isomorphe Gruppe der Φ zulassen. Diese Gruppe ist folgende:

Den vier Erzeugenden A, B, C, D entsprechen in wohl nicht misszuverstehender Bezeichnung folgende Vertauschungen der Φ:

$$A : (\Phi_1 \Phi_4)(\Phi_2 \Phi_6)(\Phi_3 \Phi_5),$$
$$B : (\Phi_3 \Phi_4)(\Phi_1 \Phi_2)(\Phi_5 \Phi_6),$$
$$C : (\Phi_2 \Phi_4),$$
$$D : (\Phi_5 \Phi_6),$$

gleichzeitig jedoch verbunden mit einem Vorzeichenwechsel aller Φ. Sehen wir für einen Augenblick von diesem Zeichenwechsel ab, so behaupte ich: Jene durch A, B, C, D gegebenen Vertauschungen der Φ erzeugen in Combination und Wiederholung sämmtliche 720 Permutationen der symmetrischen Vertauschungsgruppe der 6 Elemente Φ. In der That ist:

$$ACA = (\Phi_1 \Phi_6); \quad BCB = (\Phi_1 \Phi_3); \quad ADA = (\Phi_2 \Phi_3).$$

Hieraus bekommt man aber durch einfache Transformirungen:

$$(\Phi_1 \Phi_2), (\Phi_1 \Phi_3), (\Phi_1 \Phi_4), (\Phi_1 \Phi_5), (\Phi_1 \Phi_6)$$

woraus sich die ganze symmetrische Gruppe zusammensetzen lässt.*)

*) Netto, Substitutionentheorie. Leipzig 1882, pag. 33, Lehrsatz VI.

Die ausgezeichnete Untergruppe H_1, welche aus denjenigen Substitutionen besteht, an denen nur eine gerade Anzahl der 4 Erzeugenden betheiligt ist, wird daher in den Φ die sogenannte alternirende Gruppe von 360 aus einer geraden Anzahl von Vertauschungen bestehenden Permutationen bewirken, da sich die Vorzeichenwechsel bei diesen Substitutionen gerade aufheben.

Nennen wir das Quadrat des Differenzenproductes von n Grössen Δ, so ist bekanntlich jede bei der alternirenden Vertauschungsgruppe dieser n Elemente invariant bleibende rationale Function der n Elemente rational ausdrückbar durch $\sqrt{\Delta}$ und die symmetrischen Functionen der n Elemente. *Es ist aber auch jede ganze, bei der genannten Gruppe invariant bleibende Function f als ganze Function von $\sqrt{\Delta}$ und den symmetrischen Functionen darstellbar.* Denn jede alternirende ganze Function f lässt sich zunächst durch Herausschaffen der Quadratwurzel aus dem Nenner auf die Form bringen:

$$f = \frac{S_1 + \sqrt{\Delta} \cdot S_2}{S_3},$$

wo S_1, S_2, S_3 symmetrische Functionen bedeuten. Vertauscht man in dieser Gleichung irgend zwei Elemente, so erhält man:

$$f_1 = \frac{S_1 - \sqrt{\Delta}\, S_2}{S_3}.$$

Jetzt ist $f + f_1 = 2\frac{S_1}{S_3}$ eine ganze symmetrische Function, also S_1 durch S_3 theilbar, und $f - f_1 = 2\sqrt{\Delta}\frac{S_2}{S_3}$ eine ganze alternirende Function, also $\frac{f - f_1}{\sqrt{\Delta}}$ eine ganze symmetrische Function, mithin auch S_2 durch S_3 theilbar.

Im vorliegenden Falle der sechs Elemente Φ_i ist aber $\sqrt{\Delta} = R_{60}$, *folglich ist jede bei der ausgezeichneten Untergruppe H_1 invariant bleibende ganze Function der Φ, also auch nach den früheren Erörterungen jede invariante Form der z rational und ganz ausdrückbar durch R_{60} und die elementaren symmetrischen Functionen der Φ, d. h. durch F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24}.*

Nun ist der letzte Schritt zur Gesammtgruppe leicht. Da bei der Gruppe G die Φ sich auf alle mögliche Weisen permutiren, jedoch verbunden mit einem simultanen Zeichenwechsel, so können bei der Darstellung einer bei G invarianten Form durch die Φ nur solche Terme auftreten, in denen die beiden ungeraden symmetrischen Functionen der Φ ($\Sigma\Phi_i$ ist Null) entweder in einer geraden Potenz oder mit einander verbunden vorkommen und somit folgt: *Jede homogene, ganze Function der vier Grössen z_1, z_2, z_3, z_4, welche durch die*

N Substitutionen der Gruppe G in sich übergeführt wird, ist eine ganze Function von F_8, F_{12}^2, $F_{12} \cdot F_{20}$, F_{20}^2, F_{24}, R_{60}.

Hiermit ist der Beweis der Vollständigkeit unseres Formensystems erbracht.

§ 6.

Anwendung des Vorigen.

Jede Covariante solcher Formen, die lineare Transformationen in sich zulassen, lässt offenbar dieselben Transformationen in sich zu. Also sind alle Covarianten, die wir aus den Formen unseres Systems bilden können, ebenfalls invariante Formen, müssen sich also rational und ganz durch die Formen des Systems ausdrücken.

Hiervon machen wir eine Anwendung zunächst auf die Functionaldeterminante $(F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24})$. Dieselbe ist gleich:

$$4F_{12} \cdot F_{20}(F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24}).$$

Da aber $F_{12} \cdot F_{20}$ selbst eine invariante Form ist, so muss auch die Functionaldeterminante $(F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24})$, von der in § 4 bereits erwiesen, dass sie nicht identisch verschwindet, eine invariante Form sein. Dieselbe ist vom 60ten Grade, und da es nur eine invariante Form 60ten Grades giebt, *so folgt, dass die Functionaldeterminante* $(F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24})$ *bis auf einen Zahlenfactor mit* R_{60} *übereinstimmt.* Die Vergleichung der höchsten Potenzen ergiebt:

$$(20) \qquad (F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24}) = 2^{11} \cdot 3^{13} R_{60}.$$

Wir bilden ferner die Hessesche Form von F_8; dieselbe ist eine invariante Form vom 24ten Grade, die wir so bezeichnen wollen:

$$H_{24} = \frac{1}{7^1 \cdot 8^4} \left| \frac{\partial^2 F_8}{\partial x_i \partial x_k} \right|.$$

Alsdann ergiebt die Rechnung:

$$(21) \qquad 144 H_{24} = F_{12}^2 - F_{24}.$$

Endlich bietet uns noch die Liniengeometrie eine invariante Form dar, die, an und für sich interessant, in den Entwickelungen des § 7 eine wichtige Rolle spielen wird, und die wir deshalb durch die Formen unseres Systems ausdrücken wollen.

Ordnet man nämlich die sechs Fundamentalcomplexe $x_i = 0$ zu Tripeln, so definirt ein jedes dieser Tripel z. B. (123) mit dem Ergänzungstripel (456) eine Linienfläche zweiter Ordnung. Da sich eine solche Zusammenfassung zu Doppeltripeln auf $\frac{1}{2} \cdot \frac{6.5.4}{1.2.3} = 10$ verschiedene Arten bewerkstelligen lässt, erhalten wir zehn Flächen zweiter Ordnung, deren Inbegriff ebenfalls bei den Vertauschungen

und Vorzeichenwechseln der x_i ungeändert bleiben muss. Diese Flächen sind folgende:

$$(22)\qquad \begin{cases} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0, \\ z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = 0, \\ z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0, \\ z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 = 0, \\ 2(z_1 z_2 \pm z_3 z_4) = 0, \\ 2(z_1 z_3 \pm z_2 z_4) = 0, \\ 2(z_1 z_4 \pm z_2 z_3) = 0. \end{cases}$$

Das Product der linken Seiten dieser Gleichungen liefert eine Form 20^{ten} Grades D_{20}, welche bei den vier Erzeugenden A, B, C, D ihr Zeichen wechselt, bei H_1 invariant bleibt. Folglich muss sich D_{20} durch die Formen des vollen Systems der H_1 rational und ganz ausdrücken. Man findet:

$$(23)\qquad 81 D_{20} = 2^8 . (F_8 . F_{12} - F_{20}).$$

§ 7.

Zusammenhang mit den Borchardt'schen Moduln.

Wie schon in der Einleitung bemerkt, hat Herr Klein vermittelst des durch die Kummersche Fläche begründeten Zusammenhanges der Liniengeometrie mit den hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p = 2$ gezeigt, dass sich die Verhältnisse der sogenannten Borchardt'schen Moduln bei linearer Transformation der Perioden genau so linear substituiren, wie die Verhältnisse $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ bei Anwendung der soeben untersuchten Gruppe G. Unter Borchardt'schen Moduln verstehen wir dabei die Nullwerthe von vier irgend ein Göpel'sches Quadrupel bildenden ϑ-Functionen mit den Moduln $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$, $2\tau_{22}$. Nun lässt sich die ganze unendliche Gruppe aller linearen Periodentransformationen durch folgende vier nur unbedeutend von den Krazer'schen Substitutionen*) abweichenden Transformationen erzeugen:

	A	B	C	D	
$\omega'_{i1} =$	$-\omega_{i3}$	ω_{i1}	ω_{i2}	ω_{i1}	
$\omega'_{i2} =$	ω_{i2}	ω_{i2}	ω_{i1}	ω_{i2}	$i = 1, 2.$
$\omega'_{i3} =$	ω_{i1}	$\omega_{i3} - \omega_{i1}$	ω_{i4}	$\omega_{i2} + \omega_{i3}$	
$\omega'_{i4} =$	ω_{i4}	ω_{i4}	ω_{i3}	$\omega_{i1} + \omega_{i4}$	

*) Krazer. „Ueber die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen etc." Annali di Matematica, ser. 2, XII.

Stellen wir die Wirkung dieser Transformationen auf die vier Grössen $\theta_5, \theta_4, \theta_{23}, \theta_{01}$ fest, indem wir zur Abkürzung

$$\vartheta(0, 0 \mid 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) = \theta$$

setzen, und schreiben die resultirenden Substitutionen homogen in den durch die Gleichung:

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 : \varepsilon_4 = \theta_5 : \theta_4 : \theta_{23} : \theta_{01}$$

definirten ε, wobei wir durch simultane Zufügung geeigneter Factoren bewirken, dass die Substitutionsdeterminante überall $+1$ wird, so erhalten wir die in § 1 mit A, B, C, D bezeichneten 4 erzeugenden Substitutionen unserer Gruppe.

Alle durch die vorhergehende Untersuchung gewonnenen invarianten Formen der ε werden daher, wenn wir unter den vier Grössen ε Borchardt'sche Moduln verstehen, allen linearen Periodentransformationen gegenüber sich bis auf einen Factor invariant verhalten.

Nun hat Herr Bolza in seiner Arbeit über Darstellung von Invarianten durch ϑ-Functionen*) gezeigt, wie man die rationalen Invarianten der Form 6ter Ordnung durch Nullwerthe von ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ ausdrücken kann. Da in diesen Ausdrücken**) nur die Quadrate der 10 geraden ϑ-Functionen vorkommen, diese sich aber durch quadratische Verbindungen der θ ausdrücken, so werden sich die Invarianten der Form 6ter Ordnung durch die invarianten Formen unseres Systems ausdrücken lassen müssen.

Unter Zugrundelegung der Uebertragungsformeln:

$$\vartheta_5^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2, \quad \vartheta_{12}^2 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2,$$
$$\vartheta_0^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 - \varepsilon_4^2, \quad \vartheta_{34}^2 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - \varepsilon_4^2,$$
$$\vartheta_{23}^2 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_4), \quad \vartheta_{14}^2 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3\varepsilon_4),$$
$$\vartheta_{01}^2 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4), \quad \vartheta_2^2 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_4),$$
$$\vartheta_4^2 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_4 + \varepsilon_2\varepsilon_3), \quad \vartheta_{03}^2 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3),$$

— es sind dies gerade die linken Seiten der Flächen zweiter Ordnung (22) — erhalten wir folgende Resultate:

$$\sum \vartheta_\alpha^8 = 4F_8,$$
$$\prod_\alpha \vartheta_\alpha = D_{20}, \text{ (vgl. Formel (23))}$$
$$\prod_i R_i = 2^{60} R_{60}.$$

*) Die hier vorstehend abgedruckte Arbeit. D. Red.

**) Vergl. durchweg § 7 der genannten Abhandlung.

Es handelt sich noch um $\sum \vartheta_\alpha^4 \vartheta_\beta^4 \vartheta_\gamma^4 \vartheta_\delta^4 \vartheta_\varepsilon^4 \vartheta_\zeta^4$, wobei die Summation zu erstrecken ist über die 15 Sextupel, welche die 15 Göpel'schen Quadrupel aus den 10 geraden ϑ-Functionen zum Product aller geraden ϑ-Functionen ergänzen. Wir berechnen diesen Ausdruck, den wir mit G_{24} bezeichnen wollen, indem wir aus dem einen Term:

$$\vartheta_{23}^4 \vartheta_{14}^4 \vartheta_{01}^4 \vartheta_2^4 \vartheta_4^4 \vartheta_{03}^4 = 64 (z_1^2 z_2^2 - z_3^2 z_4^2)^2 (z_1^2 z_3^2 - z_2^2 z_4^2)^2 (z_1^2 z_4^2 - z_2^2 z_3^2)^2$$

die 14 andern durch die Substitutionen unserer Gruppe herleiten. Die Durchführung der Rechnung ergiebt das einfache Resultat:

$$27 G_{24} = 2^9 . H_{24}.$$

Göttingen, den 30. Juni 1887.

Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen.

(Zweite Abhandlung).

Von

MARTIN KRAUSE in Rostock.

In einer Arbeit gleichen Titels*) ist gezeigt worden, dass die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen, falls die Zahl der Nullstellen grösser ist, als die Zahl der Unendlichkeitsstellen zurückgeführt werden kann auf die Entwickelung gewisser Primfunctionen und zwar der Grössen:

$$\frac{\vartheta_3[k](nv-b, n\tau)}{\vartheta_3(v-a, \tau)}.$$

Durch Specialisirung der Constanten kommt man zu dem Problem, die sechzehn Quotienten

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv-w, n\tau)}{\vartheta_\beta(v, \tau)}$$

bei denen α und β der Reihe nach gleich 0, 1, 2, 3 sein können, in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Dieses Problem soll nun im Folgenden wirklich gelöst werden.

Die Lösungen, welche ich hierbei gebe, sind indirecte. Sie bestehen im wesentlichen darin, dass die von mir eingeführten Primfunctionen mit Hülfe gewisser Functionen, die mit dem Namen von *Restfunctionen* bezeichnet werden mögen, in trigonometrische Reihen entwickelt werden. Diese Restfunctionen stehen in enger Beziehung zu den Primfunctionen, die von Herrn Appell eingeführt worden sind.

Der Grund, warum diese Methoden zunächst gewählt worden sind, ist ein doppelter. Erstens erscheint es von grosser Wichtigkeit, die Beziehungen aufzudecken, die zwischen den Restfunctionen und den transformirten Thetafunctionen bestehen. Zweitens aber ist im vorliegenden Falle eine Mannigfaltigkeit von Methoden von hervorragender Bedeutung. An anderer Stelle werden directe Methoden der Entwickelung gegeben werden. Die Vergleichung derselben untereinander

*) Bd. XXX dieser Annalen, pag. 425–436.

und mit den indirecten Methoden führt zu einer grossen Reihe interessanter Resultate.

Die Arbeit zerfällt in vier Paragraphen. Im ersten Paragraphen soll gezeigt werden, dass und wie eine jede ganze transcendente doppelperiodische Function dritter Art in trigonometrische Reihen entwickelt werden kann und zwar ohne Kenntniss ihrer Nullstellen. Hierdurch unterscheidet sich diese Methode von der in der früheren Arbeit entwickelten und von den Methoden der Herren Appell und Halphen. Im zweiten Paragraphen soll gezeigt werden, wie auf Grund dieser Methode die sämmtlichen Primfunctionen, wie sie vorhin definirt worden sind, in trigonometrische Reihen entwickelt werden können. Es werden hierzu eine Reihe von Restfunctionen eingeführt, die dieselben Bedingungen erfüllen, wie die Primfunctionen, und deren Entwickelungen gegeben sind. Im dritten Paragraphen soll dasselbe Problem in anderer Weise gelöst werden. Es wird in demselben gezeigt, dass das Problem die doppelt periodischen Functionen für ein beliebiges positives n in trigonometrische Reihen zu entwickeln auf den Fall $n=1$ zurückgeführt werden kann. Zugleich werden weitere Relationen zwischen den Restfunctionen und den transformirten Thetafunctionen angegeben. Im vierten Paragraphen endlich sollen die Restfunctionen durch Sinus und Cosinusreihen dargestellt werden.

§ 1.

Darstellung aller ganzen transcendenten doppeltperiodischen Functionen dritter Art durch trigonometrische Reihen ohne Kenntniss ihrer Nullwerthe.

Es sei eine ganze transcendente Function von v vorgelegt, welche den Gleichungen Genüge leistet:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(v+1) &= f(v),\\ f(v+\tau) &= e^{-\pi i n(2v+2a+\tau)} f(v), \end{aligned}$$

wobei n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, so kann dieselbe immer in die Form gebracht werden:

$$(2)\qquad f(v) = \sum_{0}^{n-1} k c_k \cdot e^{-2\pi i k v} \cdot \vartheta_3(nv+na-k\tau,\ n\tau).$$

Die Grössen c_k sind unbekannte Constanten. Um sie zu bestimmen, setzen wir an Stelle von v der Reihe nach:

$$v,\ v+\frac{1}{n},\ v+\frac{2}{n},\ \cdots v+\frac{n-1}{n}.$$

Dann folgt durch Addition aller entsprechenden Gleichungen unmittelbar:

$$n \cdot c_0 \cdot \vartheta_3(nv+na, n\tau) = \sum_0^{n-1} f\left(v+\frac{r}{n}\right)$$

oder indem wir etwa $v = 0$ setzen:

$$n \cdot c_0 \cdot \vartheta_3(na, n\tau) = \sum_0^{n-1} f\left(\frac{r}{n}\right). \tag{3}$$

Genau so sind die übrigen Constanten zu bestimmen. Setzen wir:

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

so ergiebt sich:

$$n \cdot c_k \cdot \vartheta_3(na-k\tau, n\tau) = \sum_0^{n-1} \alpha^{kr} \cdot f\left(\frac{r}{n}\right). \tag{4}$$

Die analogen Formeln gelten, wenn die Function $f(v)$ den Gleichungen Genüge leistet:

$$\begin{aligned} f(v+1) &= f(v), \\ f(v+\tau) &= -e^{-\pi i n(2v+2a+\tau)} \cdot f(v), \end{aligned} \tag{5}$$

Dann wird:

$$f(v) = \sum_0^{n-1} c_k \cdot e^{-2\pi i k v} \cdot \vartheta_0(nv+na-k\tau, n\tau). \tag{6}$$

Die Bestimmung der Constanten erfolgt, wie vorhin.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Function den Gleichungen Genüge leistet:

$$\begin{aligned} f(v+1) &= -f(v), \\ f(v+\tau) &= \pm e^{-\pi i n(2v+2a+\tau)} \cdot f(v). \end{aligned} \tag{7}$$

Nehmen wir zunächst das obere Zeichen und wählen n als ungerade Zahl, so wird:

$$f(v) = \sum_0^{n-1} c_k \cdot e^{-2\pi i k v} \cdot \vartheta_2(nv+na-k\tau, n\tau). \tag{8}$$

Wir setzen jetzt an Stelle von v der Reihe nach:

$$v, v+\frac{2}{n}, v+\frac{4}{n}, \cdots, v+\frac{2(n-1)}{n},$$

dann wird zunächst:

$$nc_0 \cdot \vartheta_2(na, n\tau) = \sum_0^{n-1} f\left(\frac{2r}{n}\right), \tag{9}$$

überdies allgemein:

$$(10) \qquad n \cdot c_k \cdot \vartheta_2(na - k\tau, n\tau) = \sum_0^{n-1} r \alpha^{2rk} \cdot f\left(\frac{2r}{n}\right).$$

Damit ist dieser Fall erledigt. Ganz analog gestaltet sich die Sache für das untere Zeichen. Wir haben für dasselbe zu setzen:

$$(11) \qquad f(v) = \sum_0^{n-1} k\, c_k \cdot e^{-2\pi i k v} \cdot \vartheta_1(nv + na - k\tau, n\tau).$$

Jetzt sei n eine gerade Zahl. Dann setzen wir im Falle des oberen Zeichens:

$$(12) \quad f(v) = \sum_1^n k\, c_{2k-1} \cdot e^{-\pi i(2k-1)v} \cdot \vartheta_3\left(nv + na - \frac{2k-1}{2}\tau, n\tau\right).$$

Die rechte Seite schreiben wir:

$$\begin{aligned}
&c_1 \cdot e^{-\pi i v} \cdot \vartheta_3\left(nv + na - \tfrac{\tau}{2}, n\tau\right) \\
&+ c_{n+1} \cdot e^{-\pi i(n+1)v} \cdot \vartheta_3\left(nv + na - (n+1)\tfrac{\tau}{2}, n\tau\right) \\
&+ c_3 \cdot e^{-3\pi i v} \cdot \vartheta_3\left(nv + na - \tfrac{3\tau}{2}, n\tau\right) \\
&+ c_{n+3} \cdot e^{-\pi i(n+3)v} \cdot \vartheta_3\left(nv + na - (n+3)\tfrac{\tau}{2}, n\tau\right) \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

Wir setzen jetzt an Stelle von v der Reihe nach:

$$v, v + \tfrac{2}{n}, v + \tfrac{4}{n}, \cdots, v + \tfrac{2(n-1)}{n},$$

multipliciren die Gleichungen der Reihe nach mit:

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$$

und addiren, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
n\Big[&c_1 \cdot e^{-\pi i v} \cdot \vartheta_3\left(nv + na - \tfrac{\tau}{2}, n\tau\right) \\
&+ c_{n+1} \cdot e^{-i\pi(n+1)v} \cdot \vartheta_3\left(nv + na - (n+1)\tfrac{\tau}{2}, n\tau\right)\Big] = \sum_0^{n-1} r \alpha^r \cdot f\left(v + \tfrac{2r}{n}\right),
\end{aligned}$$

oder also, indem wir etwa $v = 0$ setzen:

$$(13)_a \qquad n\left[c_1 \cdot \vartheta_3\left(na - \tfrac{\tau}{2}, n\tau\right) + c_{n+1} \cdot \vartheta_3\left(na - (n+1)\tfrac{\tau}{2}, n\tau\right)\right] = \sum_0^{n-1} r\, \alpha^r \cdot f\left(\tfrac{2r}{n}\right).$$

Setzen wir überdies in der vorletzten Gleichung an Stelle von v: $v + \frac{1}{n}$ und dann $v = 0$, so erhalten wir die weitere Gleichung:

$$(13)_b \quad n\left[c_1 \cdot \vartheta_3\left(na - \tfrac{\tau}{2}, n\tau\right) - c_{n+1} \cdot \vartheta_3\left(na - (n+1)\tfrac{\tau}{2}, n\tau\right)\right] = e^{\frac{\pi i}{n}} \sum_0^{n-1} a^r \cdot f\left(v + \frac{2r+1}{n}\right).$$

Diese beiden Gleichungen ergeben dann die Bestimmung der beiden Constanten c_1 und c_{n+1}. Genau so können die übrigen Constanten berechnet werden.

Im letzten Falle endlich haben wir zu setzen:

$$(14) \quad f(v) = \sum_0^n c_{2k-1} \cdot e^{-\pi i(2k-1)v} \cdot \vartheta_3\left(nv + na - \left(\frac{2k-1}{2}\right)\tau, n\tau\right),$$

wobei dann die Constanten analog wie im vorletzten Falle zu bestimmen sind.

§ 2.

Entwickelung der Primfunctionen in trigonometrische Reihen mit Hülfe von Restfunctionen.

Es soll jetzt das Problem gelöst werden, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Wir führen dazu gewisse Hülfsfunctionen ein, die mit den von Herrn Appell eingeführten nahe verwandt sind und mit dem Namen von *Restfunctionen* bezeichnet werden sollen. Wir setzen:

$$(1) \quad F_{33}(v,\tau) = e^{(n+1)\left(v+\frac{1}{2}\right)} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2m+1)\pi i\left(v + \frac{(2m+1)\tau}{4} + \frac{(n+1)a}{n} + \frac{(n+1)\tau}{2n}\right)}}{\cos\pi\left(v + \frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

wobei a einen völlig willkürlichen Parameter bedeutet.

Dann folgt zunächst die Convergenz dieses Ausdrucks für alle Werthe von v, die verschieden sind von

$$r - \frac{1}{2} + \left(s + \frac{1}{2}\right)\tau$$

— vorausgesetzt, dass r und s ganze Zahlen bedeuten.

In der That, ziehen wir zunächst nur die Glieder in Betracht, welche positiven Werthen von m entsprechen und bilden den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder, so wird derselbe gleich:

$$e^{2\pi i\left(v + \frac{(n+1)a}{n} + (m+1)\tau + \frac{n+1}{2n}\tau\right) + i\pi\tau} \cdot \frac{1 + e^{2\pi i\left(v + \frac{2m+1}{2}\tau\right)}}{1 + e^{2\pi i\left(v + \frac{2m+3}{2}\tau\right)}}.$$

Dieser Quotient nähert sich aber mit wachsendem Werthe von m immer mehr der Grenze Null.

Das analoge gilt von den Gliedern, die den negativen Werthen von m entsprechen.

Als Function von v aufgefasst, genügt der Ausdruck überdies den Gleichungen:

$$F_{33}(v+1,\tau) = F_{33}(v,\tau),$$
$$F_{33}(v+\tau,\tau) = e^{-\pi i n\left(2v+\frac{2(n+1)}{n}a+\tau\right)} \cdot F_{33}(v,\tau).$$

Die erste Gleichung ist unmittelbar klar. Um die zweite zu beweisen, setzen wir an Stelle von m: $m+1$, so kann der Ausdruck unter dem Summenzeichen geschrieben werden:

$$\frac{e^{(2m+1)n\pi i\left(v+\tau+\frac{n+1}{n}a+\frac{(n+1)\tau}{2n}+\frac{2m+1}{4}\tau\right)+\pi i n\left(2v+\frac{2(n+1)a}{n}+\tau\right)+\pi i(n+1)\tau}}{\cos\pi\left(v+\tau+\frac{2m+1}{2}\tau\right)}.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Die Function wird an den Unendlichkeitsstellen, wie man sich leicht überzeugt, von der ersten Ordnung unendlich gross.

Hieraus folgt für gerade n unmittelbar die Relation:

$$(2)_a \quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\cdot\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]} = (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot F_{33}(v,\tau)$$
$$+\sum_0^{n-1 k} c_k\cdot e^{-2\pi i k v}\cdot\vartheta_3(nv+(n+1)a-k\tau,n\tau),$$

für ungerade n dagegen:

$$(2)_b \quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\cdot\vartheta_2[(n+1)a,(n+1)\tau]} = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot F_{33}(v,\tau)$$
$$+\sum_0^{n-1 k} c_k\cdot e^{-2\pi i k v}\cdot\vartheta_3(nv+(n+1)a-k\tau,n\tau).$$

Die Bestimmung der Constanten c_k erfolgt nach den Methoden des ersten Paragraphen. Hiermit ist die Entwickelung des einen Quotienten völlig gegeben. In analoger Weise können die anderen Quotienten bestimmt werden. Wir bestimmen dazu eine Reihe weiterer Restfunctionen, bei welchen wir zur Vereinfachung setzen:

$$w = v + \frac{(n+1)}{n}a,$$

und welche das Gleichungssystem (3) ergeben.

$$F_{32}(v,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{2mni\pi\left(w+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\cos\pi(v+m\tau)},$$

$$F_{31}(v,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{2mni\pi\left(w+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\sin\pi(v+m\tau)},$$

$$F_{30}(v,\tau) = e^{(n+1)\pi iv} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{(2m+1)ni\pi\left(w+\frac{2m+1}{4}\tau+\frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\sin\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

$$F_{23}(v,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{(2m+1)ni\pi\left(w+\frac{2m+1}{4}\tau\right)}}{\cos\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

$$F_{22}(v,\tau) = e^{(n+1)\pi i\left(v+\frac{1}{2}\right)} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{2mni\pi\left(w+\frac{m\tau}{2}+\frac{(n+1)\tau}{2n}\right)}}{\cos\pi(v+m\tau)},$$

$$F_{21}(v,\tau) = e^{(n+1)\pi iv} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{2mni\pi\left(w+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\sin\pi(v+m\tau)},$$

$$F_{20}(v,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{(2m+1)ni\pi\left(w+\frac{2m+1}{4}\tau\right)}}{\sin\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

$$F_{13}(v,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{(2m+1)ni\pi\left(w+\frac{2m+1}{4}\tau\right)}}{\cos\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

$$F_{12}(v,\tau) = e^{(n+1)\pi i\left(v+\frac{1}{2}\right)} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{2mni\pi\left(w+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\cos\pi(v+m\tau)},$$

$$F_{11}(v,\tau) = e^{(n+1)\pi iv} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{2mni\pi\left(w+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\sin\pi(v+m\tau)},$$

$$F_{10}(v,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{(2m+1)ni\pi\left(w+\frac{2m+1}{4}\tau\right)}}{\sin\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

$$F_{03}(v,\tau) = e^{(n+1)\pi i\left(v+\frac{1}{2}\right)} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{(2m+1)ni\pi\left(w+\frac{2m+1}{4}\tau+\frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\cos\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

$$F_{02}(v,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{2mni\pi\left(w+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\cos\pi(v+m\tau)},$$

$$F_{01}(v,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{2mni\pi\left(w+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\sin\pi(v+m\tau)},$$

$$F_{00}(v,\tau) = e^{\pi i(n+1)v} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{(2m+1)ni\pi\left(w+\frac{2m+1}{4}\tau+\frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\sin\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)}.$$

Mit Hülfe dieser Functionen ist es leicht, die Entwickelung der gesuchten 16 Thetaquotienten in trigonometrische Reihen zu geben. Es muss hierbei unterschieden werden, ob n gerade oder ungerade ist.

I. $n \equiv 0 \bmod 2$.

$$\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\cdot\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} F_{33}(v,\tau) + \sum_0^{n-1}{}_k c_k \cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_3(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_2[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_2(v,\tau)\cdot\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} F_{22}(v,\tau) + \sum_0^{n-1}{}_k c_k \cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_3(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_1[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_1(v,\tau)\cdot\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$= F_{11}(v,\tau) + \sum_0^{n-1}{}_k c_k \cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_3(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_0(v,\tau)\cdot\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$= F_{00}(v,\tau) = \sum_0^{n-1}{}_k c_k \cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_3(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_3[(n+\tau)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_0(v,\tau)\cdot\vartheta_2[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}}\cdot F_{30}(v,\tau) + \sum_0^{n-1}{}_k c_k \cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_0(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_2[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_1(v,\tau)\cdot\vartheta_2[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$= F_{21}(v,\tau) + \sum_0^{n-1}{}_k c_k \cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_0(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_1[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_2(v,\tau)\,.\,\vartheta_2[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot F_{12}(v,\tau)+\sum_{0}^{n-1}{}^{k} c_k\cdot e^{-2\pi i k v}\cdot\vartheta_0(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\,.\,\vartheta_2[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot F_{03}(v,\tau)+\sum_{0}^{n-1}{}^{k} c_k\cdot e^{-2\pi i k v}\cdot\vartheta_0(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_2(v,\tau)\,.\,\vartheta_0[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{32}(v,\tau)+\sum_{1}^{n}{}^{k} c_{2k-1}\cdot e^{-\pi i(2k-1)v}\cdot\vartheta_3\left(nw-\left(\frac{2k-1}{2}\right)\tau,n\tau\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\,.\,\vartheta_0[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{23}(v,\tau)+\sum_{1}^{n}{}^{k} c_{2k-1}\cdot e^{-\pi i(2k-1)v}\cdot\vartheta_3\left(nw-\frac{2k-1}{2}\tau,n\tau\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_1[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_0(v,\tau)\,.\,\vartheta_0[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{10}(v,\tau)+\sum_{1}^{n}{}^{k} c_{2k-1}\cdot e^{-\pi i(2k-1)v}\cdot\vartheta_3\left(nw-\frac{2k-1}{2}\tau,n\tau\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_1(v,\tau)\,.\,\vartheta_0[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{01}(v,\tau)+\sum_{1}^{n}{}^{k} c_{2k-1}\cdot e^{-\pi i(2k-1)v}\cdot\vartheta_3\left(nw-\frac{2k-1}{2}\tau,n\tau\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_1(v,\tau)\,.\,\vartheta_3[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{31}(v,\tau)+\sum_{1}^{n}{}^{k} c_{2k-1}\cdot e^{-\pi i(2k-1)v}\cdot\vartheta_0\left(nw-\frac{2k-1}{2}\tau,n\tau\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_0(v,\tau)\,.\,\vartheta_3[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}}\cdot F_{20}(v,\tau)+\sum_{1}^{n}{}^{k} c_{2k-1}\cdot e^{-\pi i(2k-1)v}\cdot\vartheta_0\left(nw-\frac{2k-1}{2}\tau,n\tau\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_1(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\,.\,\vartheta_3[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{13}(v,\tau)+\sum_{1}^{n}{}^{k} c_{2k-1}\cdot e^{-\pi i(2k-1)v}\cdot\vartheta_0\left(nw-\frac{2k-1}{2}\tau,n\tau\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_2(v,\tau)\cdot\vartheta_2[(n+1)a,\,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{02}(v,\tau)+\sum_1^n c_{2k-1}\cdot e^{-\pi i(2k-1)v}\cdot\vartheta_0\left(nw-\frac{2k-1}{2}\tau,\,n\tau\right),$$

II. $n\equiv 1 \bmod 2$.

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\cdot\vartheta_3[(n+1)a,\,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot F_{33}(v,\tau)+\sum_0^{n-1} c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_3(nw-k\tau,\,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\cdot\vartheta_2[(n+1)a,\,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^n\cdot F_{23}(v,\tau)+\sum_0^{n-1} c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_3(nw-k\tau,\,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_0(v,\tau)\cdot\vartheta_1[(n+1)a,\,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{00}(v,\tau)+\sum_0^{n-1} c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_3(nw-k\tau,\,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_1[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_0(v,\tau)\cdot\vartheta_0[(n+1)a,\,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{10}(v,\tau)+\sum_0^{n-1} c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_3(nw-k\tau,\,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_0(v,\tau)\cdot\vartheta_3[(n+1)a,\,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}}\cdot F_{20}(v,\tau)+\sum_0^{n-1} c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_0(nw-k\tau,\,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_0(v,\tau)\cdot\vartheta_2[(n+1)a,\,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}}\cdot F_{30}(v,\tau)+\sum_0^{n-1} c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_0(nw-k\tau,\,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_1[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\cdot\vartheta_0[(n+1)a,\,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{n+\frac{1}{2}}\cdot F_{13}(v,\tau)+\sum_0^{n-1} c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_0(nw-k\tau,\,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_3(v,\tau)\cdot\vartheta_0[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot F_{03}(v,\tau)+\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_0(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_2(v,\tau)\cdot\vartheta_3[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{32}(v,\tau)+\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_2(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_1(v,\tau)\cdot\vartheta_2[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{\frac{n+1}{2}}F_{22}(v,\tau)+\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_2(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_1[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_1(v,\tau)\cdot\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{11}(v,\tau)+\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_2(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_1(v,\tau)\cdot\vartheta_0[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{01}(v,\tau)+\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_2(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_1(v,\tau)\cdot\vartheta_3[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{31}(v,\tau)+\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_1(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_1(v,\tau)\cdot\vartheta_2[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=F_{21}(v,\tau)+\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_1(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_1[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\cdot\vartheta_1'}{\vartheta_2(v,\tau)\cdot\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$

$$=(-1)^{\frac{n+1}{2}}F_{12}(v,\tau)+\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k\cdot e^{-2\pi ikv}\cdot\vartheta_1(nw-k\tau,n\tau),$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,.\,\vartheta_1'}{\vartheta_2(v,\tau)\,.\,\vartheta_0[(n+1)a,(n+1)\tau]}$$
$$=F_{02}(v,\tau)+\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k\cdot e^{-2\pi i k v}\cdot\vartheta_1(nw-k\tau,n\tau).$$

Die sämmtlichen in diesen Formeln auftretenden Constanten sind nach den Methoden des ersten Paragraphen unmittelbar bestimmbar.

§ 3.

Andere Darstellung desselben Problems. Reduction des allgemeinen Falles auf den Fall $n=1$. Neue Beziehungen zwischen den Restfunctionen und den transformirten Thetafunctionen.

Wir wollen dasselbe Problem jetzt in anderer Form lösen.

Sei zunächst wieder n eine gerade Zahl, so betrachten wir den Ausdruck:

$$(1)\qquad \sum_0^{n-1}{}_k\,\frac{\vartheta_3\left[(n+1)v+(n+1)a+\frac{(n+1)k}{n},(n+1)\tau\right]}{\vartheta_3\left(v+\frac{k}{n},\tau\right)}\,.\text{*)}$$

Derselbe möge auf den gemeinsamen Nenner

$$\prod_0^{n-1}{}_k\,\vartheta_3\left(v+\frac{k}{n},\tau\right)$$

gebracht werden. Die auf diese Weise entstehenden Zähler bezeichnen wir durch $F(v)$.

Dann leistet $F(v)$ den Gleichungen Genüge:

$$F\left(v+\tfrac{1}{n}\right)=F(v),$$
$$F(v+\tau)=e^{-2n\pi i\left(2v+\frac{2(n+1)a}{n}+\tau\right)}\cdot F(v).$$

Setzen wir demnach:

$$nv=v',\quad n\tau=\tau'$$

und sehen den Ausdruck als Function von v' und τ' an, so leistet er als solcher den Gleichungen Genüge:

$$\varphi(v'+1)=\quad\varphi(v'),$$
$$\varphi(v'+\tau')=-e^{-2i\pi(2v'+2(n+1)a+\tau')}\varphi(v')$$

*) Soweit dem Verfasser bekannt, sind derartige Summen noch nicht betrachtet worden. Diejenigen Summen von Thetaquotienten, die in den Arbeiten von Jacobi, Hermite, Enneper, Herstowski u. a. betrachtet worden sind, enthalten lediglich Thetafunctionen, die denselben Modul besitzen, während hier verschiedene Moduln vorkommen.

kann also nach bekannten Regeln dargestellt werden. Die Darstellung ist eine mannigfache. Wir wählen zunächst die folgende:

$$\varphi(v') = c_1 \cdot \vartheta_0(2v' + (n+1)a, 2\tau') + c_2 \cdot \vartheta_0(v', \tau') \cdot \vartheta_3(v' + (n+1)a, \tau')$$

oder also:

$$F(v) = c_1 \cdot \vartheta_0(2nv + (n+1)a, 2n\tau) + c_2 \cdot \vartheta_0(nv, n\tau) \cdot \vartheta_3(nv + (n+1)a, n\tau). \tag{2}$$

Die Constante c_1 wird in einfacher Weise bestimmt, indem man:

$$v = -\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$$

setzt und ähnlich einfach ist c_2 zu bestimmen, indem man v einen Werth beilegt, für welchen der Ausdruck:

$$\vartheta_0(nv, n\tau) \cdot \vartheta_3(nv + (n+1)a, n\tau)$$

nicht verschwindet.

Nun ist aber für ein gerades n:

$$\prod_0^{n-1}{}_k \vartheta_3\left(v + \frac{k}{n}, \tau\right) = c \cdot \vartheta_0(nv, n\tau)$$

wobei c einen bekannten Werth besitzt.

Hieraus folgt:

$$\sum_0^{n-1}{}_k \frac{\vartheta_3\left[(n+1)v + (n+1)a + \frac{(n+1)k}{n}, (n+1)\tau\right]}{\vartheta_3\left(v + \frac{k}{n}, \tau\right)} = c_{10} \cdot \frac{\vartheta_0(2nv + (n+1)a, 2n\tau)}{\vartheta_0(nv, n\tau)} + c_{20} \cdot \vartheta_3(nv + (n+1)a, n\tau). \tag{3}$$

In analoger Weise würde sich eine Reihe weiterer Gleichungen ergeben. Setzen wir dazu:

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

so folgen die Gleichungen (4):

$$\sum_0^{n-1}{}_k \alpha^k \cdot \frac{\vartheta_3\left[(n+1)v + (n+1)a + \frac{(n+1)k}{n}, (n+1)\tau\right]}{\vartheta_3\left(v + \frac{k}{n}, \tau\right)} = c_{11} \cdot e^{-2\pi i v} \cdot \frac{\vartheta_0[2nv + (n+1)a - \tau, 2n\tau]}{\vartheta_0(nv, n\tau)} + c_{21} \cdot e^{-2\pi i v} \cdot \vartheta_3(nv + (n+1)a - \tau, n\tau),$$

$$\sum_0^{n-1} \alpha^{2k} \cdot \frac{\vartheta_3\left[(n+1)v+(n+1)a+\frac{(n+1)k}{n},\ (n+1)\tau\right]}{\vartheta_3\left(v+\frac{k}{n},\ \tau\right)}$$

$$= c_{12} \cdot e^{-2\cdot 2\pi i v} \cdot \frac{\vartheta_0[2nv+(n+1)a-2\tau,\ 2n\tau]}{\vartheta_0(nv,\ n\tau)}$$

$$+ c_{22} \cdot e^{-2\cdot 2\pi i v} \cdot \vartheta_3(nv+(n+1)a-2\tau,\ n\tau),$$

. . . . . .

$$\sum_0^{n-1} \alpha^{(n-1)k} \cdot \frac{\vartheta_3\left[(n+1)v+(n+1)a+\frac{(n+1)k}{n},\ (n+1)\tau\right]}{\vartheta_3\left(v+\frac{k}{n},\ \tau\right)}$$

$$= c_{1\,n-1} \cdot e^{-2(n-1)\pi i v} \cdot \frac{\vartheta_0[2nv+(n+1)a-(n-1)\tau,\ 2n\tau]}{\vartheta_0(nv,\ n\tau)}$$

$$+ c_{2\,n-1} \cdot e^{-2(n-1)\pi i v} \cdot \vartheta_3(nv+(n+1)a-(n-1)\tau,\ n\tau).$$

Die Constanten sind in allen diesen Gleichungen unmittelbar bestimmt, mögen aber nicht besonders hingeschrieben werden.

Durch Addition aller Gleichungen erhalten wir dann eine Darstellung der Function:

$$\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,\ (n+1)\tau]}{\vartheta_3(v,\ \tau)}$$

durch die Functionen:

$$e^{-2r\pi i v} \cdot \frac{\vartheta_0(2nv+(n+1)a-r\tau,\ 2n\tau))}{\vartheta_0(nv,\ n\tau)}.$$

Es ist unser ursprüngliches Problem also darauf zurückgeführt, diese letzteren Functionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Setzen wir aber in diesen an Stelle von $nv : v$, von $n\tau : \tau$ so ist klar, dass das letzte Problem identisch ist mit dem Problem die Functionen:

$$\frac{\vartheta_0(2v+\alpha,\ 2\tau)}{\vartheta_0(v,\ \tau)}$$

in trigonometrische Reihen zu entwickeln. *Hiermit haben wir aber das ursprüngliche Problem, welches für ein beliebiges gerades n gilt, auf den Fall* $n = 1$ *zurückgeführt.* Dieser kann wieder direct und indirect behandelt werden. Auf die directe Behandlung möge bei anderer Gelegenheit eingegangen werden — die indirecte ergiebt sich unmittelbar, wenn wir in den allgemeinen Formeln $n = 1$ setzen.

Zu gleicher Zeit ergeben sich aber neue und interessante Beziehungen zwischen den Restfunctionen und den transformirten Thetafunctionen. In der That, wenn man mit den Functionen $F_{33}(v, \tau)$ analog verfährt, wie mit der Function:

$$\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,\ (n+1)\tau]}{\vartheta_3(v,\ \tau)}$$

so folgen die Beziehungen:

$$(5)\qquad \sum_0^{n-1} F_{33}\left(v+\frac{k}{n}\right) = c'_{10}\cdot\frac{\vartheta_0(2nv+(n+1)a,\,2n\tau)}{\vartheta_0(nv,\,n\tau)} + c'_{20}\cdot\vartheta_3(nv+(n+1)a,\,n\tau),$$

$$\sum_0^{n-1}\alpha^k\cdot F_{33}\left(v+\frac{k}{n}\right) = c'_{11}\cdot e^{-2\pi i v}\cdot\frac{\vartheta_0(2nv+(n+1)a-\tau,\,n\tau)}{\vartheta_0(nv,\,n\tau)} + c'_{21}\cdot e^{-2\pi i v}\cdot\vartheta_3(nv+(n+1)a-\tau,\,n\tau),$$

. . . . . .

$$\sum_0^{n-1}\alpha^{(n-1)k}\cdot F_{33}\left(v+\frac{k}{n}\right) = c'_{1n-1}\cdot e^{-2(n-1)\pi i v}\frac{\vartheta_0(2nv+(n+1)a-(n-1)\tau,\,2n\tau)}{\vartheta_0(nv,\,n\tau)} + c'_{2n-1}\cdot e^{-2(n-1)\pi i v}\cdot\vartheta_3(nv+(n+1)a-(n-1)\tau,n\tau).$$

Die Constanten sind wiederum unmittelbar zu bestimmen.

Diese Formeln lehren dann erstens die Entwickelung der Grössen:

$$\frac{e^{-2\pi i r v}\cdot\vartheta_0(2nv+(n+1)a-r\tau,\,2n\tau)}{\vartheta_0(nv,\,n\tau)}$$

in trigonometrische Reihen kennen, zweitens aber geben sie auch umgekehrt eine neue und wichtige Darstellung der Restfunctionen durch die transformirten Thetafunctionen.

Wir können aber noch weitere Beziehungen herstellen. Hierbei wollen wir anders verfahren wie vorhin.

Wir bilden dazu den Ausdruck:

$$\vartheta_0(nv,\,n\tau)\cdot\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]}{\vartheta_3(v,\,\tau)}.$$

Derselbe ist eine ganze transcendente Function von v und überdies eine Thetafunction $2n^{\text{ter}}$ Ordnung. Hieraus folgt die Darstellung:

$$(6)\qquad \vartheta_0(nv,\,n\tau)\cdot\frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,\,(n+1)\tau]}{\vartheta_3(v,\,\tau)} = \sum_0^{2n-1} c_k\cdot e^{-2\pi i k v}\cdot\vartheta_0(2nv+(n+1)a-k\tau,\,2n\tau).$$

Die Constanten sind nach den Regeln des ersten Paragraphen bestimmt. *Hiermit ist wieder der allgemeine Fall auf den Fall $n=1$ zurückgeführt.*

Genau so würde folgen:

$$(7)\quad \vartheta_0(nv,n\tau)\cdot F_{33}(v,\tau) = \sum_0^{2n-1} c_k\cdot e^{-2\pi i k v}\cdot\vartheta_0(2nv+(n+1)a-k\tau,2n\tau),$$

wobei die Constanten wieder nach angegebenen Regeln zu bestimmen sind. Diese Gleichung stellt in einer neuen und übersichtlichen Weise die Beziehungen dar, die zwischen den Restfunctionen und den transformirten Thetafunctionen bestehen.

Bei diesen Betrachtungen ist n als gerade Zahl angenommen worden. Ist n ungerade, so modificiren sich die Untersuchungen etwas. Es möge das nicht in völliger Ausführlichkeit durchgeführt werden.

Nehmen wir wieder die Summe:

$$\sum_0^{n-1} \alpha^{rk} \cdot \frac{\vartheta_3\left[(n+1)v+(n+1)a+\frac{k(n+1)}{n},\ (n+1)\tau\right]}{\vartheta_3\left(v+\frac{k}{n},\ \tau\right)},$$

so wird dieselbe für ein ungerades n sich in die Form bringen lassen:

$$c''_{1r} \cdot e^{-2\pi i r v} \cdot \frac{\vartheta_3[2nv+(n+1)a-r\tau,\ 2n\tau]}{\vartheta_3(nv,\ n\tau)}$$
$$+ c''_{2r} \cdot e^{-2\pi i r v} \cdot \vartheta_3(nv+(n+1)a-r\tau,\ n\tau),$$

wobei die Constanten wieder unmittelbar bestimmt sind. Die übrigen Betrachtungen bleiben analog wie vorhin.

Wir greifen diejenigen Formeln heraus, die sich in der Folge von besonderer Bedeutung zeigen werden und die den Uebergang zwischen dem allgemeinen Problem und dem Problem für den Fall $n = 1$ vermitteln.

I. $n \equiv 0 \bmod 2$.

$$\vartheta_0(nv,\ n\tau) \cdot \frac{\vartheta_3[(n+1)v+(n+1)a,\ (n+1)\tau]}{\vartheta_3(v,\ \tau)}$$
$$= \sum_0^{2n-1} c_k \cdot e^{-2\pi i k v} \cdot \vartheta_0(2nv+(n+1)a-k\tau,\ 2n\tau),$$

$$\vartheta_0(nv,\ n\tau) \cdot \frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,\ (n+1)\tau]}{\vartheta_3(v,\ \tau)}$$
$$= \sum_0^{2n-1} c_k \cdot e^{-2\pi i k v} \cdot \vartheta_3(2nv+(n+1)a-k\tau,\ 2n\tau),$$

$$\vartheta_0(nv,\ n\tau) \cdot \frac{\vartheta_2[(n+1)v+(n+1)a,\ (n+1)\tau]}{\vartheta_3(v,\ \tau)}$$
$$= \sum_1^{2n} c_k \cdot e^{-\pi i(2k-1)v} \cdot \vartheta_0\left(2nv+(n+1)a-\left(\frac{2k-1}{2}\right)\tau,\ 2n\tau\right),$$

$$\vartheta_0(nv,\ n\tau) \cdot \frac{\vartheta_1[(n+1)v+(n+1)a,\ (n+1)\tau]}{\vartheta_3(v,\ \tau)}$$
$$= \sum_1^{2n} c_k \cdot e^{-\pi i(2k-1)v} \cdot \vartheta_3\left(2nv+(n+1)a-\frac{2k-1}{2}\tau,\ 2n\tau\right).$$

Die übrigen Formeln folgen aus den hier entwickelten, indem v um halbe Perioden vermehrt wird. Die Constanten c_k sind in den verschiedenen Formeln verschieden und können nach den Methoden des ersten Paragraphen bestimmt werden.

II. $n \equiv 1 \bmod 2$.

$$\vartheta_2(nv, n\tau) \cdot \frac{\vartheta_2[(n+1)v + (n+1)a, (n+1)\tau]}{\vartheta_2(v, \tau)}$$
$$= \sum_0^{2n-1} c_k \cdot e^{-2\pi i k v} \cdot \vartheta_3(2nv + (n+1)a - k\tau, 2n\tau),$$

$$\vartheta_3(nv, n\tau) \cdot \frac{\vartheta_2[(n+1)v + (n+1)a, (n+1)\tau]}{\vartheta_2(v, \tau)}$$
$$= \sum_0^{2n-1} c_k \cdot e^{-2\pi i k v} \cdot \vartheta_0(2nv + (n+1)a - k\tau, 2n\tau),$$

$$\vartheta_3(nv, n\tau) \cdot \frac{\vartheta_2[(n+1)v + (n+1)a, (n+1)\tau]}{\vartheta_2(v, \tau)}$$
$$= \sum_1^{2n} c_k \cdot e^{-\pi i(2k-1)v} \cdot \vartheta_3\left(2nv + (n+1)a - \left(\frac{2k-1}{2}\right)\tau, 2n\tau\right),$$

$$\vartheta_3(nv, n\tau) \cdot \frac{\vartheta_1[(n+1)v + (n+1)a, (n+1)\tau]}{\vartheta_2(v, \tau)}$$
$$= \sum_1^{2n} c_k \cdot e^{-\pi i(2k-1)v} \cdot \vartheta_0\left(2nv + (n+1)a - \frac{2k-1}{2}\tau, 2n\tau\right).$$

Die fehlenden Formeln sind aus den hingeschriebenen wieder durch Substitution halber Perioden zu entwickeln.

§ 4.

Darstellung der Restfunctionen durch doppelt unendliche Reihen.

Es sollen jetzt die Restfunctionen in doppelt unendliche Reihen entwickelt werden. Es möge in Bezug hierauf wiederum auf die Arbeiten von Herrn Appell verwiesen werden. Wir wählen zunächst als besonders einfach die Function:

$$(1) \qquad F_{01}(v, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} m \frac{e^{2mni\pi\left(v + \frac{m\tau}{2} + \frac{(n+1)a}{n}\right)}}{\sin \pi(v + m\tau)},$$

und greifen zwei Glieder heraus, die gleichen und entgegengesetzten Werthen von m entsprechen.

$$e^{m^2 n\pi i\tau}\left[\frac{e^{2mni\pi\left(v+\frac{(n+1)a}{n}\right)}}{\sin\pi(v+m\tau)}+\frac{e^{-2mni\pi\left(v+\frac{(n+1)a}{n}\right)}}{\sin\pi(v-m\tau)}\right].$$

Nun ist:

$$\frac{1}{\sin\pi(v+m\tau)}=2i\sum_1^\infty{}_r e^{(2r-1)\pi i(v+m\tau)},$$

$$\frac{1}{\sin\pi(v-m\tau)}=-2i\sum_1^\infty{}_r e^{(2r-1)\pi i(-v+m\tau)}.$$

Hieraus folgt für das allgemeine Glied der Werth:

$$-4\sum_1^\infty{}_r e^{(2r-1)\pi im\tau\left(1+\frac{mn}{2r-1}\right)}\cdot\sin\left[2mn\pi\left(v+\frac{(n+1)a}{n}\right)+(2r-1)\pi v\right],$$

oder also wir erhalten die Darstellung:

$$(2)\qquad F_{01}(v,\tau)=\frac{1}{\sin\pi v}-4\sum_1^\infty{}_m\sum_1^\infty{}_r q^{m^2n+(2r-1)m}$$
$$\cdot\sin\left[v\pi(2mn+(2r-1))+2a\pi m(n+1)\right].$$

Auf die Grenzen, innerhalb welcher diese Darstellung gilt, braucht nicht näher eingegangen zu werden. Genau so würde folgen:

$$(3)\qquad F_{10}(v,\tau)=-4\sum_1^\infty{}_m\sum_1^\infty{}_r q^{\frac{(2m-1)^2}{4}n+(2r-1)\frac{2m-1}{2}}$$
$$\cdot\sin\left[v\pi((2m-1)n+(2r-1))+a\pi(2m-1)(n+1)\right].$$

Nehmen wir jetzt drittens:

$$F_{32}(v,\tau)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{e^{2mni\pi\left(v+\frac{m\tau}{2}+\frac{(n+1)a}{n}\right)}}{\cos\pi(v+m\tau)}.$$

Greifen wir wieder zwei Glieder heraus, die gleichen und entgegengesetzten Werthen von m entsprechen und berücksichtigen die Relationen:

$$\frac{1}{\cos\pi(v+m\tau)}=2\sum_1^\infty{}_r(-1)^{r-1}\cdot e^{(2r-1)i\pi(v+m\tau)},$$

$$\frac{1}{\cos\pi(v-m\tau)}=2\sum_1^\infty{}_r(-1)^{r-1}\cdot e^{(2r-1)i\pi(-v+m\tau)},$$

so folgt:

$$(4) \qquad F_{32}(v,\tau) = \frac{1}{\cos \pi v} + 4 \sum_{1}^{\infty}{}_m \sum_{1}^{\infty}{}_r (-1)^{r-1} \cdot q^{m^2 n + (2r-1)m}$$
$$\cdot \cos\left[v\pi(2mn-(2r-1)) + 2a\pi m(n+1)\right].$$

Ebenso wird:

$$(5) \qquad F_{23}(v,\tau) = 4 \sum_{1}^{\infty}{}_m \sum_{1}^{\infty}{}_r (-1)^{r-1} \cdot q^{\frac{(2m-1)^2}{2} n + \frac{(2m-1)(2r-1)}{2}}$$
$$\cdot \cos\left[v\pi((2m-1)n-(2r-1)) + a\pi(2m-1)(n+1)\right].$$

Damit sind diejenigen vier Functionen dargestellt, aus denen sich die noch fehlenden auf so einfache Weise ergeben, dass von ihrer Aufstellung abgesehen werden kann.

Rostock, den 21. Juli 1887.

Zur Theorie derjenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich rational und ganz durch zwei lineare Functionen und zwei Quadratwurzeln aus ganzen Functionen eines Parameters darstellen lassen.

Von

C. Weltzien in Berlin.

Die Darstellung der homogenen Coordinaten einer ebenen Curve mittelst einer unabhängigen Veränderlichen (eines „Parameters") hat zu einer grossen Anzahl interessanter Resultate Anlass gegeben. Die Form der Darstellung ist eine doppelte: entweder handelt es sich um transcendente Functionen oder um algebraische. Für die Curven vom Geschlechte 0 (die rationalen Curven) benutzt man z. B. entweder trigonometrische oder ganze Functionen. Unter Benutzung der letzteren Darstellungsform kann die Theorie dieser Curven, soweit sie sich auf die Gleichungen für die Parameter der Doppelpunkte, Wendepunkte und Berührungspunkte der Doppeltangenten bezieht, mittelst rein algebraischer Rechnungen entwickelt werden. Für die Curven vom Geschlechte 1 (die elliptischen) und die hyperelliptischen Curven vom Geschlechte 2, 3, 4, . . . bedient sich die erste Form elliptischer, resp. hyperelliptischer Functionen, die zweite bedarf, abgesehen von ganzen Functionen, nur der Quadratwurzeln aus ganzen Functionen. Für diese Curven ist die zweite Darstellungsform weit seltener benutzt worden, als die erste. Schon Clebsch hat in seiner grundlegenden Arbeit*) mehr von jener Darstellung Gebrauch gemacht, als von dieser; diese hat er hauptsächlich zu dem Zwecke benutzt, die Anzahl der Doppelpunkte der elliptischen Curven zu bestimmen, er hat bewiesen, dass die Gleichung $n(n-3)^{ten}$ Grades für die $n(n-3)$ Parameter der Doppelpunkte mittelst einer Gleichung vom Grade $\frac{n(n-3)}{2}$ und

*) Clebsch: Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. Crelle's Journal Bd. 64. — Clebsch: Vorlesungen über Geometrie. Herausgegeben von Lindemann.

$\frac{n(n-3)}{2}$ quadratische Gleichungen gelöst werden kann. Aehnliches gilt für die hyperelliptischen Functionen. Die Herleitung der Gleichung $n(n-3)^{\text{ten}}$ Grades würde nach dem Verfahren von Clebsch die Absonderung eines überflüssigen Factors vom Grade: $3n-8+4(n-3)(n-4)$ erfordern und daher zu umständlich sein. Deshalb ist sowohl diese Gleichung als auch die reducirte Gleichung vom Grade $\frac{n(n-3)}{2}$ weder für die elliptischen, noch für die hyperelliptischen Curven bisher aufgestellt worden. Für eine specielle Art von Curven, nämlich für diejenigen, deren homogene Coordinaten x_1, x_2, x_3 sich in der Form:

$$A: \quad \begin{aligned} \varrho x_1 &= (a_0 t + a_1)\sqrt{E(t)} + (a_2 t + a_3)\sqrt{F(t)}, \\ \varrho x_2 &= (b_0 t + b_1)\sqrt{E(t)} + (b_2 t + b_3)\sqrt{F(t)}, \\ \varrho x_3 &= (c_0 t + c_1)\sqrt{E(t)} + (c_2 t + c_3)\sqrt{F(t)} \end{aligned}$$

darstellen lassen, worin $E(t), F(t)$ ganze Functionen von t bedeuten, soll dies im 2^{ten} Abschnitt der folgenden Untersuchung ausgeführt werden.

Bezeichnet $\varrho + 1$ den Grad der Functionen $E(t), F(t)$, wobei $\varrho \geqq 1$ ist, so stellen die Gleichungen A eine Curve von der $(\varrho+3)^{\text{ten}}$ Ordnung dar, deren Geschlecht gleich ϱ ist. Im ersten Abschnitt soll durch Elimination des Parameters t und der Grösse ϱ die zwischen x_1, x_2, x_3 bestehende Gleichung der durch A definirten Curve $(\varrho+3)^{\text{ter}}$ Ordnung aufgestellt werden.

Für beide Aufgaben beschränke ich mich auf die durch A dargestellten Curven 4^{ter}, 5^{ter}, 6^{ter} Ordnung.

I.

Die Curvengleichung.

Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_\alpha & a_\beta \\ x_2 & b_\alpha & b_\beta \\ x_3 & c_\alpha & c_\beta \end{vmatrix} \text{ durch } \alpha\beta,$$

so ergeben sich aus A leicht folgende Gleichungen:

$$(1) \qquad 01\sqrt{E(t)} = -(02t + 03)\sqrt{F(t)},$$

$$(2) \qquad (02t + 12)\sqrt{E(t)} = 23\sqrt{F(t)},$$

$$(3) \qquad 02t^2 + (03 + 12)t + 13 = 0.$$

Um aus diesen Gleichungen, von denen nur 2 unabhängig sind, die Curvengleichung ohne fremde Factoren darzustellen, bilde man

das Quadrat der ersten Gleichung, ebenso das Quadrat der 2^{ten} Gleichung; dann zeigt sich, dass der Coefficient von $t^{3+\varrho}$ den Factor 02^2, der Coefficient von $t^{2+\varrho}$ den Factor 02 enthält; daher können diese beiden Glieder mit Hülfe der Gleichung (3) fortgeschafft werden, ohne dass dadurch die Ordnung der Coefficienten (als Functionen von x_1, x_2, x_3 betrachtet) erhöht wird. Dadurch erhält man 2 Gleichungen, die für t vom Grade $1 + \varrho$ sind; multiplicirt man die Gleichung (3) mit $t^0, t^1, t^2, \ldots, t^{\varrho-1}$, so erhält man ϱ weitere Gleichungen und kann $t^0, t^1, t^2, \ldots, t^{\varrho+1}$, wie aus linearen Gleichungen, eliminiren. Das Eliminationsresultat enthält noch den der Lösung fremden Factor $12 - 03$; es erscheint in Form einer verschwindenden Determinante, die nach Potenzen von $12 - 03$ entwickelt werden kann; der Coefficient des von $12 - 03$ unabhängigen Gliedes verschwindet identisch, die Gleichung wird durch $12 - 03$ theilbar.

§ 1.

Die Gleichung der elliptischen Curve 4^{ter} Ordnung.

Sollen die Gleichungen A eine Curve 4^{ter} Ordnung darstellen, so müssen $E(t)$, $F(t)$ ganze Functionen 2^{ten} Grades:

$$E(t) = E_0 t^2 + E_1 t + E_2,$$
$$F(t) = F_0 t^2 + F_1 t + F_2,$$

sein.

Um nun die Gleichung (1) zu quadriren und in der angegebenen Weise zu reduciren, bemerke man zunächst, dass in Folge der Gleichung (3):

$$(02t + 03)^2 = 03^2 - 02 \cdot 13 - (12 - 03)\, 02t$$

wird; ebenso wird:

$$-02t(F_0 t^2 + F_1 t + F_2)$$
$$= -02F_2 t + [(03 + 12)\, t + 13]\, (F_0 t + F_1);$$

daher wird die erste Gleichung die Form annehmen:

$$(12^2 - 02 \cdot 13)\, (F_0 t^2 + F_1 t) + (03^2 - 02 \cdot 13)\, F_2$$
$$+ (12 - 03)\, [(13F_0 - 02F_2)t + 13F_1] - 01^2(E_0 t^2 + E_1 t + E_2) = 0,$$

oder, wenn man bedenkt, dass:

$$01 \cdot 23 - 02 \cdot 13 + 03 \cdot 12 = 0$$

ist,

$$[01(01E_0 + 23F_0) - (12 - 03)\, 12F_0]\, t^2$$
$$+ [01(01E_1 + 23F_1) - (12 - 03)\, (13F_0 + 12F_1 - 02F_2)]\, t$$
$$+ 01(01E_2 + 23F_2) - (12 - 03)\, (13F_1 - 03F_2) = 0.$$

Durch dasselbe Verfahren erhält man aus der 2^{ten} Gleichung:

$$[23(01E_0 + 23F_0) + (12 - 03)\,03E_0]\,t^2 + [23(01E_1 + 23F_1) + (12 - 03)(13E_0 + 03E_1 - 02E_2)]\,t + 23(01E_2 + 23F_2) + (12 - 03)(13E_1 - 12E_2) = 0.$$

Fügt man hierzu die 3te Gleichung:

$$02t^2 + (03 + 12)\,t + 13 = 0,$$

so kann man t^2, t^1, t^0, wie aus linearen Gleichungen, eliminiren und erhält die noch mit einem fremden Factor ersten Grades multiplicirte Gleichung der Curve in der Form einer verschwindenden Determinante von 3^2 Elementen. Die Glieder der ersten und 2ten Horizontalreihe bestehen aus 2 Theilen, von denen der eine den Factor $12-03$ enthält; demgemäss kann man die Determinante in 4 andere zerlegen, von denen diejenige, welche den Factor $12 - 03$ nicht enthält, verschwindet, da die Glieder der ersten Reihe den entsprechenden der zweiten proportional sind. Von den 3 übrigen Determinanten enthalten zwei den Factor $12-03$ zur ersten, eine denselben zur zweiten Potenz. Man kann mithin durch $12-03$ dividiren und erhält dadurch die Gleichung der Curve 4ter Ordnung in der Form:

$$23\vartheta_{01} + 01\vartheta_{10} + (12 - 03)\,\vartheta_{11} = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$\begin{vmatrix} 12F_0 & 13F_0+12F_1-02F_2 & 13F_1-03F_2 \\ 01E_0+23F_0 & 01E_1+23F_1 & 01E_2+23F_2 \\ 02 & 03+12 & 13 \end{vmatrix} = \vartheta_{01},$$

$$\begin{vmatrix} 03E_0 & 13E_0+03E_1-02E_2 & 13E_1-12E_2 \\ 01E_0+23F_0 & 01E_1+23F_1 & 01E_2+23F_2 \\ 02 & 03+12 & 13 \end{vmatrix} = \vartheta_{10},$$

$$\begin{vmatrix} 12F_0 & 13F_0+12F_1-02F_2 & 13F_1-03F_2 \\ 03E_0 & 13E_0+03E_1-02E_2 & 13E_1-12E_2 \\ 02 & 03+12 & 13 \end{vmatrix} = \vartheta_{11}.$$

§ 2.

Die Curven 5ter Ordnung.

Die Gleichungen A stellen eine Curve 5ter Ordnung dar, wenn $E(t)$, $F(t)$ ganze Functionen 3ten Grades bedeuten:

$$E(t) = E_0t^3 + E_1t^2 + E_2t + E_3,$$
$$F(t) = F_0t^3 + F_1t^2 + F_2t + F_3.$$

Durch dasselbe Verfahren, wie in § 1, erhält man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&[01(01E_0 + 23F_0) - (12 - 03)\,12F_0]\,t^3\\
+\,&[01(01E_1 + 23F_1) - (12 - 03)\,(13F_0 + 12F_1)]\,t^2\\
+\,&[01(01E_2 + 23F_2) - (12 - 03)\,(13F_1 + 12F_2 - 02F_3)]\,t\\
+\,&\;01(01E_3 + 23F_3) - (12 - 03)\,(13F_2 - 03F_3)
\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&[23(01E_0 + 23F_0) + (12 - 03)\,03E_0]\,t^3\\
+\,&[23(01E_1 + 23F_1) + (12 - 03)\,(13E_0 + 03E_1)\,t^2\\
+\,&[23(01E_2 + 23F_2) + (12 - 03)\,(13E_1 + 03E_2 - 02E_3)]\,t\\
+\,&\;23(01E_3 + 23F_3) + (12 - 03)\,(13E_2 - 12F_3)
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Fügt man hierzu die Gleichungen:

$$02t^3 + (03 + 12)\,t^2 + 13t = 0,$$
$$02t^2 + (03 + 12)\,t + 13 = 0,$$

so kann man t^3, t^2, t^1, t^0, wie aus linearen Gleichungen, eliminiren und erhält dadurch die Gleichung der Curve (zunächst noch mit einem der Lösung fremden Factor behaftet) in der Form einer verschwindenden Determinante von 4^2 Elementen. Zerlegt man diese in derselben Weise, wie in § 1, so verschwindet wieder diejenige Theildeterminante, welche $12 - 03$ nicht als Factor enthält; die übrigen Theildeterminanten sind durch $12 - 03$ theilbar; dividirt man durch $12 - 03$, so ergiebt sich die Curve 5^{ter} Ordnung in der Form:

$$23\vartheta_{01} + 01\vartheta_{10} + (12 - 03)\,\vartheta_{11} = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$\begin{vmatrix}
12F_0 & 13F_0+12F_1 & 13F_1+12F_2-02F_3 & 13F_2-03F_3\\
01E_0+23F_0 & 01E_1+23F_1 & 01E_2+23F_2 & 01F_3+23F_3\\
02 & 03+12 & 13 & 0\\
0 & 02 & 03+12 & 13
\end{vmatrix} = \vartheta_{01},$$

$$\begin{vmatrix}
03E_0 & 13E_0+03E_1 & 13E_1+03E_2-02E_3 & 13E_2-12E_3\\
01E_0+23F_0 & 01E_1+23F_1 & 01E_2+23F_2 & 01E_3+23F_3\\
02 & 03+12 & 13 & 0\\
0 & 02 & 03+12 & 13
\end{vmatrix} = \vartheta_{10},$$

$$\begin{vmatrix}
12F_0 & 13F_0+12F_1 & 13F_1+12F_2-02F_3 & 13F_2-03F_3\\
03E_0 & 13E_0+03E_1 & 13E_1+03E_2-02E_3 & 13E_2-12E_3\\
02 & 03+12 & 13 & 0\\
0 & 02 & 03+12 & 13
\end{vmatrix} = \vartheta_{11}.$$

§ 3.

Die Curven 6ter Ordnung.

Die Gleichungen A stellen eine Curve 6ter Ordnung dar, wenn $E(t)$, $F(t)$ ganze Functionen 4ten Grades sind:

$$E(t) = E_0 t^4 + E_1 t^3 + E_2 t^2 + E_3 t + E_4,$$
$$F(t) = F_0 t^4 + F_1 t^3 + F_2 t^2 + F_3 t + F_4.$$

Durch dasselbe Verfahren, wie in § 1, erhält man die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &[01(01E_0 + 23F_0) - (12 - 03)\,12F_0]\,t^4 \\ &+ [01(01E_1 + 23F_1) - (12 - 03)\,(13F_0 + 12F_1)]\,t^3 \\ &+ [01(01E_2 + 23F_2) - (12 - 03)\,(13F_1 + 12F_2)]\,t^2 \\ &+ [01(01E_3 + 23F_3) - (12 - 03)\,(13F_2 + 12F_3 - 02F_4)]\,t \\ &+ 01(01E_4 + 23F_4) - (12 - 03)\,(13F_3 - 03F_4) \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &[23(01E_0 + 23F_0) + (12 - 03)\,03E_0)]\,t^4 \cdot \\ &+ [23(01E_1 + 23F_1) + (12 - 03)\,(13E_0 + 03E_1)]\,t^3 \\ &+ [23(01E_2 + 23F_2) + (12 - 03)\,(13E_1 + 03E_2)]\,t^2 \\ &+ [23(01E_3 + 23F_3) + (12 - 03)\,(13E_2 + 03E_3 - 02E_4)]\,t \\ &+ 23(01E_4 + 23F_4) + (12 - 03)\,(13E_3 - 12E_4) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Fügt man hierzu die Gleichungen:

$$02t^4 + (03 + 12)\,t^3 + 13t^2 = 0,$$
$$02t^3 + (03 + 12)\,t^2 + 13t = 0,$$
$$02t^2 + (03 + 12)\,t + 13 = 0,$$

so kann man t^4, t^3, t^2, t^1, t^0, wie aus linearen Gleichungen, eliminiren und erhält dadurch die Gleichung der Curve (zunächst noch mit dem der Lösung fremden Factor $12 - 03$ behaftet) in der Form einer verschwindenden Determinante von 5^2 Elementen. In derselben Weise, wie früher, ergiebt sich durch die Absonderung des Factors $12 - 03$ die Gleichung der Curve 6ter Ordnung in der Form:

$$23\vartheta_{01} + 01\vartheta_{10} + (12 - 03)\,\vartheta_{11} = 0,$$

wo die drei letzten Reihen der Determinanten $\vartheta_{01}, \vartheta_{10}, \vartheta_{11}$:

$$\begin{array}{ccccc} 02 & 03 + 12 & 13 & 0 & 0, \\ 0 & 02 & 03 + 12 & 13 & 0, \\ 0 & 0 & 02 & 03 + 12 & 13 \end{array}$$

sind, während die 2te Reihe von ϑ_{01} und ϑ_{10}:

$$01E_0 + 23F_0 \quad 01E_1 + 23F_1 \quad 01E_2 + 23F_2 \quad 01E_3 + 23F_3 \quad 01E_4 + 23F_4,$$

die erste von ϑ_{01} und ϑ_{11}:

$$12F_0 \quad 13F_0 + 12F_1 \quad 13F_1 + 12F_2 \quad 13F_2 + 12F_3 - 02F_4$$
$$13F_3 - 03F_4,$$

die erste von ϑ_{10} und die zweite von ϑ_{11}:

$$03E_0, \quad 13E_0 + 03E_1 \quad 13E_1 + 03E_2 \quad 13E_2 + 03E_3 - 02F_4$$
$$13E_3 - 12F_4$$

ist.

II.

Die Doppelpunkte.

Für die durch A dargestellten Curven findet ein Doppelpunkt statt, wenn zwei Werthe t_1, t_2 des Parameters dieselben Werthe für $x_1 : x_2 : x_3$ liefern, wenn also die drei Quotienten:

$$\frac{(a_0t_1 + a_1)\sqrt{E(t_1)} + (a_2t_1 + a_3)\sqrt{F(t_1)}}{(a_0t_2 + a_1)\sqrt{E(t_2)} + (a_2t_2 + a_3)\sqrt{F(t_2)}},$$
$$\frac{(b_0t_1 + b_1)\sqrt{E(t_1)} + (b_2t_1 + b_3)\sqrt{F(t_1)}}{(b_0t_2 + b_1)\sqrt{E(t_2)} + (b_2t_2 + b_3)\sqrt{F(t_2)}},$$
$$\frac{(c_0t_1 + c_1)\sqrt{E(t_1)} + (c_2t_1 + c_3)\sqrt{F(t_1)}}{(c_0t_2 + c_1)\sqrt{E(t_2)} + (c_2t_2 + c_3)\sqrt{F(t_2)}},$$

denselben Werth $= \vartheta$ haben, oder wenn:

$$D: \quad \begin{aligned} &(a_0t_1 + a_1)\sqrt{E(t_1)} + (a_2t_1 + a_3)\sqrt{F(t_1)} \\ &+ \vartheta\{(a_0t_2 + a_1)\sqrt{E(t_2)} + (a_2t_2 + a_3)\sqrt{F(t_2)}\} = 0, \\ &(b_0t_1 + b_1)\sqrt{E(t_1)} + (b_2t_1 + b_3)\sqrt{F(t_1)} \\ &+ \vartheta\{(b_0t_2 + b_1)\sqrt{E(t_2)} + (b_2t_2 + b_3)\sqrt{F(t_2)}\} = 0, \\ &(c_0t_1 + c_1)\sqrt{E(t_1)} + (c_2t_1 + c_3)\sqrt{F(t_1)} \\ &+ \vartheta\{c_0t_2 + c_1)\sqrt{E(t_2)} + (c_2t_2 + c_3)\sqrt{F(t_2)}\} = 0, \end{aligned}$$

ist.

Bezeichnet man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_i & a_\varkappa & a_\lambda \\ b_i & b_\varkappa & b_\lambda \\ c_i & c_\varkappa & c_\lambda \end{vmatrix} \text{ durch } i\varkappa\lambda,$$

so ergiebt sich leicht aus den Gleichungen D:

$$(012t_1 + 013)\sqrt{E(t_2)} = (023t_1 + 123)\sqrt{F(t_2)},$$
$$(012t_2 + 013)\sqrt{E(t_1)} = (023t_2 + 123)\sqrt{F(t_1)};$$

oder, wenn man quadrirt:

$$(1) \qquad (\alpha_0 t_1 + \alpha_1)^2 E(t_2) - (\beta_0 t_1 + \beta_1)^2 F(t_2) = 0,$$

$$(2) \qquad (\alpha_0 t_2 + \alpha_1)^2 E(t_1) - (\beta_0 t_2 + \beta_1)^2 F(t_1) = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$012 = \alpha_0, \quad 013 = \alpha_1;$$
$$023 = \beta_0, \quad 123 = \beta_1.$$

Führt man nun:

$$t_1 + t_2 = \sigma,$$
$$t_1 t_2 = \tau$$

in diese Gleichungen ein, so erhält man durch Elimination von τ für σ eine Gleichung vom Grade:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \rho;$$

τ ist rational durch σ ausdrückbar; t_1, t_2 sind die Wurzeln der Gleichung:

$$T^2 - \sigma T + \tau = 0.$$

Hierbei bedeutet n die Ordnung, ρ das Geschlecht der durch A dargestellten Curven; für $n = 4, 5, 6$ ist resp. $\rho = 1, 2, 3$.

§ 1.

Die 2 Doppelpunkte der Curven 4ter Ordnung.

Die Gleichungen A stellen eine Curve von der Ordnung 4 und dem Geschlechte 1 dar, wenn $E(t)$, $F(t)$ ganze Functionen 2ten Grades von t bedeuten:

$$E(t) = E_0 t^2 + E_1 t + E_2,$$
$$F(t) = F_0 t^2 + F_1 t + F_2.$$

Setzt man diese Functionen in die Gleichungen (1) und (2) ein und subtrahirt die 2te von der ersten, so erhält man, nachdem man durch $t_1 - t_2$ dividirt hat:

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha_0^2 E_1 - 2\alpha_0\alpha_1 E_0 - \beta_0^2 F_1 + 2\beta_0\beta_1 F_0)\,\tau \\ + (\alpha_0^2 E_2 - \alpha_1^2 E_0 - \beta_0^2 F_2 + \beta_1^2 F_0)\,\sigma \\ + 2\alpha_0\alpha_1 E_2 - \alpha_1^2 E_1 - 2\beta_0\beta_1 F_2 + \beta_1^2 F_1 \end{array}\right\} = 0.$$

Subtrahirt man die mit t_2 multiplicirte 2te Gleichung von der mit t_1 multiplicirten ersten und dividirt durch $t_1 - t_2$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha_0^2 E_0 - \beta_0^2 F_0)\tau^2\\ &+\{(\alpha_0^2 E_1 - \beta_0^2 F_1)\sigma - \alpha_0^2 E_2 + 2\alpha_0\alpha_1 E_1 - \alpha_1^2 E_0 + \beta_0^2 F_2\\ &\qquad - 2\beta_0\beta_1 F_1 + \beta_1^2 F_0\}\tau\\ &+(\alpha_0^2 E_2 - \beta_0^2 F_2)\sigma^2 + 2(\alpha_0\alpha_1 E_2 - \beta_0\beta_1 F_2)\sigma + \alpha_1^2 E_2 - \beta_1^2 F_2\end{aligned}\right\} = 0.$$

Bezeichnet man durch $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ Functionen λ^{ten} Grades von σ, so ist die Eliminationsresultante dieser beiden Gleichungen von der Form:

$$\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{B}_0 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{B}_0 & \mathfrak{B}_1 & 0 \\ \mathfrak{A}_0 & \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 \end{vmatrix} = 0;$$

sie ist für σ vom 2^{ten} Grade; zu jedem Werthe von σ gehört ein Werth von τ, also auch ein Werthpaar t_1, t_2.

§ 2.

Die 4 Doppelpunkte der Curven 5^{ter} Ordnung.

Die Gleichungen A stellen eine Curve von der Ordnung 5 und dem Geschlechte 2 dar, wenn $E(t)$, $F(t)$ ganze Functionen 3^{ten} Grades von t bedeuten:

$$E(t) = E_0 t^3 + E_1 t^2 + E_2 t + E_3,$$
$$F(t) = F_0 t^3 + F_1 t^2 + F_2 t + F_3.$$

Setzt man diese Functionen in die Gleichungen (1) und (2) ein, subtrahirt die 2^{te} von der ersten und dividirt durch $t_1 - t_2$, so erhält man:

$$\mathfrak{C}_0\tau^2 + \mathfrak{C}_1\tau + \mathfrak{C}_2 = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$\alpha_0^2 E_0 - \beta_0^2 F_0 = \mathfrak{C}_0,$$
$$2(\alpha_0\alpha_1 E_0 - \beta_0\beta_1 F_0)\sigma - \alpha_0^2 E_2 + 2\alpha_0\alpha_1 E_1 - \alpha_1^2 E_0 + \beta_0^2 F_2 - 2\beta_0\beta_1 F_1 + \beta_1^2 F_0 = \mathfrak{C}_1,$$
$$(\alpha_1^2 E_0 - \beta_1^2 F_0)\sigma^2 + (\alpha_1^2 E_1 - \alpha_0^2 E_3 - \beta_1^2 F_1 + \beta_0^2 F_3)\sigma + \alpha_1^2 E_2 - 2\alpha_0\alpha_1 E_0 - \beta_1^2 F_2 + 2\beta_0\beta_1 F_0 = \mathfrak{C}_2.$$

Subtrahirt man die mit t_2 multiplicirte 2^{te} Gleichung von der mit t_1 multiplicirten ersten und dividirt durch $t_1 - t_2$, so erhält man:

$$\mathfrak{D}_0\tau^2 + \mathfrak{D}_1\tau + \mathfrak{D}_2 = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$\alpha_0^2 E_1 - 2\alpha_0\alpha_1 E_0 - \beta_0^2 F_1 + 2\beta_0\beta_1 F_0 = \mathfrak{D}_0,$$
$$(\alpha_0^2 E_2 - \alpha_1^2 E_0 - \beta_0^2 F_2 + \beta_1^2 F_0)\sigma - \alpha_0^2 E_3 + 2\alpha_0\alpha_1 E_2 - \alpha_1^2 E_1 + \beta_0^2 F_3 - 2\beta_0\beta_1 F_2 + \beta_1^2 F_1 = \mathfrak{D}_1,$$
$$(\alpha_0^2 E_3 - \beta_0^2 F_3)\sigma^2 + 2(\alpha_0\alpha_1 E_3 - \beta_0\beta_1 F_3)\sigma + \alpha_1^2 E_3 - \beta_1^2 F_3 = \mathfrak{D}_2.$$

Durch Elimination von τ ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen die Resultante in Form einer Determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{G}_0 & \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{G}_2 & 0 \\ 0 & \mathfrak{G}_0 & \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{G}_2 \\ \mathfrak{D}_0 & \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}_0 & \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche für σ vom 4^{ten} Grade ist; zu jedem Werthe von σ gehört ein Werth von τ, also auch ein Werthpaar t_1, t_2.

§ 3.

Die 7 Doppelpunkte der Curven 6^{ter} Ordnung.

Die Gleichungen A stellen eine Curve von der Ordnung 6 und dem Geschlecht 3 dar, wenn $E(t)$, $F(t)$ ganze Functionen 4^{ten} Grades bedeuten:

$$E(t) = E_0 t^4 + E_1 t^3 + E_2 t^2 + E_3 t + E_4,$$
$$F(t) = F_0 t^4 + F_1 t^3 + F_2 t^2 + F_3 t + F_4.$$

In derselben Weise, wie in den vorhergehenden Paragraphen, erhält man die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{G}_1 \tau^2 + \mathfrak{G}_2 \tau + \mathfrak{G}_3 = 0,$$
$$\mathfrak{H}_0 \tau^3 + \mathfrak{H}_1 \tau^2 + \mathfrak{H}_2 \tau + \mathfrak{H}_3 = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha_0^2 E_0 - \beta_0^2 F_0)\,\sigma + \alpha_0^2 E_1 - 2\alpha_0\alpha_1 E_0 - \beta_0^2 F_1 + 2\beta_0\beta_1 F_0 \\ &2(\alpha_0\alpha_1 E_0 - \beta_0\beta_1 F_0)\sigma^2 + 2(\alpha_0\alpha_1 E_1 - \alpha_1^2 E_0 - \beta_0\beta_1 F_1 + \beta_1^2 F_0)\,\sigma \\ &\quad - \alpha_0^2 E_3 + 2\alpha_0\alpha_1 E_2 - \alpha_1^2 E_1 + \beta_0^2 F_3 - 2\beta_0\beta_1 F_2 + \beta_1^2 F_1 \\ &(\alpha_1^2 E_0 - \beta_1^2 F_0)\,\sigma^3 + (\alpha_1^2 E_1 - \beta_1^2 F_1)\,\sigma^2 \\ &\quad + (\alpha_1^2 E_2 - \alpha_0^2 E_4 - \beta_1^2 F_2 + \beta_0^2 F_4)\,\sigma \\ &\quad + \alpha_1^2 E_3 - 2\alpha_0\alpha_1 E_4 - \beta_1^2 F_3 + 2\beta_0\beta_1 F_4 \end{aligned}\right\} = \mathfrak{G}_3;$$

$$\alpha_0^2 E_0 - \beta_0^2 F_0 = \mathfrak{H}_0,$$
$$2(\alpha_0\alpha_1 E_0 - \beta_0\beta_1 F_0)\,\sigma - \alpha_0^2 E_2 + 2\alpha_0\alpha_1 E_1 - \alpha_1^2 E_0 + \beta_0^2 F_2 - 2\beta_0\beta_1 F_1 + \beta_1^2 F_0 = \mathfrak{H}_1,$$

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha_1^2 E_0 - \beta_1^2 F_0)\,\sigma^2 + (\alpha_1^2 E_1 - \alpha_0^2 E_3 - \beta_1^2 F_1 + \beta_0^2 F_3)\,\sigma \\ &+ \alpha_0^2 E_4 - 2\alpha_0\alpha_1 E_3 + \alpha_1^2 E_2 - \beta_0^2 F_4 + 2\beta_0\beta_1 F_3 - \beta_1^2 F_2 \end{aligned}\right\} = \mathfrak{H}_2,$$
$$-(\alpha_0^2 E_4 - \beta_0^2 F_4)\sigma^2 - 2(\alpha_0\alpha_1 E_4 - \beta_0\beta_1 F_4)\,\sigma - \alpha_1^2 E_4 + \beta_1^2 F_4 = \mathfrak{H}_2'.$$

Die Eliminationsresultante ist:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{G}_2 & \mathfrak{G}_3 \\ 0 & \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{G}_2 & \mathfrak{G}_3 & 0 \\ \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{G}_2 & \mathfrak{G}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{H}_0 & \mathfrak{H}_1 & \mathfrak{H}_2 & \mathfrak{H}_2' \\ \mathfrak{H}_0 & \mathfrak{H}_1 & \mathfrak{H}_2 & \mathfrak{H}_2' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahirt man die mit σ multiplicirte 4^{te} Reihe von der 2^{ten}, die mit σ multiplicirte 5^{te} von der 3^{ten}, so wird:

$$\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{H}_0\sigma = \mathfrak{G}_0',$$
$$\mathfrak{G}_2 - \mathfrak{H}_1\sigma = \mathfrak{G}_1',$$
$$\mathfrak{G}_3 - \mathfrak{H}_2\sigma = \mathfrak{G}_2',$$

wo die Grössen $\mathfrak{G}_i'$ Functionen λ^{ten} Grades von σ sind. Die Eliminationsresultante ist daher vom 7^{ten} Grade für σ; zu jedem Werthe von σ gehört ein Werth von τ, also auch ein Werthpaar t_1, t_2.

Berlin, Juni 1887.

Ueber Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich.

Von

Oskar Bolza in Freiburg i. Br.

Im folgenden beabsichtige ich, ein Referat über eine Arbeit „Ueber Binärformen mit linearen Substitutionen in sich" zu geben, welche demnächst im American Journal of Mathematics in extenso erscheinen wird.

Es werden zunächst alle Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich bestimmt, sodann werden die nothwendigen und hinreichenden Relationen aufgestellt, welche für diese speciellen Formen sechster Ordnung einerseits zwischen den rationalen Invarianten, andererseits zwischen den ϑ-Moduln $\tau_{\alpha\beta}$ bestehen.

Im Zusammenhang damit wird in dem invariantentheoretischen Theil der Untersuchung eine Ergänzung zu dem Theorem von Clebsch über die lineare Transformirbarkeit zweier Binärformen sechster Ordnung in einander gegeben.

Die hier behandelten Fragen haben ein gewisses principielles Interesse für die Theorie der hyperelliptischen Modulfunctionen; in der That stellen die eben erwähnten Relationen zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$ Kanten und Ecken des bisher noch unbekannten Fundamentalraums für die hyperelliptischen Modulfunctionen dar, und die Frage der linearen Transformirbarkeit zweier Formen sechster Ordnung in einander hängt aufs engste mit der Frage zusammen: ob die rationalen absoluten Invarianten der Binärform sechster Ordnung eindeutige Functionen der Argumente $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ sind.

In diesem Sinne ist die vorliegende Arbeit, welche auf Anregung von Herrn Prof. F. Klein entstanden ist, als eine Vorarbeit für die Theorie der hyperelliptischen Modulfunctionen zu betrachten.

§ 1.

Bestimmung aller Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich.

Wenn eine Binärform sechster Ordnung f bei einer Reihe von linearen Substitutionen $S, S', S'', \ldots$ invariant*) bleibt, so bildet die Gesammtheit dieser Substitutionen eine *Gruppe* G; und es lässt sich zeigen, dass diese Gruppe *endlich* ist, vorausgesetzt, dass man die Substitutionen S auf die Determinante 1 bringt.

Sehen wir von der trivialen Gruppe:

$$x_1 = \pm x_1', \quad x_2 = \pm x_2'$$

welche *jede* Binärform sechster Ordnung invariant lässt, ab, so muss daher G eine der folgenden endlichen binären Gruppen sein:

1) eine cyklische Gruppe, oder
2) eine Diedergruppe, oder
3) die Tetraedergruppe, oder
4) die Oktaedergruppe, oder
5) die Ikosaedergruppe.

Aus der Theorie der endlichen binären Gruppen kennt man für jede derselben die Gestalt der allgemeinsten Binärform, welche bei Anwendung der Substitutionen der betreffenden Gruppe bis auf einen constanten Factor invariant bleibt; indem man nun alle diejenigen Fälle aufsucht, in welchen dieser allgemeinste Ausdruck einer invarianten Form speciell eine Form sechster Ordnung darstellt, gelangt man zu folgendem Resultat:

Jede Binärform sechster Ordnung, welche ausser den Substitutionen $x_1 = \pm x_1', x_2 = \pm x_2'$ *lineare Substitutionen in sich besitzt, und deren Wurzeln alle von einander verschieden sind, lässt sich durch eine lineare Transformation auf eine der folgenden kanonischen Formen reduciren:*

(A)

	Kanonische Form F:	Zugehörige binäre Gruppe:
I.	$z_1^6 + \alpha z_1^4 z_2^2 + \beta z_1^2 z_2^4 + z_2^6$	Cyklische Gruppe $n = 2$
II.	$z_1(z_1^5 + z_2^5)$	Cyklische Gruppe $n = 5$
III.	$z_1 z_2(z_1^4 + \alpha z_1^2 z_2^2 + z_2^4)$ $\alpha \gtrless 0, \quad \alpha \gtrless \pm \frac{10}{3}$	Diedergruppe $n = 2$
IV.	$z_1^6 + \alpha z_1^3 z_2^3 + z_2^6$ $\alpha \gtrless 0, \quad \alpha \gtrless \pm \sqrt{-50}$	Diedergruppe $n = 3$
V.	$z_1^6 + z_2^6$	Diedergruppe $n = 6$
VI.	$z_1 z_2(z_1^4 + z_2^4)$	Oktaedergruppe

*) Darunter ist im folgenden immer verstanden: invariant bis auf einen constanten Factor.

Die beigefügten Ungleichungen für den Parameter α sind nöthig, um jedesmal diejenigen speciellen Fälle auszuschliessen, in denen die Binärform sechster Ordnung bei einer umfassenderen Gruppe invariant bleibt. Z. B. würde:

$$F = z_1 z_2 (z_1^4 + \alpha z_1^2 z_2^2 + z_2^4)$$

bei $\alpha = 0$ sich auf die Form der Oktaedergruppe reduciren, während bei $\alpha = \pm \frac{10}{3}$ F sich durch eine lineare Transformation auf die Form $z_1^6 + z_2^6$ reduciren liesse. Die entsprechende Ungleichung für den Fall I ergiebt sich aus dem folgenden Paragraphen.

§ 2.

Die Invariantenrelationen.

Es handelt sich jetzt darum, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass eine Binärform sechster Ordnung durch lineare Transformation auf eine der eben angegebenen kanonischen Formen reducirbar ist.

Für die Fälle I und II sind diese Bedingungen bereits von Clebsch*) in Gestalt von Invariantenrelationen mitgetheilt worden; für die übrigen Fälle findet man die Bedingungen in einer Arbeit von Herrn Maisano**) in Gestalt von Covariantenbedingungen angegeben. Aber auch in diesen Fällen lassen sich die Kriterien durch Invariantenrelationen ausdrücken. Dieselben sind, unter Benutzung der Clebsch'schen Bezeichnungsweise, in der unten folgenden Tabelle in der zweiten Colonne zusammengestellt.

In der dritten Colonne ist für jeden der vier ersten Fälle eine quadratische Covariante angegeben, welche, in den kanonischen Variabeln z_1, z_2 geschrieben, die Form hat:

$$\text{Const. } z_1 z_2,$$

woraus sich unmittelbar die lineare Substitution ergiebt, durch welche die Form f mit den beliebigen Variabeln x_1, x_2 auf die kanonische Form F mit den kanonischen Variabeln z_1, z_2 reducirt wird; man hat nur für z_1, z_2 die beiden Linearfactoren der betreffenden quadratischen Covariante zu wählen, und dieselben mit solchen constanten Factoren zu multipliciren, dass in dem Ausdruck für F der Anfangs- und Endterm den Coefficienten 1 erhält.

Für die Fälle V und VI verschwinden alle quadratischen Covarianten identisch; es ist daher hier ein anderes Verfahren anzuwenden; dasselbe beruht darauf, dass die Bestimmung der kanonischen Variabeln z_1, z_2

*) Theorie der binären algebraischen Formen.

**) Sulla Sestica binaria, Atti della R. Accademia dei Lincei, 1883—84.

für unsere Formen mit linearen Substitutionen in sich identisch ist mit der Lösung des zur betreffenden Gruppe von linearen Substitutionen gehörigen Formenproblems.

Darnach erhält man für den Fall V z_1 und z_2 aus den beiden Gleichungen:

$$z_1^6 + z_2^6 = f, \quad z_1^6 - z_2^6 = \frac{\sqrt{f^2 A^2 - 2i^3}}{A},$$

für den Fall VI durch Auflösung der Gleichung:

$$16\varphi^3 + 6 \cdot \left(\frac{9}{A}\right)^{\frac{1}{2}} H \cdot \varphi + f^2 = 0,$$

deren drei Wurzeln sind:

$$\varphi_1 = (z_1 z_2)^2,$$
$$\varphi_2 = \frac{(z_1^2 - i z_2^2)^2}{4i},$$
$$\varphi_3 = \frac{-(z_1^2 + i z_2^2)^2}{4i}.$$

Wir lassen die Tabelle für die Invariantenrelationen folgen:

(B)

	Kanonische Form	Invariantencriterien	Quadr. Covariante
I.	$z_1^6 + \alpha z_1^4 z_2^2 + \beta z_1^2 z_2^4 + z_2^6$	$R = 0$ $A_{ll} A_{mm} - A_{lm}^2 \gtrless 0$	$(lm) l_x m_x$
II.	$z_1 (z_1^5 + z_2^5)$	$A = 0,\ B = 0,\ C = 0$ $D \gtrless 0$	m
III.	$z_1 z_2 (z_1^4 + \alpha z_1^2 z_2^2 + z_2^4)$ $\alpha \gtrless 0,\ \alpha \gtrless \pm \frac{10}{3}$	$4B^3 + 5ABC + 6C^2 - 3AD = 0$ $3AB^2 - 6BC + 4A^2C - 18D = 0$ $D \gtrless 0,\ 6C^2 - B^3 \gtrless 0$	l
IV.	$z_1^6 + \alpha z_1^3 z_2^3 + z_2^3$ $\alpha \gtrless 0,\ \alpha \gtrless \pm \sqrt{-50}$	$6C^2 - B^3 = 0$ $9D - 2B(6C + AB) = 0$ $D \gtrless 0,\ 2AB - 15C \gtrless 0$	l
V.	$z_1^6 + z_2^6$	$6B - A^2 = 0,\ 6C + AB = 0,\ D = 0$ $A \gtrless 0$	
VI.	$z_1 z_2 (z_1^4 + z_2^4)$	$B = 0,\ C = 0,\ D = 0$ $A \gtrless 0$	

§ 3.

Excurs über die lineare Transformirbarkeit zweier Binärformen sechster Ordnung in einander.

Im allgemeinen sind zwei Formen sechster Ordnung f und f' linear in einander transformirbar, sobald die entsprechenden absoluten Invarianten beider Formen einander gleich sind, wie Clebsch mit Hilfe der typischen Darstellung der Binärform sechster Ordnung durch quadratische Covarianten bewiesen hat.

Der Beweis verliert jedoch seine Gültigkeit in denjenigen Fällen, in welchen die typische Darstellung nicht möglich ist. Es soll in diesem Paragraphen die Frage beantwortet werden ob auch in diesen Ausnahmefällen die Gleichheit der absoluten Invarianten für die lineare Transformirbarkeit zweier Formen in einander hinreichend ist.

Nach den Untersuchungen von Clebsch wird die typische Darstellung durch quadratische Covarianten nur in folgenden Fällen unmöglich:

1) wenn f sich durch lineare Transformation auf eine der kanonischen Formen III bis VI der Tabelle (A) reduciren lässt;

2) wenn f eine drei- oder mehrfache Wurzel besitzt.

Was zunächst den ersten Fall betrifft, so folgt aus den in § 2 mitgetheilten Resultaten, dass hier die Gleichheit der absoluten Invarianten in der That hinreichend ist. Denn da diese Fälle durch *Invariantencriterien* vollkommen charakterisirt sind, und da der in Fall III und IV auftretende Parameter α beidemale die *Quadratwurzel aus einer rationalen absoluten Invariante ist*, so kann man die Formen f und f' in ein und dieselbe dritte Form transformiren, nämlich in die kanonische Form der Tabelle (A).

Dagegen ist im Fall einer vier-, oder fünf-, oder sechsfachen Wurzel die Gleichheit der absoluten Invarianten nicht hinreichend, da alle drei Fälle $A = B = C = D = 0$ liefern, sich also gar nicht durch Invariantencriterien von einander unterscheiden lassen.

Ebenso ist aber auch im Fall einer dreifachen Wurzel die Gleichheit der absoluten Invarianten nicht hinreichend. Denn obgleich sich die Criterien für das Auftreten einer dreifachen Wurzel durch Invariantenrelationen ausdrücken lassen, so lassen sich doch die verschiedenen dabei möglichen Fälle, nämlich:

eine dreifache und drei einfache Wurzeln,
eine dreifache, eine doppelte und eine einfache Wurzel,
zwei dreifache Wurzeln,

nicht durch Invariantencriterien von einander trennen,

Man kann also dem Satz über die lineare Transformirbarkeit

zweier Binärformen sechster Ordnung in einander die folgende präcisere Fassung geben:

Die Gleichheit der entsprechenden rationalen absoluten Invarianten zweier Binärformen sechster Ordnung ist hinreichend für die lineare Transformirbarkeit der beiden Formen in einander, mit einziger Ausnahme derjenigen Fälle, in denen eine der beiden Formen eine drei- oder mehrfache Wurzel besitzt.

§ 4.

Die Relationen zwischen den ϑ-Moduln $\tau_{\alpha\beta}$*).

Den Relationen, welche zwischen den *algebraischen* Invarianten der Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich bestehen, entsprechen Relationen zwischen den *transcendenten* Invarianten derselben, d. h. zwischen den ϑ-Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}.

Man beweist zunächst:

Wenn eine Binärform sechster Ordnung f mit lauter ungleichen Wurzeln lineare Substitutionen in sich besitzt, und es ist τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} irgend ein zu $\sqrt{f}$ gehöriges System von ϑ-Moduln, so entspricht jeder linearen Substitution S der Variabeln z_1, z_2, welche f invariant lässt, eine lineare Transformation s der Perioden, welche das Werthsystem τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} invariant lässt.

Umgekehrt: Wenn ein zu einer Binärform sechsten Grades mit lauter ungleichen Wurzeln gehöriges System von ϑ-Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} bei einer linearen Periodentransformation s ungeändert bleibt, so bleibt die Form f bei einer linearen Substitution S der Variabeln invariant.

Und wenn die lineare Substitution S der Variabeln von der Substitution

$$z_1 = \pm z_1', \quad z_2 = \pm z_2'$$

verschieden ist, so ist die entsprechende lineare Periodentransformation s nicht congruent zur Identität modulo 2, und umgekehrt.

Die Gleichungen, welche ausdrücken, dass das System der ϑ-Moduln bei der Periodentransformation s invariant bleibt, stellen aber gerade die gesuchten Relationen zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$ dar, und aus dieser Ableitung derselben ergiebt sich zugleich ihre oben erwähnte Bedeutung als Kanten und Ecken des Fundamentalraums für die hyperelliptischen Modulfunctionen.

Die Bestimmung der linearen Periodentransformation s erfolgt dadurch, dass man die conforme Abbildung des bei der Berechnung

*) Vgl. hierzu die Angaben des Hrn. Wiltheiss in Bd. 21 dieser Annalen, p. 398. D. Red.

der $\tau_{\alpha\beta}$ zu Grunde gelegten Systems von Periodenwegen betrachtet, welche durch die lineare Substitution S der Variabeln z_1, z_2 vermittelt wird. Es zeigt sich dabei, dass in allen Fällen die Betrachtung einer einzigen Substitution der Variabeln z_1, z_2 genügt, um alle zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$ bestehenden Relationen zu erhalten.

Wir stellen in der folgenden Tabelle die Resultate zusammen, wie sie sich bei geeigneter Wahl der Periodenwege ergeben:

(C)

	Kanonische Form	Relation zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$
I.	$z_1^6+\alpha z_1^4 z_2^2+\beta z_1^2 z_2^4+z_2^6$	$\tau_{12}=\frac{1}{2}$
II.	$z_1(z_1^5+z_2^5)$	$\tau_{11}=1-j^2,\ \tau_{12}=-j-j^2,\ \tau_{22}=j^3$ $j=e^{\frac{4\pi i}{5}}$
III.	$z_1 z_2(z_1^4+\alpha z_1^2 z_2^2+z_2^4)$	$\tau_{12}=\frac{1}{2}$ $\tau_{11}=\tau_{22}$
IV.	$z_1^6+\alpha z_1^3 z_2^3+z_2^6$	$\tau_{12}=\frac{1}{2}$ $12\tau_{11}\tau_{22}+1=0$
V.	$z_1^6+z_2^6$	$\tau_{12}=\frac{1}{2}$ $\tau_{11}=\tau_{22}=\frac{i}{2\sqrt{3}}$
VI.	$z_1 z_2(z_1^4+z_2^4)$	$\tau_{12}=\frac{1}{2}$ $\tau_{11}=\tau_{22}=\frac{-1+i\sqrt{2}}{2}$

Aus der Umkehrung des im Eingang dieses Paragraphen angeführten Satzes lässt sich zeigen, dass die angegebenen Relationen zugleich *hinreichend* sind; nur müssen noch gewisse Ungleichungen hinzugefügt werden, um die verschiedenen Fälle vollkommen von einander zu trennen (siehe die analoge Bemerkung zur Tabelle (A)).

Göttingen, den 1. August 1887.

Integration regulärer lineärer Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die Kettenbruchentwicklung von ganzen Abel'schen Integralen dritter Gattung.

Von

Karl Heun in München.

1.

Einleitung.

Die regulären lineären Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit i endlichen Verzweigungspunkten haben die Form

$$(1)\quad \psi x \cdot \psi x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \psi x \cdot G_1[i-1]\frac{dy}{dx} + G_2[2i-2]\cdot y = 0,$$

wenn

$$\psi x = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_i).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass das Integralsystem (y) keine anderen Unstetigkeitspunkte besitzt als die Verzweigungsstellen $\xi_1 \ldots \xi_i$. Die $2i+2$ Verzweigungsexponenten können jedoch, unbeschadet der Allgemeinheit, zum Theil solche Werthe erhalten, dass die ganze Function $G_2[2i-2]$, welche vom Grade $2i-2$ ist, durch ψx theilbar wird. Dann erhält man die reducirte Form der Differentialgl. (1):

$$(I)\qquad \psi x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \chi x \cdot \frac{dy}{dx} + \varpi x \cdot y = 0,$$

wo χx ebenso wie $G_1[i-1]$ vom Grade $i-1$ und ϖx vom Grade $i-2$ ist.

Von den $2i-1$ Coefficienten in Gl. (I) sind aber nur $i+1$ durch die Bedingungen der Verzweigungen bestimmt, so dass noch $i-2$ Coefficienten in ϖx unabhängig bleiben, welche ich im Folgenden die „charakteristischen" Parameter der Gl. (I) nennen will. Wird die

Function χx gewissen Beschränkungen unterworfen, dann lässt sich die Gl. (I) allgemein integriren, wenn nur der Coefficient der höchsten Potenz von x in ϖx eine bestimmte Form hat. Die charakteristischen Parameter können hierbei beliebig bleiben. Die bezüglichen Integrationsmethoden, welche sich im Wesentlichen auf die Bestimmung eines lineären homogenen Integrationsmultiplicators erster Ordnung von der Form $Gx \cdot \frac{dy}{dx} + Hx \cdot y$ zurückführen lassen, versagen aber in dem Falle, in welchem ein Fundamentalintegral der Gl. (I) eine ganze rationale Function wird. [Man vergl. die Abhandl. von Herrn Fuchs über die Integration der Lamé'schen Differentialgl., Göttinger Nachrichten 1878.] Gerade dieser Fall soll aber Gegenstand der folgenden Untersuchungen sein.

2.

Formale Einführung des Kettenbruchalgorithmus.

Damit y_1 als ganze rationale Function n^{ten} Grades der Gleichung

$$\psi x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + (k_1 x^{i-1} + k_2 x^{i-2} + \cdots + k_i)\frac{dy}{dx} + (k_2' x^{i-2} + k_3' x^{i-3} + \cdots + k_i')\, y = 0 \tag{I a}$$

genügen kann, muss die Bedingung stattfinden:

$$n(n-1) + k_1 n + k_2' = 0.$$

Diese Bedingung ist aber keineswegs hinreichend, sondern es müssen die $i-2$ charakteristischen Parameter $k_3', k_4' \cdots k_i'$ noch gewissen algebraischen Gleichungen genügen, die sich leicht durch Einsetzen der Function y_1 in Gl. (I a) ergeben. Diese Bedingungen genügen aber auch zur vollständigen Bestimmung dieser Parameter. [Man vergl. Heine, Handb. d. Kugelfunct. Bd. I, § 136.] Die Anzahl der ganzen Functionen y_1, welche sich auf diese Weise ergeben, ist gleich

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+i-2)}{1\cdot 2\cdots(i-2)}.$$

Aus diesen rationalen Lösungen ergeben sich dann die transcendenten Integrale y_2 vermittelst der Gleichung

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{\chi x}{\psi x} dx}}{y_1 \cdot y_1}\, dx. \tag{2}$$

In dem speciellen Falle wo $\chi x = \frac{1}{2}\frac{d\psi x}{dx}$ ist aber nach den bekannten Untersuchungen von Heine [Borchardt's Journ. Bd. 61]

$$(3) \qquad \frac{y_2}{\sqrt{\psi x}} = y_1 \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=i-1} C_\nu \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi z}} - Z,$$

wo Z eine ganze rationale Function bedeutet und die C_ν constante Werthe haben, welche sich aus gewissen algebraischen Gleichungen ergeben. Diese Relation ist aber in der Form enthalten:

$$(4) \qquad y_2 = V \cdot y_1 + E,$$

wo V und E Functionen von x sind, welche in Folge der Gleichung (2) der Bedingung

$$(5) \qquad y_1 \cdot y_1 \cdot \left[\frac{dV}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{E}{y_1}\right)\right] = c^{-\int \frac{\chi x}{\psi x} dx}$$

genügen müssen. Um daher das Resultat Heine's von der Beschränkung, welche der Function χx auferlegt ist, zu befreien, können wir, wie es schon in meiner Münchener Habilitationsschrift [*Ueber lineäre Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösungen durch den Kettenbruchalgorithmus verknüpft sind*, Göttingen 1881] geschehen ist, von der Bedingungsgleichung (5) ausgehen, um die Functionen V und E im allgemeinen Falle zu bestimmen.

Es sei

$$\frac{\chi x}{\psi x} = \frac{\gamma_1}{x-\xi_1} + \frac{\gamma_2}{x-\xi_2} + \cdots + \frac{\gamma_i}{x-\xi_i},$$

wo

$$\gamma_\nu = \frac{\chi \xi_\nu}{\psi' \xi_\nu},$$

ferner

$$(x-\xi_1)^{\gamma_1} \cdot (x-\xi_2)^{\gamma_2} \cdots (x-\xi_i)^{\gamma_i} = \theta x,$$

dann kann man in Gleichung (5) setzen:

$$V = \int \frac{\varkappa x}{dx} dx \quad \text{und} \quad E = -Z \cdot \frac{\psi x}{\theta x},$$

wo Z eine noch näher zu bestimmende ganze rationale Function vom Grade $n-1$ bedeuten soll. Folglich kann der Grad der gleichfalls noch unbestimmten ganzen Function $\varkappa x$ die Zahl $i-2$ nicht übersteigen.

Die Gleichung (4) heisst jetzt:

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{\varkappa x}{\theta x} dx - \frac{\psi x}{\theta x} \cdot Z$$

oder

$$\frac{\theta x}{\psi x} y_2 = y_1 \cdot \frac{\theta x}{\psi x} \int \frac{\varkappa x}{dx} dx - Z.$$

Es ist aber auch

$$R^{(n)} = N^{(n)} \cdot W - Z^{(n)},$$

wenn $Z^{(n)} : N^{(n)}$ der n^{te} Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung der transcendenten Function W, und $R^{(n)}$ der zugehörige Rest ist. Man kann desshalb setzen:

$$W = \frac{\theta x}{\psi x} \cdot \int \frac{\varkappa x}{\theta x}\, dx, \quad Z^{(n)} = Z, \quad N^{(n)} = y_1, \quad R^{(n)} = \frac{\Theta x}{\psi x} \cdot y_2,$$

wenn nachgewiesen ist, dass:

erstens W in einen Kettenbruch von der Form

$$W = \cfrac{C_0}{a_0 + b_0 x + \cfrac{C_1}{a_1 + b_1 x + \cfrac{C_2}{a_2 + b_2 x + \cdots}}}$$

entwickelbar ist, der für einen gegebenen Werth von n wenigstens bis zum n^{ten} Partialnenner (inclus.) „regulär" ist;

zweitens ebensoviele Werthe der Function $\varkappa x$ existiren als ganze rationale Lösungen y_1 existiren, nämlich

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i-2},$$

drittens die Function $R^{(n)} \frac{\psi x}{\theta x}$ wirklich eine „zweite" Lösung der Gleichung (I) darstellt.

3.

Transformation der Function W.

Um zunächst den Nachweis zu führen, dass das Integral W eine Kettenbruchentwicklung von der angedeuteten Form zulässt, genügt es zu zeigen, dass W in eine convergente Reihe entwickelbar ist, die nur Potenzen von x mit negativen Exponenten enthält. Setzt man zu diesem Ende $\frac{\psi x}{\theta x} = \varphi x$, dann ist nach einem bekannten Theorem von Abel [M. vergl. etwa Jacobi, Ges. Werke, Bd. II, pag. 125—127]:

$$\varphi x \cdot \int^{\cdot} \frac{dz}{(x-z)\,\varphi x} - \theta z \cdot \int^{\cdot} \frac{dx}{(z-x)\,\theta x}$$

$$= \sum_{m=0}^{m=i-2} \sum_{n=0}^{n=i-2} \left\{ \frac{m+1}{m+n+2}\, b^{(m+n+1)} - \frac{n+1}{m+n+2}\, c^{(m+n+1)} \right\} J_{m,n},$$

wo

$$J_{m,n} = \int^{\cdot} \frac{x^m \cdot dx}{\theta x} \cdot \int^{\cdot} \frac{z^n \cdot dz}{\varphi z},$$

$$\theta x \cdot \frac{d\varphi x}{dx} = b^{(0)} + b^{(1)} \cdot x + b^{(2)} \cdot xx + \cdots + b^{(i-1)} \cdot x^{i-1},$$

$$\varphi x \cdot \frac{d\theta x}{dx} = c^{(0)} + c^{(1)} \cdot x + c^{(2)} \cdot xx + \cdots + c^{(i-1)} \cdot x^{i-1}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $\Theta x = 0$ sind $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_i$. Integriren wir in der obigen Transformationsgleichung nach einander zwischen je zwei aufeinander folgenden dieser Grössen, dann erhalten wir Ausdrücke von der Form:

$$\varphi x \cdot \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{dz}{(x-z)\,\varphi z} = \sum_{m=0}^{m=i-2} \Gamma_i^{(m)} \cdot \int \frac{x^m\,dx}{\Theta x},$$

$$\nu = 1, 2, 3 \cdots i-1,$$

wo die Grössen $\Gamma_i^{(m)}$ bekannte Constanten sind. Man multiplicire nun diese $i-1$ Gleichungen der Reihe nach mit den Constanten $C_1, C_2 \ldots C_{i-1}$, und bilde die Summe dieser Producte. So erhält man:

$$\frac{\Theta x}{\psi x} \cdot \sum_\nu \sum_m \Gamma_\nu^{(m)} C_\nu \cdot \int \frac{x^m dx}{\Theta x} = \sum_\nu C_\nu \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{\Theta z}{(x-z)\,\psi z}\,dz.$$

Die Function $\varkappa x$ hat aber nach dem Vorigen die Form:

$$\varkappa x = \varkappa_0 + \varkappa_1 \cdot x + \varkappa_2 \cdot xx + \cdots + \varkappa_{i-2} \cdot x^{i-2}.$$

Es lässt sich also das Integral auf der linken Seite der obigen Gleichung mit dem ursprünglichen Ausdruck für W identificiren, wenn man setzt:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \Gamma_1^{(0)}\ C_1 + \Gamma_2^{(0)}\ C_2 + \cdots + \Gamma_{i-1}^{(0)}\ C_i = \varkappa_0, \\ \Gamma_1^{(1)}\ C_1 + \Gamma_2^{(1)}\ C_2 + \cdots + \Gamma_{i-1}^{(1)}\ C_i = \varkappa_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Gamma_1^{(i-2)} C_1 + \Gamma_2^{(i-2)} C_2 + \cdots + \Gamma_{i-1}^{(i-2)} C_i = \varkappa_{i-2}, \end{cases}$$

so dass man für W die neue Form erhält

$$W = \sum_{i=1}^{i=i-1} C_i \cdot \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{\Theta z}{(x-z)\cdot\psi z}\,dz.$$

Aus dieser Gleichung erkennt man aber unmittelbar, dass die Function W sich thatsächlich in eine convergente Reihe entwickeln lässt, welche nur negative Potenzen von x enthält.

Wir wollen nun im Folgenden voraussetzen Θz habe die Form

$$\Theta z = (z-\xi_1)^{\frac{\nu_1}{\mu_1}} \cdot (z-\xi_2)^{\frac{\nu_2}{\mu_2}} \cdots (z-\xi_i)^{\frac{\nu_i}{\mu_i}},$$

wo ν_i und μ_i ganze positive Zahlen vorstellen, die den Bedingungen genügen $\mu_i > \nu_i$. Alsdann ist

$$(6)\qquad \chi x = \frac{\nu_1}{\mu_1}\frac{(x-\xi_2)(x-\xi_3)\cdots(x-\xi_i)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)\cdots(\xi_1-\xi_i)}\psi'\xi_1 + \cdots$$
$$+\frac{\nu_i}{\mu_i}\frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_{i-1})}{(\xi_i-\xi_1)(\xi_i-\xi_2)\cdots(\xi_i-\xi_{i-1})}\psi'\xi_i$$

und die Function W stellt sich als eine Summe von ganzen Abel'schen Integralen dritter Gattung dar.

4.

Vollständige Bestimmung der Function W.

Wir wenden uns jetzt zur vollständigen*) Bestimmung der ganzen Function $\varkappa x$. Zu diesem Ende bilden wir aus Gl. (4) die folgende

$$\Theta x \cdot y_1^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi x}{\Theta x}\frac{R^{(n)}}{y_1}\right) = y_1^2\left\{\varkappa x - \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi x}{\Theta x}\frac{Z^{(n)}}{y_1}\right)\cdot\Theta x\right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist einer Constanten gleich, folglich auch der Ausdruck auf der linken Seite. Dies ist unmöglich solange der Grad**) des Restes $R^{(n)}$ $-(n+1)$ ist. Ist jedoch der $(n+1)^{te}$ Partialnenner der Kettenbruchentwicklung von W nicht lineär, wie die vorhergehenden, sondern vom Grade $i-1$, dann wird $R^{(n)}$ vom Grade $-(n+i-1)$ und in Folge dessen

$$\Theta x \cdot y_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi x}{\Theta x}\frac{R^{(n)}}{y_1}\right) = \text{const.} = 1,$$

wie verlangt wird. Hieraus schliesst man zugleich, dass die Function $R^{(n)}\cdot\frac{\psi x}{\Theta x}$ wirklich eine „zweite" Lösung der Gleichung (I) darstellt.

Die Forderung, dass $R^{(n)}$ vom Grade $-(n+i-1)$ werde, liefert aber auch zugleich die hinreichenden Data zur Bestimmung der Coefficienten in der Function $\varkappa x$. Denn in dem Producte $y_1\cdot W$ müssen die -1^{te}, -2^{te}, $\cdots$: $-(n+i-2)^{te}$ Potenz von x herausfallen. Setzen wir also

$$y_1 = h_0 x^n + h_1 x^{n-1} + \cdots + h_{n-1}x + h_n,$$
$$W = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_r}{x^r} + \cdots,$$

dann ergeben sich die folgenden $n+i-2$ Bedingungsgleichungen:

*) Ein Coefficient in $\varkappa x$ bleibt naturgemäss unbestimmt.

**) Unter „Grad" der transcendenten Function $R^{(n)}$ verstehen wir hier mit Heine den kleinsten der negativen Exponenten in der Reihenentwicklung von $R^{(n)}$.

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot h_n + a_2 \cdot h_{n-1} + \cdots + a_{n+1} \cdot h_0 &= 0,\\
a_2 \cdot h_n + a_3 \cdot h_{n-1} + \cdots + a_{n+2} \cdot h_0 &= 0,\\
a_3 \cdot h_n + a_4 \cdot h_{n-1} + \cdots + a_{n+3} \cdot h_0 &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots

eine ganze rationale Function n^{ten} Grades als erste Lösung, dann ist diese der n^{te} Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung der Function

$$W = \sum_{\nu=1}^{\nu=i-1} C_\nu \cdot \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{\Theta z}{(x-z)\,\psi z}\, dz,$$

wenn

$$\psi(\xi_\nu) = 0, \quad \Theta z = (z-\xi_1)^{\frac{\chi\xi_1}{\psi'\xi_1}} \cdot (x-\xi_2)^{\frac{\chi\xi_2}{\psi'\xi_2}} \cdots (x-\xi_i)^{\frac{\chi\xi_i}{\psi'\xi_i}}$$

ist und die Constanten $C_1, C_2 \ldots C_{i-1}$ derartig bestimmt werden, dass die n ersten Partialnenner des Kettenbruchs für W lineär, der $(n+1)^{te}$ dagegen vom Grade $i-1$ wird. Ferner ist der zugehörige Rest multiplicirt in $\frac{\psi x}{\Theta x}$ eine zweite Lösung derselben Differentialgleichung."

Sind insbesondere die Grössen $\frac{\chi\xi_\nu}{\psi'\xi_\nu}$ ächte Brüche, dann enthält y_2 keine höheren Transcendenten als ganze Abel'sche Integrale dritter Gattung. Unter dieser Voraussetzung lässt sich das Resultat auch in der folgenden Form aussprechen.

„*Man kann reguläre Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter den angeführten Bedingungen derartig integriren, dass die zugehörige erzeugende Substitutionsgruppe durch die Periodicitätsmoduln gewisser Abel'scher Integrale und ganzzahlige Wurzeln der Einheit bestimmt sind.*

Von diesem Gesichtspunkte aus erkennt man die theoretische Bedeutung, welche den Differentialgleichungen zweiter Ordnung zukommt, deren eine Lösung eine ganze rationale Function ist.

Die vorstehende Untersuchung war in meiner oben angeführten Habilitationsschrift nur für den specielleren Fall

$$\frac{\chi\xi_1}{\psi'\xi_1} = \frac{\chi\xi_2}{\psi'\xi_2} = \cdots = \frac{\chi\xi_i}{\psi'\xi_i} = \frac{q}{p},$$

wo $\frac{q}{p}$ einen ächten Bruch bedeutet, ausgeführt. Setzt man noch insbesondere $\frac{q}{p} = \frac{1}{2}$, dann erhält man die Grundzüge der Theorie der Lamé'schen Functionen.

Einbeck, 29. Juli 1887.

Ueber binäre Formenbüschel mit besonderer Combinanteneigenschaft.

Von

David Hilbert in Königsberg.

Die vorliegende Mittheilung behandelt eine besondere Art von binären Formen, welche die Formen mit linearen Transformationen in sich*) umfassen und ebenso wie diese durch formale Einfachheit ihrer invariantentheoretischen Eigenschaften ausgezeichnet sind. Im Anschluss hieran finden einige allgemeinere Sätze bezüglich des identischen Verschwindens von Ueberschiebungen zweier Formen Erwähnung.

Soll für zwei binäre Formen f und φ von den Ordnungen n resp. ν die zweite Ueberschiebung $(f, \varphi)_2$ identisch verschwinden, so erkennt man, dass die Zahl $n + \nu$ der in diesem Falle verfügbaren Constanten, vermindert um die Zahl 3 der wesentlichen Coefficienten der linearen Transformation, mit der Zahl $n + \nu - 3$ der Bedingungsgleichungen gerade übereinstimmt. Sobald wir daher alle durch blosse lineare Transformation auseinander hervorgehenden Formensysteme als nicht wesentlich verschieden rechnen, ist durch jene Bedingung im Allgemeinen eine endliche Anzahl von zusammengehörigen Formen f und φ festgelegt. Beispielsweise ergiebt sich für $\nu = 2$ das zusammengehörige Formensystem:

$$f = x_1^n + x_2^n,$$
$$\varphi = x_1 x_2,$$

und für $\nu = 3$**):

*) Vergl. F. Klein, Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Mathematische Annalen Bd. IX, und Gordan, Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten. Mathematische Annalen Bd. XII; ferner L. Wedekind, Studien im binären Werthgebiet. Habilitationsschrift. Karlsruhe, 1876.

**) Vergl. die Note des Verfassers: Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete. Mathematische Annalen Bd. XXX, pag. 15. Wenn wir in der endlichen hypergeometrischen Reihe nach dortiger Bezeichnung die Werthe:

$$\beta = -\frac{1}{3}(n-1), \quad \gamma = -\frac{2}{3}(n-1)$$

einführen, so entsteht die oben angegebene Form f mit der verlangten Invarianteneigenschaft.

$$f = x_1^n + \frac{n(n-1)}{1(2n-2)} x_1^{n-1}x_2 + \frac{n(n-1)(n-1)(n-4)}{1\cdot 2(2n-2)(2n-5)} x_1^{n-2}x_2^2 + \cdots + (-1)^n x_2^n,$$

$$\varphi = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2.$$

Wir untersuchen ferner, ob und unter welchen Umständen ausser der Form φ noch eine weitere Form ψ von der Ordnung ν ebenderselben Form f in der beschriebenen Weise zugehören kann. Die Darstellung der simultanen Covarianten $(f, \varphi)_2$ und $(f, \psi)_2$ als Function der einseitigen Derivirten*) ergiebt:

$$(f, \varphi)_2 = f_0\varphi_2 - 2f_1\varphi_1 + f_2\varphi_0 = 0,$$
$$(f, \psi)_2 = f_0\psi_2 - 2f_1\psi_1 + f_2\psi_0 = 0,$$

mithin:

$$f_0(\varphi_2\psi_0 - \varphi_0\psi_2) - 2f_1(\varphi_1\psi_0 - \psi_1\varphi_0) = 0,$$

oder für $n = 2\nu - 2$:

$$f = \varphi_0\psi_1 - \varphi_1\psi_0.$$

Die Einführung dieses Ausdruckes für f in die beiden ersten Gleichungen liefert mittelst leichter Rechnung:

$$\varphi(\varphi_0\psi_3 - 3\varphi_1\psi_2 + 3\varphi_2\psi_1 - \varphi_3\psi_0) = \varphi(\varphi, \psi)_3 = 0,$$
$$\psi(\varphi_0\psi_3 - 3\varphi_1\psi_2 + 3\varphi_2\psi_1 - \varphi_3\psi_0) = \psi(\varphi, \psi)_3 = 0,$$

d. h. die gestellte Anforderung ist jedenfalls dann erfüllt, wenn f die Jacobi'sche Covariante eines Formenbüschels mit verschwindender dritter Ueberschiebung $(\varphi, \psi)_3$ ist. Was die letztere invariante Bedingung anbetrifft, so zeigt sich wiederum, dass die Zahl $2\nu - 2$ der wesentlichen Constanten eines Formenbüschels von der Ordnung ν, vermindert um die Zahl 3 der Substitutionscoefficienten mit der Zahl $2\nu - 5$ der Bedingungsgleichungen gerade übereinstimmt. *Es giebt* also *im Allgemeinen nur eine endliche Anzahl von wesentlich verschiedenen Formenbüscheln mit der in Rede stehenden Combinanteneigenschaft.*

Bevor wir jedoch zur Aufstellung solcher Formenbüschel übergehen, möge noch ein allgemeiner Satz abgeleitet werden, welcher sich auf die Jacobi'sche Covariante derselben bezieht.

Bedeuten zunächst φ und ψ zwei beliebige Formen von der Ordnung ν, so führt die bereits oben befolgte Darstellungsmethode mittelst einseitiger Derivirter zu den Ausdrücken:

$$f = (\varphi, \psi)_1 = (01),$$
$$u = (\varphi, \psi)_3 = (03) - 3(12),$$
$$v = (\varphi, \psi)_5 = (05) - 5(14) + 10(23),$$

wo der Kürze wegen die Bezeichnung:

$$(ik) = \varphi_i\psi_k - \varphi_k\psi_i$$

gebraucht ist. Durch einfache Rechnung ergiebt sich ferner:

*) Vergl. die citirte Note des Verfassers, pag. 17.

$$(f,f)_4 = \frac{1}{2(2\nu-3)^2(2\nu-5)}\{(\nu-3)(\nu-4)(2\nu-3)(01)(05)$$
$$+3\nu(\nu-3)(2\nu-3)(01)(14)$$
$$-6\nu(\nu-3)(2\nu-3)(01)(23)$$
$$-2(\nu-3)(2\nu-3)(2\nu-5)(02)(04)$$
$$+3(\nu-2)^2(2\nu-5)(03)^2-2\nu^2(2\nu-5)(03)(12)$$
$$+3\nu^2(2\nu-5)(12)^2\},$$

$$(f,u)_2 = \frac{1}{2(2\nu-3)(2\nu-7)}\{(\nu-4)(2\nu-3)(01)(05)-(\nu-6)(2\nu-3)(01)(14)$$
$$+2(\nu-6)(2\nu-3)(01)(23)$$
$$-(2\nu-3)(2\nu-7)(02)(04)$$
$$+(\nu-2)(2\nu-7)(03)^2+2\nu(2\nu-7)(03)(12)$$
$$-3\nu(2\nu-7)(12)^2\},$$

und es gilt somit allgemein die folgende Relation zwischen den berechneten Covarianten:

$$(f,f)_4 = -\frac{(\nu-3)(\nu-4)}{2(2\nu-5)(2\nu-7)}fv+\frac{2(\nu-3)}{2\nu-3}(f,u)_2+\frac{\nu(\nu-2)}{2(2\nu-3)^2}u^2.\text{*})$$

Handelt es sich nun um ein besonderes Formensystem mit identisch verschwindender dritten Ueberschiebung u, so nimmt jene Relation die Gestalt an:

$$(f,f)_4 = -\frac{(\nu-3)(\nu-4)}{2(2\nu-5)(2\nu-7)}fv,$$

d. h. *die Jacobi'sche Covariante f eines Formenbüschels* φ, ψ *mit identisch verschwindender Combinante* $(\varphi,\psi)_3$ *besitzt die Eigenschaft selbst in ihrer vierten Ueberschiebung* $(f,f)_4$ *als Factor aufzugehn.*

Im Folgenden gelangen der Reihe nach für die Ordnungen $\nu = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sämmtliche Formenbüschel mit der in Rede stehenden Combinanteneigenschaft zur Darstellung. Dabei bleiben jedoch als triviale Fälle unberücksichtigt alle Formenbüschel mit ausgearteter Jacobi'scher Covariante, nämlich einmal diejenigen Büschel, deren sämmtliche Formen einen oder mehrere Linearfactoren gemeinsam besitzen, und ferner diejenigen, in welchen Formen mit mehr als zweifachen Linearfactoren vorkommen.

$\nu = 3$. Wählen wir in dem gesuchten cubischen Formenbüschel eine Form mit doppeltem Linearfactor aus und ertheilen derselben die *Gestalt:*

$$\varphi = x_1^2 x_2,$$

*) Diese Formel ist auf dem Wege symbolischer Rechnung bereits von C. Stephanos gefunden worden; vergl. dessen Abhandlung: Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne, Mémoires présentés par divers savants à l'Academie des sciences de l'Institut de France t. 27, pag. 32.

so ergiebt sich aus der Forderung des Verschwindens der Invariante $(\varphi, \psi)_3$ die *zugehörige Form:*

$$\psi = x_1^3 + x_2^3.$$

Das gewonnene cubische Formenbüschel ist daher das einzige von der verlangten Art; es besitzt zur Jacobi'schen Covariante die bekannte Tetraederform:

$$f = x_1^4 - 2x_1x_2^3,$$

deren vierte Ueberschiebung $(f, f)_4$ in Uebereinstimmung mit unserem allgemeinen Satze verschwindet.

$\nu = 4$. Bestimmen wir in dem gesuchten biquadratischen Formenbüschel eine Form mit verschwindender Invariante j und legen dieselbe in der *Gestalt:*

$$\varphi = x_1^4 + x_2^4$$

zu Grunde, so liefert eine einfache Rechnung für die *zugehörige Form* den Ausdruck:

$$\psi = x_1^2x_2^2.$$

Die Jacobi'sche des gefundenen Büschels ist die Oktaederform:

$$f = x_1^5x_2 - x_1x_2^5,$$

für welche in der That die Covariante $(f, f)_4$ identisch verschwindet.

$\nu = 5$. *Das einzige existirende Formenbüschel mit der vorgeschriebenen Eigenschaft* setzt sich aus den Formen:

$$\varphi = x_1^5 - 5x_1x_2^4,$$
$$\psi = 5x_1^4x_2 - x_2^5$$

zusammen. Für jede Form dieses Büschels verschwindet die Invariante 4^{ten} Grades.*) Die Jacobi'sche:

$$f = x_1^8 + 14x_1^4x_2^4 + x_2^8$$

ist nichts anderes als die Hexaederform, welche sich bekanntermassen in ihrer 4^{ten} Ueberschiebung $(f, f)_4$ reproducirt.

$\nu = 6$. Das gesuchte Büschel bestehe aus den Formen:

$$\varphi = \alpha_0x_1^6 + 6\alpha_1x_1^5x_2 + 15\alpha_2x_1^4x_2^2 + 20\alpha_3x_1^3x_2^3 + 15\alpha_4x_1^2x_2^4 + 6\alpha_5x_1x_2^5 + \alpha_6x_2^6,$$

$$\psi = \beta_0x_1^6 + 6\beta_1x_1^5x_2 + 15\beta_2x_1^4x_2^2 + 20\beta_3x_1^3x_2^3 + 15\beta_4x_1^2x_2^4 + 6\beta_5x_1x_2^5 + \beta_6x_2^6.$$

Damit die dritte Ueberschiebung $(\varphi, \psi)_3$ identisch verschwinde, müssen die Coefficienten jener beiden Formen den folgenden 7 Gleichungen genügen:

---

*) Betreffs der Rechnung vergl. die Habilitationsschrift des Verfassers: „Ueber einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete." Mathematische Annalen, Bd. XXVIII, pag. 445.

$$\begin{aligned}
&\alpha_0\beta_3 - 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_4 - 2\alpha_1\beta_3 + 2\alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_5 - 5\alpha_2\beta_3 + 5\alpha_3\beta_2 - \alpha_5\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_6 + 6\alpha_1\beta_5 - 15\alpha_2\beta_4 + 15\alpha_4\beta_2 - 6\alpha_5\beta_1 - \alpha_6\beta_0 = 0,\\
&\alpha_1\beta_6 - 5\alpha_3\beta_4 + 5\alpha_4\beta_3 - \alpha_6\beta_1 = 0,\\
&\alpha_2\beta_6 - 2\alpha_3\beta_5 + 2\alpha_5\beta_3 - \alpha_6\beta_2 = 0,\\
&\alpha_3\beta_6 - 3\alpha_4\beta_5 + 3\alpha_5\beta_4 - \alpha_6\beta_3 = 0.
\end{aligned}$$

Zur Behandlung dieser Gleichungen bringen wir durch geeignete simultane Transformation der Formen φ und ψ die beiden mittleren Coefficienten α_3 und β_3 und dann durch lineare Combination der Formen die Coefficienten α_0 und β_6 zum Verschwinden. Da die Formen keinen Linearfactor gemeinsam besitzen sollen, so sind die Coefficienten α_6 und β_0 nothwendig von Null verschieden, stehen aber im übrigen, sowie noch ein weiterer Coefficient zur geeigneten Verfügung. Die getroffenen Vereinfachungen lassen leicht erkennen, dass von den 7 Gleichungen des obigen Systems zwei eine Folge der Uebrigen sind und dementsprechend *die gesuchten Formen* die Gestalt:

$$\begin{aligned}
\varphi &= x_1^5x_2 + \varkappa x_1^4x_2^2 + \lambda x_2^6,\\
\psi &= x_1^6 + 15x_1^2x_2^4 + 6(\varkappa+\lambda)x_1x_2^5
\end{aligned}$$

annehmen, wo $\varkappa$ und λ zwei willkürliche Parameter bedeuten. *Es giebt also zweifach unendlich viele Formenbüschel 6ter Ordnung mit identisch verschwindender dritten Ueberschiebung, welche nicht durch lineare Transformation in einander übergeführt werden können.* Diese Thatsache ist dem gegenwärtigen Fall $\nu = 6$ allein vor allen früheren und, wie wir sehen werden, auch vor den noch weiter behandelten Fällen $\nu = 7$ und $\nu = 8$ eigenthümlich. Die Jacobi'sche Covariante des gefundenen Büschels:

$$\begin{aligned}
f = x_1^{10} + 2\varkappa x_1^9x_2 - 45x_1^6x_2^4 - 18(3\varkappa+\lambda)x_1^5x_2^5 - 18\varkappa(\varkappa+\lambda)x_1^4x_2^6\\
+ 30\lambda x_1x_2^9 + 6\lambda(\varkappa+\lambda)x_2^{10}
\end{aligned}$$

ist eine Form 10ter Ordnung mit den wesentlichen Parametern $\varkappa$ und λ; ihre vierte Ueberschiebung wird durch die Form selbst theilbar, während der übrig bleibende quadratische Factor:

$$(\varphi, \psi)_5 = 5x_1^2 + 2(\varkappa+5\lambda)x_1x_2 + 2\varkappa(\varkappa+\lambda)x_2^2$$

keine besondere Invarianteneigenschaft aufweist. Bemerkt sei noch, *dass die Invariante zweiten Grades für eine jede Form unseres Büschels verschwindet.*

$\nu = 7$. Die Coefficienten α und β der Formen φ und ψ mit der in Rede stehenden Eigenschaft müssen den folgenden 9 Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0\beta_3 - 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_4 - 2\alpha_1\beta_3 + 2\alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_0 = 0,\\
3&\alpha_0\beta_5 - \alpha_1\beta_4 - 12\alpha_2\beta_3 + 12\alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1 - 3\alpha_5\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_6 + 3\alpha_1\beta_5 - 9\alpha_2\beta_4 + 9\alpha_4\beta_2 - 3\alpha_5\beta_1 - \alpha_6\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_7 + 13\alpha_1\beta_6 - 9\alpha_2\beta_5 - 45\alpha_3\beta_4 + 45\alpha_4\beta_3 + 9\alpha_5\beta_2 - 13\alpha_6\beta_1 - \alpha_7\beta_0 = 0,\\
&\alpha_1\beta_7 + 3\alpha_2\beta_6 - 9\alpha_3\beta_5 + 9\alpha_5\beta_3 - 3\alpha_6\beta_2 - \alpha_7\beta_1 = 0,\\
3&\alpha_2\beta_7 - \alpha_3\beta_6 - 12\alpha_4\beta_5 + 12\alpha_5\beta_4 + \alpha_6\beta_3 - 3\alpha_7\beta_2 = 0,\\
&\alpha_3\beta_7 - 2\alpha_4\beta_6 + 2\alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_3 = 0,\\
&\alpha_4\beta_7 - 3\alpha_5\beta_6 + 3\alpha_6\beta_5 - \alpha_7\beta_4 = 0.
\end{aligned}$$

Bringen wir durch entsprechende simultane Transformation die beiden Coefficienten α_1 und β_1, ferner durch lineare Combination der Formen φ und ψ die Coefficienten α_0 und β_2 zum Verschwinden, so bleiben die Coefficienten α_2 und β_0 nothwendig von Null verschieden, stehen aber im übrigen, sowie noch ein weiterer Coefficient zur freien Verfügung. Man findet auf diese Weise für die aufgestellten Gleichungen die beiden einzigen Lösungssysteme:

$$\begin{aligned}
&1.\ \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \tfrac{1}{3},\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 0,\ \alpha_6 = 0,\ \alpha_7 = 1,\\
&\qquad \beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = 0,\ \beta_5 = -\tfrac{1}{3},\ \beta_6 = 0,\ \beta_7 = 0.\\
&2.\ \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 1,\ \alpha_6 = \tfrac{9}{4},\ \alpha_7 = \tfrac{9}{2},\\
&\qquad \beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = \tfrac{1}{4},\ \beta_4 = \tfrac{1}{4},\ \beta_5 = \tfrac{1}{2},\ \beta_6 = \tfrac{3}{4},\ \beta_7 = \tfrac{19}{16},
\end{aligned}$$

Das erstere Lösungssystem führt zu dem *Formenbüschel:*

$$\begin{aligned}
\varphi &= 7x_1^5x_2^2 + x_2^7,\\
\psi &= x_1^7 - 7x_1^2x_2^5
\end{aligned}$$

mit den Combinanten:

$$\begin{aligned}
(\varphi, \psi)_1 &= x_1^{11}x_2 + 11x_1^6x_2^6 - x_1x_2^{11},\\
(\varphi, \psi)_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Jacobi'sche Covariante ist mithin nichts anderes als die bekannte Ikosaederform von der 12ten Ordnung, deren vierte Ueberschiebung in der That identisch verschwindet. Das zweite Lösungssystem giebt zu einem Formenbüschel Anlass, dessen Formen nach geeigneter linearer Transformation die *folgende Gestalt* annehmen:

$$\begin{aligned}
\varphi &= x_1^7 - 7x_1x_2^6,\\
\psi &= 7x_1^6x_2 - 13x_2^7.
\end{aligned}$$

Die Jacobi'sche des gefundenen Büschels:

$$f = x_1^{12} + 22x_1^6x_2^6 + 13x_2^{12}$$

ist in ihrer vierten Ueberschiebung enthalten, während der übrig bleibende Factor:

$$(\varphi, \psi)_5 = x_1^2x_2^2$$

das Quadrat einer quadratischen Form wird. *Die beiden gewonnenen Formenbüschel 7ter Ordnung sind*, wie man hieraus ersieht, *wesentlich von einander unterschieden und überdies die einzigen von der verlangten Art.*

$\nu = 8$. Zur Bestimmung der gesuchten Coefficienten α und β dienen die 11 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0\beta_3 - 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_4 - 2\alpha_1\beta_3 + 2\alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_0 = 0,\\
&2\alpha_0\beta_5 - \alpha_1\beta_4 - 7\alpha_2\beta_3 + 7\alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1 - 2\alpha_5\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_6 + 2\alpha_1\beta_5 - 7\alpha_2\beta_4 + 7\alpha_4\beta_2 - 2\alpha_5\beta_1 - \alpha_6\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_7 + 7\alpha_1\beta_6 - 7\alpha_2\beta_5 - 21\alpha_3\beta_4 + 21\alpha_4\beta_3 + 7\alpha_5\beta_2 - 7\alpha_6\beta_1 - \alpha_7\beta_0 = 0,\\
&\alpha_0\beta_8 + 22\alpha_1\beta_7 + 28\alpha_2\beta_6 - 126\alpha_3\beta_5 + 126\alpha_5\beta_3 - 28\alpha_6\beta_2 - 22\alpha_7\beta_1 - \alpha_8\beta_0 = 0,\\
&\alpha_1\beta_8 + 7\alpha_2\beta_7 - 7\alpha_3\beta_6 - 21\alpha_4\beta_5 + 21\alpha_5\beta_4 + 7\alpha_6\beta_3 - 7\alpha_7\beta_2 - \alpha_8\beta_1 = 0,\\
&\alpha_2\beta_8 + 2\alpha_3\beta_7 - 7\alpha_4\beta_6 + 7\alpha_6\beta_4 - 2\alpha_7\beta_3 - \alpha_8\beta_2 = 0,\\
&2\alpha_3\beta_8 - \alpha_4\beta_7 - 7\alpha_5\beta_6 + 7\alpha_6\beta_5 + \alpha_7\beta_4 - 2\alpha_8\beta_3 = 0,\\
&\alpha_4\beta_8 - 2\alpha_5\beta_7 + 2\alpha_7\beta_5 - \alpha_8\beta_4 = 0,\\
&\alpha_5\beta_8 - 3\alpha_6\beta_7 + 3\alpha_7\beta_6 - \alpha_8\beta_5 = 0.
\end{aligned}$$

Nach Einführung der entsprechenden Vereinfachungen wie im vorigen Falle erkennt man, dass jene Gleichungen die folgenden fünf Lösungssysteme besitzen:

$$\begin{aligned}
1.\ &\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 1,\ \alpha_6 = 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_7 = 0,\ \alpha_8 = 28,\\
&\beta_0 = 7,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = -2,\ \beta_4 = 0,\ \beta_5 = 0,\ \beta_6 = 16,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \beta_7 = 0,\ \beta_8 = 0,\\
2.\ &\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 0,\ \alpha_6 = -1,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_7 = 0,\ \alpha_8 = 0,\\
&\beta_0 = 7,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = 1,\ \beta_5 = 0,\ \beta_6 = 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \beta_7 = 0,\ \beta_8 = 7,\\
3.\ &\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 0,\ \alpha_6 = 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_7 = 0,\ \alpha_8 = 28,\\
&\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = 0,\ \beta_5 = 0,\ \beta_6 = 1,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \beta_7 = 0,\ \beta_8 = 0,\\
4.\ &\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 28,\ \alpha_6 = 252,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_7 = 504,\ \alpha_8 = -5824,
\end{aligned}$$

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 8,\ \beta_4 = 36,\ \beta_5 = 72,\ \beta_6 = 1216,$$
$$\beta_7 = 5040,\ \beta_8 = 55440,$$

5. $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -4,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 4,\ \alpha_6 = 9,$
$$\alpha_7 = 18,\ \alpha_8 = 32,$$
$$\beta_0 = 112,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 32,\ \beta_4 = 36,\ \beta_5 = 72,\ \beta_6 = 112,$$
$$\beta_7 = 180,\ \beta_8 = 279,$$

Die erste Lösung liefert das *Formenbüschel:*

$$\varphi = (x_1^3 x_2 + x_2^4)^2,$$
$$\psi = (x_1^4 - 8 x_1 x_2^3)^2,$$

dessen Jacobi'sche Covariante dem Producte der Oktaeder- und Hexaederform gleich wird, während die 5te Ueberschiebung $(\varphi, \psi)_5$ der Oktaederform proportional ausfällt und die 7te Ueberschiebung $(\varphi, \psi)_7$ identisch verschwindet. Das Formenbüschel, welches dem zweiten Lösungssystem entspricht, ist mit dem vorigen Büschel äquivalent. Die dritte Lösung führt zu dem *Formenbüschel:*

$$\varphi = x_1^6 x_2^2 + x_2^8,$$
$$\psi = x_1^8 + 28 x_1^2 x_2^6$$

mit den Combinanten:

$$(\varphi, \psi)_1 = x_1^{13} x_2 - 52 x_1^7 x_2^7 + 28 x_1 x_2^{13},$$
$$(\varphi, \psi)_5 = x_1^3 x_2^3,$$
$$(\varphi, \psi)_7 = x_1 x_2.$$

Was die beiden übrigen Lösungssysteme anbetrifft, so construiren wir für die bezüglichen Formenpaare φ, ψ die 7ten Ueberschiebungen, wie folgt:

$$(\varphi, \psi)_7 = x_1^2 + 4 x_1 x_2 - 14 x_2^2,$$
$$(\varphi, \psi)_7 = 2 x_1^2 + 2 x_1 x_2 - x_2^2.$$

Ertheilen wir dann den letzteren durch lineare Transformation die Normalform $x_1 x_2$, so erweist sich nach einiger Rechnung das vierte Büschel als äquivalent mit dem zuletzt aufgestellten Büschel. Dagegen liefert die fünfte Lösung das neue *Formenbüschel:*

$$\varphi = x_1^8 + 8 x_1 x_2^7,$$
$$\psi = 4 x_1^7 x_2 + 11 x_2^8,$$

und die in Frage kommenden Combinanten lauten:

$$(\varphi, \psi)_1 = x_1^{14} - 26 x_1^7 x_2^7 + 22 x_2^{14},$$
$$(\varphi, \psi)_5 = x_1^3 x_2^3.$$

Die drei aufgestellten Formenbüschel können durch lineare Transformation nicht in einander übergeführt werden und sind überdies die einzigen Büschel 8ter Ordnung mit der in Rede stehenden Combinanteneigenschaft.

Für die *allgemeine Ordnung* ν lassen sich zwei wesentlich verschiedene Formenbüschel der verlangten Art angeben; es sind die folgenden:

$$\varphi = x_1^{\nu} + \nu(\nu-1)x_1^{2}x_2^{\nu-2},$$
$$\psi = \nu x_1^{\nu-2}x_2^{2} + (\nu-4)(\nu^2-9\nu+12)x_2^{\nu},$$

und:

$$\varphi = x_1^{\nu} - \nu x_1 x_2^{\nu-1},$$
$$\psi = \nu x_1^{\nu-1}x_2 - (\nu^2-6\nu+6)x_2^{\nu},$$

wenngleich hiemit die Aufzählung aller vorhandenen Büschel mit identisch verschwindender dritten Ueberschiebung wohl kaum abgeschlossen ist. Es bleibt ferner die Frage*) unerledigt, ob, abgesehen von trivialen Fällen, die Jacobi'schen Covarianten von Büscheln mit jener Combinanteneigenschaft die einzigen Formen gerader Ordnung sind, deren vierte Ueberschiebung sich durch die Grundform selbst theilen lässt.

Was endlich das identische Verschwinden einer beliebigen Ueberschiebung von zwei binären Formen und das hiedurch vermittelte Verhältniss gegenseitiger Zuordnung anbetrifft, so gelten die folgenden allgemeinen Sätze, welche im Besonderen auch die oben behandelten Fragen aus einem neuen Gesichtspunkte auffassen:

Damit einer vorgelegten binären Form f von der n^{ten} Ordnung eine Form φ von der ν^{ten} Ordnung mit identisch verschwindender i^{ten} Ueberschiebung $(f, \varphi)_i$ zugeordnet werden kann, ist für die Form f das identische Verschwinden einer einzigen Covariante $(\nu+1)(n-2i)^{ter}$ Ordnung nothwendig und hinreichend.

Um das Leitglied dieser Covariante zu bilden, haben wir aus den Coefficienten der Form f eine Determinante derart zusammenzusetzen, wie es die Elimination der $\nu+1$ Coefficienten der Form φ aus den ersten $\nu+1$ für dieselben geltenden Bedingungsgleichungen erforderlich macht.

Wenn für eine Form f der n^{ten} Ordnung eine σ-fach unendliche lineare Mannigfaltigkeit von Formen φ der ν^{ten} Ordnung existirt, deren i^{te} Ueberschiebungen $(f, \varphi)_i$ identisch verschwinden, dann ist es stets möglich, eben derselben Form f eine $\sigma+z$-fach unendliche lineare Mannigfaltigkeit von Formen ψ der $\nu+z^{ten}$ Ordnung mit identisch verschwindenden Ueberschiebungen $(f, \psi)_{i+z}$ zuzuordnen, wobei z die Zahl $n-2i$ bedeutet.

Zum Beweise betrachten wir einerseits diejenige Matrix mit $\nu+z+1$ Horizontalreihen und $\nu+1$ Verticalreihen, welche entsteht,

*) Inzwischen hat sich Herr A. Hirsch auf meine Anregung hin mit dieser Frage beschäftigt und dieselbe in bejahendem Sinne entschieden.

wenn wir, wie bereits vorhin angedeutet wurde, die simultan-invariante Bedingung:

$$(f, \varphi)_i = 0$$

in die $\nu + s + 1$ einzelnen linearen Relationen auflösen und dann die $\nu + 1$ Coefficienten der Form φ eliminiren. Andererseits liefert die gleiche Behandlung der Bedingung:

$$(f, \psi)_{i+s} = 0$$

eine Matrix mit $\nu + 1$ Horizontal- und $\nu + s + 1$ Verticalreihen. Für die auftretenden Zählencoefficienten folgt mit Benutzung der symbolischen Methode eine Beziehung, aus welcher man erkennt, dass die zuletzt erhaltene Matrix nach Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen bis auf unwesentliche Vorzeichen mit der ersteren übereinstimmt. In Folge dieses Umstandes wird die in obigem Satze ausgesprochene Behauptung evident.

Die beiden aufgestellten Sätze gestatten die weitgehendste Verallgemeinerung unter gleichzeitiger Berücksichtigung mehrerer Grundformen und mehrerer invarianter Bedingungen. So sei beispielsweise noch der folgende Satz seiner mannigfachen Verwendbarkeit wegen erwähnt:

Wenn für ein System von $\varkappa$ Formen $f, f', \ldots$ von den Ordnungen $n, n', \ldots$ eine σ-fach unendliche lineare Mannigfaltigkeit von ebensoviel Formen $\varphi, \varphi', \ldots$ der Ordnungen $\nu, \nu', \ldots$ mit der simultaninvarianten Bedingung:

$$(f, \varphi)_i + (f', \varphi')_{i'} + \cdots = 0$$

existirt, dann ist es stets möglich, eben demselben Formensysteme $f, f', \ldots$ eine $(\sigma + w - \varkappa - \nu - \nu' - \cdots + 1)$-fach unendliche lineare Mannigfaltigkeit von Formen ψ der Ordnung w mit den invarianten Bedingungen:

$$(f, \psi)_{n-i} = 0, \quad (f', \psi)_{n'-i'} = 0, \ldots$$

zuzuordnen und umgekehrt; dabei ist der gemeinsame Werth der Ausdrücke:

$$n + \nu - 2i = n' + \nu' - 2i' = \cdots$$

mit w bezeichnet.

Königsberg i. Pr., den 27. Juli 1887.

Ueber einen einfachen Beweis der Rosenhain'schen Fundamentalformeln.

Von

F. Caspary in Berlin.

In seiner Preisschrift über die vierfach periodischen Functionen gewinnt Rosenhain alle für die Untersuchung der hyperelliptischen Integrale nöthigen Gleichungen aus einem einfachen System von Fundamentalformeln, welches er als Folgerung und Verallgemeinerung des Jacobi'schen Systems für die elliptischen Thetas, ohne weiteren Beweis, mittheilt.

Nach Einführung der quadratischen Transformationen erweisen sich die Jacobi'schen und Rosenhain'schen Formeln als absolute Identitäten.

Auf Grund dieser Bemerkung habe ich in früheren Arbeiten*) jene Formeln bewiesen und verallgemeinert; ich will mir hier erlauben einen neuen einfachen Beweis der Rosenhain'schen Fundamentalformeln mitzutheilen, der sie als unmittelbare Folgerungen des Vertauschungsgesetzes der algebraischen Multiplication ergiebt. Die merkwürdige Grundformel, aus der sie auf diesem Wege hervorgehen, ist gleichzeitig die Quelle aller der Thetarelationen, in welche $2m \geqq 4$ unabhängige Argumentensysteme eintreten.

In zwei in den Comptes rendus tome CIV, p. 1094 und p. 1255 veröffentlichten Noten habe ich dieselbe Methode auf die Thetafunctionen eines und beliebig vieler Argumente angewandt und zur Ableitung der Jacobi'schen Formeln und der Additionstheoreme benützt.

Um in der vorliegenden Arbeit von der Theorie der Thetafunctionen zweier Argumente nichts anderes als die Definition und die Bedingung der Convergenz als bekannt vorauszusetzen, will ich im ersten Paragraphen die auf die quadratische Transformation bezüglichen Relationen in dem Umfange entwickeln, in welchem ich sie im

*) Vgl. Kronecker's Journal Bd. 94, S. 83; Bd. 97, S. 165; diese Annalen Bd. 29, S. 493.

zweiten Paragraphen zum Beweise der Rosenhain'schen Fundamentalformeln verwende. Da der dabei eingeschlagene Weg dem von Göpel betretenen analog ist, dürften die folgenden Entwickelungen in einfacher Weise auch die inneren Beziehungen darlegen, welche zwischen den Abhandlungen von Rosenhain und Göpel bestehen.

§ 1.

Darstellung des Products zweier Thetafunctionen durch Thetas mit doppelten Moduln.

Es seien die Thetafunctionen zweier Argumente durch die doppelt unendliche Reihe:

$$(1)\qquad \vartheta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\delta_1\,\delta_2}(u_1,\,u_2)$$

$$= \sum_{m_1,\,m_2} e^{2i\pi \sum_{\alpha}' (u_\alpha + \frac{1}{2}\delta_\alpha)(m_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha) + i\pi \sum_{\alpha,\,\beta} \tau_{\alpha\beta}(m_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha)(m_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon_\beta)}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2;\ \tau_{12} = \tau_{21})$$

definirt, in welcher die Summationen sich auf alle ganzzahligen Werthe m_1, m_2 von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Zur Convergenz dieser Reihe ist nothwendig und hinreichend, dass, wenn

$$\tau_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + i a'_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \Delta$$

ist, die beiden reellen Grössen a_{11} und $\Delta : a_{11}$, oder a_{22} und $\Delta : a_{22}$ negativ seien*).

Legt man den Grössen ε_α, δ_α, unabhängig von einander die Werthe 0 und 1 bei, so erhält man die 16 Thetafunctionen zweier Argumente, von denen die Thetafunction:

$$(2)\qquad \vartheta^{0\,0}_{0\,0}(u_1, u_2) = \sum_{m_1,\,m_2} e^{2i\pi(u_1 m_1 + u_2 m_2) + i\pi(\tau_{11} m_1^2 + 2\tau_{12} m_1 m_2 + \tau_{22} m_2^2)}$$

$$(m_1,\, m_2 = 0, \pm 1, \cdots, \pm\infty)$$

die einfachste ist. Multiplicirt man mit ihr eine zweite, entsprechend gebildete, deren Argumente v_1, v_2 und deren Summationsbuchstaben n_1, n_2 seien, und beachtet die beiden folgenden Identitäten:

$$u_1 m_1 + u_2 m_2 + v_1 n_1 + v_2 n_2$$
$$= (u_1 + v_1) s_1 + (u_2 + v_2) s_2 + (u_1 - v_1) d_1 + (u_2 - v_2) d_2,$$
$$\tau_{11}(m_1^2 + n_1^2) + 2\tau_{12}(m_1 m_2 + n_1 n_2) + \tau_{22}(m_2^2 + n_2^2)$$
$$= 2(\tau_{11} s_1^2 + 2\tau_{12} s_1 s_2 + \tau_{22} s_2^2) + 2(\tau_{11} d_1^2 + 2\tau_{12} d_1 d_2 + \tau_{22} d_2^2),$$

in welchen:

*) Vgl. Krause, die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung, Leipzig 1886, S. 3.

$$s_\alpha = \frac{1}{2}(m_\alpha + n_\alpha), \quad d_\alpha = \frac{1}{2}(m_\alpha - n_\alpha) \quad (\alpha = 1, 2)$$

gesetzt ist, so erhält man:

$$(3) \qquad \vartheta^{0\,0}_{0\,0}(u_1, u_2)\,\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(v_1, v_2)$$

$$= \sum_{s_1, s_2} e^{2i\pi\sum_\alpha (u_\alpha + v_\alpha) s_\alpha + i\pi \sum_{\alpha,\beta} 2\tau_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta} \sum_{d_1, d_2} e^{2i\pi \sum_\alpha (u_\alpha - v_\alpha) d_\alpha + i\pi \sum_{\alpha,\beta} 2\tau_{\alpha\beta} d_\alpha d_\beta}.$$

Da die Grössen m_α und n_α alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so gilt das Nämliche für die Grössen $2s_\alpha$ und $2d_\alpha$; weil aber Summe und Differenz zweier Zahlen mod. 2 congruent sind, so müssen $2s_\alpha$ und $2d_\alpha$ beide gerade, oder beide ungerade sein. Daher kann man setzen:

$$2s_\alpha = 2d_\alpha = 2r_\alpha + \varepsilon_\alpha,$$

und wird alle den Summationsbuchstaben s_α und d_α zukommenden Werthe, und jeden nur einmal, erhalten, wenn man die Grössen r_α sämmtliche ganze Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt und den Grössen ε_α unabhängig von einander die Werthe 0 und 1 giebt. Deshalb zerlegt sich der Ausdruck auf der rechten Seite von (3) in vier andere Ausdrücke der nämlichen Art, in welchen s_1, d_1, s_2, d_2 die folgenden vier Werthe haben:

$$r_1, r_2; \quad r_1 + \tfrac{1}{2}, r_2; \quad r_1, r_2 + \tfrac{1}{2}; \quad r_1 + \tfrac{1}{2}, r_2 + \tfrac{1}{2}.$$

Andererseits zeigt die Vergleichung von (1) und (3), dass die in (3) vorkommenden unendlichen Summen ebenfalls Thetafunctionen sind, aber solche mit den Moduln $2\tau_{\alpha\beta}$. Bezeichnet man diese Thetafunctionen mit doppelten Moduln durch Θ, so erhält man daher aus (3):

$$(4) \quad \vartheta^{0\,0}_{0\,0}(u)\,\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(v) = \Theta^{0\,0}_{0\,0}(u+v)\,\Theta^{0\,0}_{0\,0}(u-v) + \Theta^{1\,0}_{0\,0}(u+v)\,\Theta^{1\,0}_{0\,0}(u-v)$$
$$+ \Theta^{0\,1}_{0\,0}(u+v)\,\Theta^{0\,1}_{0\,0}(u-v) + \Theta^{1\,1}_{0\,0}(u+v)\,\Theta^{1\,1}_{0\,0}(u-v),$$

wobei zur Abkürzung für

$$\vartheta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\delta_1\,\delta_2}(u_1, u_2), \quad \Theta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\delta_1\,\delta_2}(u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2)$$

bez.

$$\vartheta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\delta_1\,\delta_2}(u), \quad \Theta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\delta_1\,\delta_2}(u \pm v)$$

gesetzt ist; eine Bezeichnung, die im Folgenden beibehalten werden soll.

Vermehrt man in (4) die Argumente u_α und v_α um:

$$\frac{1}{2}\delta_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_1\tau_{\alpha 1} + \frac{1}{2}\varepsilon_2\tau_{\alpha 2},$$

und vertauscht dann v_α mit $-v_\alpha$, so ergiebt sich nach einigen Umformungen die folgende allgemeinere Formel:

$$(5)\qquad \vartheta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\delta_1\,\delta_2}(u)\,\vartheta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\delta_1\,\delta_2}(v)$$

$$= \Theta^{0\,0}_{0\,0}(u+v)\,\Theta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{0\,0}(u-v) + (-1)^{\delta_1}\,\Theta^{1\,0}_{0\,0}(u+v)\,\Theta^{\varepsilon_1+1\,\varepsilon_2}_{0\,0}(u-v)$$

$$+ (-1)^{\delta_2}\Theta^{0\,1}_{0\,0}(u+v)\Theta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2+1}_{0\,0}(u-v) + (-1)^{\delta_1+\delta_2}\Theta^{1\,1}_{0\,0}(u+v)\Theta^{\varepsilon_1+1\,\varepsilon_2+1}_{0\,0}(u-v)\text{*}).$$

Man kann derselben eine elegantere Form geben, wenn man das folgende System von Grössen einführt:

$$(6)\qquad \begin{cases} \lambda_1^{(0)} = 0, & \lambda_2^{(0)} = 0, \\ \lambda_1^{(1)} = 1, & \lambda_2^{(1)} = 0, \\ \lambda_1^{(2)} = 0, & \lambda_2^{(2)} = 1, \\ \lambda_1^{(3)} = 1, & \lambda_2^{(3)} = 1. \end{cases}$$

Dann verwandelt sich nämlich (5) in:

$$(7)\qquad \vartheta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\delta_1\,\delta_2}(u)\,\vartheta^{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\delta_1\,\delta_2}(v)$$

$$= \sum_{\varkappa} (-1)^{\lambda_1^{(\varkappa)}\delta_1+\lambda_2^{(\varkappa)}\delta_2}\,\Theta^{\lambda_1^{(\varkappa)}\,\lambda_2^{(\varkappa)}}_{0\quad 0}(u+v)\,\Theta^{\varepsilon_1+\lambda_1^{(\varkappa)}\,\varepsilon_2+\lambda_2^{(\varkappa)}}_{0\quad 0}(u-v)$$

$$(\varkappa = 0, 1, 2, 3).$$

§ 2.

Aufstellung der Grundformel und Ableitung der Rosenhain'schen Relationen.

Bedeuten $A_\varkappa^{(n)}$ $(n = p, q;\ \varkappa = 0, 1, 2, 3)$ beliebige Grössen, sind $e_1^{(n)}$, $e_2^{(n)}$ positive oder negative Einheiten, und setzt man:

$$(8)\qquad A^{(n)} = A_0^{(n)} + e_1^{(n)} A_1^{(n)} + e_2^{(n)} A_2^{(n)} + e_1^{(n)} e_2^{(n)} A_3^{(n)},$$

---

*) Legt man den Grössen ε_α, δ_α, unabhängig von einander, die Werthe 0 und 1 bei, und setzt

$$\alpha_1 = \Theta_{0\,0}^{0\,0}(u+v), \quad \alpha_2 = \Theta_{0\,0}^{1\,0}(u+v), \quad \alpha_3 = \Theta_{0\,0}^{0\,1}(u+v), \quad \alpha_4 = \Theta_{0\,0}^{1\,1}(u+v),$$

$$\beta_1 = \Theta_{0\,0}^{0\,0}(u-v), \quad \beta_2 = \Theta_{0\,0}^{1\,0}(u-v), \quad \beta_3 = \Theta_{0\,0}^{0\,1}(u-v), \quad \beta_4 = \Theta_{0\,0}^{1\,1}(u-v),$$

so bilden die aus den rechten Seiten von (5) hervorgehenden 16 Ausdrücke ein orthogonales System, weil sie sich durch die Composition der beiden identisch orthogonalen Systeme:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4, \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3, \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2, \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1, \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 & \beta_4, \\ -\beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3, \\ \beta_3 & -\beta_4 & \beta_1 & \beta_2, \\ \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & -\beta_1 \end{array}$$

ergeben. Daraus folgt der von mir für die Orthogonalität der 16 Thetaproducte abgeleitete Satz. Vgl. Kronecker's Journal Bd. 94, S. 77 und Krause S. 34.

so erhält man für das Product $A^{(p)}A^{(q)}$ den folgenden Ausdruck:

$$(9)\quad \begin{aligned} A^{(p)}A^{(q)} = {} & (A_0^{(p)}A_0^{(q)} + e_1^{(p)}e_1^{(q)}A_1^{(p)}A_1^{(q)} + e_2^{(p)}e_2^{(q)}A_2^{(p)}A_2^{(q)} + e_1^{(p)}e_1^{(q)}e_2^{(p)}e_2^{(q)}A_3^{(p)}A_3^{(q)}) \\ & + e_1^{(q)}(A_0^{(p)}A_1^{(q)} + e_1^{(p)}e_1^{(q)}A_1^{(p)}A_0^{(q)} + e_2^{(p)}e_2^{(q)}A_3^{(p)}A_3^{(q)} + e_1^{(p)}e_1^{(q)}e_2^{(p)}e_2^{(q)}A_2^{(p)}A_2^{(q)}) \\ & + e_2^{(q)}(A_0^{(p)}A_2^{(q)} + e_1^{(p)}e_1^{(q)}A_1^{(p)}A_3^{(q)} + e_2^{(p)}e_2^{(q)}A_2^{(p)}A_0^{(q)} + e_1^{(p)}e_1^{(q)}e_2^{(p)}e_2^{(q)}A_3^{(p)}A_1^{(q)}) \\ & + e_1^{(q)}e_2^{(q)}(A_0^{(p)}A_3^{(q)} + e_1^{(p)}e_1^{(q)}A_1^{(p)}A_2^{(q)} + e_2^{(p)}e_2^{(q)}A_2^{(p)}A_1^{(q)} + e_1^{(p)}e_1^{(q)}e_2^{(p)}e_2^{(q)}A_3^{(p)}A_0^{(q)}). \end{aligned}$$

Legt man in demselben den Einheiten $e_\varkappa^{(n)}$ und den Grössen $A_\varkappa^{(n)}$ die folgenden Werthe bei:

$$e_\varkappa^{(n)} = (-1)^{\lambda_1^{(\varkappa)}\vartheta_1^{(n)} + \lambda_2^{(\varkappa)}\vartheta_2^{(n)}}; \qquad A_\varkappa^{(n)} = \Theta\begin{matrix}\lambda_1^{(\varkappa)} & \lambda_2^{(\varkappa)} \\ 0 & 0\end{matrix}(2u^{(n)}) \quad (n = p, q),$$

so gehen vermöge der Gleichung (5) oder der Gleichung (7) die vier Klammergrössen des Ausdrucks (9) in die vier Functionen über, welche aus:

$$\vartheta\begin{matrix}\lambda_1^{(\varkappa)} & \lambda_2^{(\varkappa)} \\ \vartheta_1^{(p)}+\vartheta_1^{(q)} & \vartheta_2^{(p)}+\vartheta_2^{(q)}\end{matrix}(u^{(p)} + u^{(q)})\ \vartheta\begin{matrix}\lambda_1^{(\varkappa)} & \lambda_2^{(\varkappa)} \\ \vartheta_1^{(p)}+\vartheta_1^{(q)} & \vartheta_2^{(p)}+\vartheta_2^{(q)}\end{matrix}(u^{(p)} - u^{(q)}) = \vartheta_\varkappa^{(p,q)}$$

für $\varkappa = 0, 1, 2, 3$ sich ergeben. Daher verwandelt sich Gleichung (9) in die folgende *Grundformel:*

$$(10)\quad \begin{aligned} A^{(p)}A^{(q)} &= \vartheta_0^{(p,q)} + e_1^{(q)}\vartheta_1^{(p,q)} + e_2^{(q)}\vartheta_2^{(p,q)} + e_1^{(q)}e_2^{(q)}\vartheta_3^{(p,q)} \\ &= \sum_\varkappa e_\varkappa^{(q)}\vartheta_\varkappa^{(p,q)} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3), \end{aligned}$$

deren Verallgemeinerung für Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten ich in den Comptes rendus tom. CIV p. 1256 gegeben habe.

Legt man in der Grundformel (10) den Indices p, q die Werthe 1, 2, 3, 4 bei und wendet sie auf die Identität:

$$(A^{(1)}A^{(2)})(A^{(3)}A^{(4)}) = (A^{(1)}A^{(3)})(A^{(2)}A^{(4)})$$

an, so erhält man unmittelbar das Gleichungssystem:

$$(11)\quad \sum_\varkappa e_\varkappa^{(2)}\vartheta_\varkappa^{(1,2)}\sum_\varkappa e_\varkappa^{(4)}\vartheta_\varkappa^{(3,4)} = \sum_\varkappa e_\varkappa^{(3)}\vartheta_\varkappa^{(1,3)}\sum_\varkappa e_\varkappa^{(4)}\vartheta_\varkappa^{(2,4)},$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, 3),$$

welches eine grosse Anzahl von Thetarelationen umfasst. Im Speciellen sind dieselben von Rosenhain*) und von Herrn Krazer**) entwickelt worden.

---

*) Vgl. die der Preisschrift beigefügten Formeltabellen.

**) Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. Leipzig 1882.

Die vollkommene Analogie, welche zwischen den rechten Seiten von (8) und (10) besteht, gestattet Gleichung (9) auf (11) anzuwenden. Für die specielle Annahme:

$$\delta_\alpha^{(1)} + \delta_\alpha^{(2)} = \delta_\alpha^{(3)} + \delta_\alpha^{(4)} = \eta_\alpha; \qquad \delta_\alpha^{(1)} + \delta_\alpha^{(3)} = \delta_\alpha^{(2)} + \delta_\alpha^{(4)} = \eta_\alpha'$$
$$(\alpha = 1, 2),$$

erhält man auf diese Weise, wenn man noch:

$$\begin{aligned} 2(u_\alpha^{(1)} + u_\alpha^{(3)}) &= 2w_\alpha' = w_\alpha + x_\alpha + y_\alpha + z_\alpha, \\ 2(u_\alpha^{(1)} - u_\alpha^{(3)}) &= 2x_\alpha' = w_\alpha + x_\alpha - y_\alpha - z_\alpha, \\ 2(u_\alpha^{(2)} + u_\alpha^{(4)}) &= 2y_\alpha' = w_\alpha - x_\alpha + y_\alpha - z_\alpha, \\ 2(u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(4)}) &= 2z_\alpha' = w_\alpha - x_\alpha - y_\alpha + z_\alpha, \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

einführt, die folgende Relation:

$$(12)\quad \prod_{\eta_1 \eta_2}^{0\,0} + (-1)^{\eta_1'} \prod_{\eta_1 \eta_2}^{1\,0} + (-1)^{\eta_2'} \prod_{\eta_1 \eta_2}^{0\,1} + (-1)^{\eta_1' + \eta_2'} \prod_{\eta_1 \eta_2}^{1\,1}$$
$$= \prod_{\eta_1' \eta_2'}^{\prime\,0\,0} + (-1)^{\eta_1} \prod_{\eta_1' \eta_2'}^{\prime\,1\,0} + (-1)^{\eta_2} \prod_{\eta_1' \eta_2'}^{\prime\,0\,1} + (-1)^{\eta_1 + \eta_2} \prod_{\eta_1' \eta_2'}^{\prime\,1\,1}.$$

In derselben ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\prod_{\eta_1 \eta_2}^{\nu_1 \nu_2} = \vartheta_{\eta_1 \eta_2}^{\nu_1 \nu_2}(w)\, \vartheta_{\eta_1 \eta_2}^{\nu_1 \nu_2}(x)\, \vartheta_{\eta_1 \eta_2}^{\nu_1 \nu_2}(y)\, \vartheta_{\eta_1 \eta_2}^{\nu_1 \nu_2}(z)$$

und $\prod_{\eta_1' \eta_2'}^{\prime\,\nu_1 \nu_2}$ bedeutet den analogen, von w_α', x_α', y_α', z_α' abhängigen, Ausdruck.

Setzt man endlich:

$$\prod_{0\,\eta_2}^{0\,0} + (-1)^{\eta_2'} \prod_{0\,\eta_2}^{0\,1} = M,$$
$$\prod_{0\,\eta_2}^{1\,0} + (-1)^{\eta_2'} \prod_{0\,\eta_2}^{1\,1} = M',$$
$$\prod_{1\,\eta_2}^{1\,0} + (-1)^{\eta_2'} \prod_{1\,\eta_2}^{1\,1} = M'',$$
$$\prod_{1\,\eta_2}^{0\,0} + (-1)^{\eta_2'} \prod_{1\,\eta_2}^{0\,1} = M''',$$

und bedeuten M_1, M_1', M_1'', M_1''' die Ausdrücke, welche aus M, M', M'', M''' hervorgehen, wenn man η_2' mit η_2 und $\prod_{\eta_1 \eta_2}^{\nu_1 \nu_2}$ mit $\prod_{\eta_1' \eta_2'}^{\prime\,\nu_1 \nu_2}$ vertauscht, so erhält man aus (12) für

$$\eta_1 = 0,\ \eta_1' = 0; \quad \eta_1 = 1,\ \eta_1' = 0; \quad \eta_1 = 0,\ \eta_1' = 1;$$
$$\eta_1 = 1,\ \eta_1' = 1$$

die folgenden Formeln:

$$M + M' = M_1 + M_1',$$
$$M'' + M''' = M_1 - M_1',$$
$$M - M' = M_1'' + M_1''',$$
$$M'' - M''' = M_1'' - M_1'''.$$

Dies sind aber für $\eta_2 = 0$, $\eta_2' = 0$ genau die von Rosenhain (Mém. prés. par div. sav. à l'Académie des sciences. Paris. Tome XI, S. 413) gegebenen Relationen.*)

Paris, Ende Juli 1887.

---

*) Um die hier benutzte Bezeichnung der Thetafunctionen in die Rosenhain'sche umzusetzen vgl. die von Herrn Krause S. 8 u. 9 seines Werkes gegebene Tabelle.

Ueber dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke.

Von

Joseph Kürschák in Budapest.

Die elementare Kreismessung beruht darauf, dass *bei den regelmässigen Vielecken, die einem Kreise* $\begin{matrix}\text{eingeschrieben}\\\text{umgeschrieben}\end{matrix}$ *sind, die Inhalte wie auch die Umfänge eine* $\begin{matrix}\text{steigende}\\\text{abnehmende}\end{matrix}$ *Reihe bilden.*

Man pflegt aber nur so viel zu beweisen, dass der Inhalt und der Umfang des $\begin{matrix}\text{eingeschriebenen}\\\text{umgeschriebenen}\end{matrix}$ Polygons $\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}$ wird, wenn man die Zahl der Seiten verdoppelt. Ein vollständiger und einfacher Beweis ist die Aufgabe folgender Note.

Dazu bedarf es einer elementaren synthetischen Bestimmung der Vielecke die *den* $\begin{matrix}\text{grössten}\\\text{kleinsten}\end{matrix}$ *Inhalt resp. Umfang haben unter allen* $\begin{matrix}\text{eingeschriebenen}\\\text{umgeschriebenen}\end{matrix}$ *Vielecken mit ebenso vielen Seiten.*

Unter den eingeschriebenen Polygonen bestimmte diese nicht nur für den Kreis, sondern für eine beliebige Curve schon Steiner am Ende der berühmten ersten Abhandlung über Maxima und Minima der Figuren. (Ges. Werke, II. Bd., pag. 178, oder Crelle, Journal, XXIV. Bd.). Dabei werden jedoch auch solche Begriffe und Sätze benützt, deren ich mich meines Zweckes halber nicht bedienen durfte.

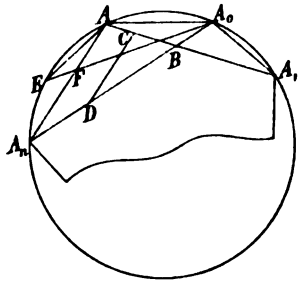
Auch strebte ich das Maximum resp. Minimum ebenso augenfällig nachzuweisen, wie in einem ähnlichen Falle der II. Beweis von 5. in der erwähnten Abhandlung.

Endlich ist zu bemerken, dass ich mich lediglich auf nicht umgeschlagene Vielecke beschränke, und bei den umgeschriebenen bloss jenen Fall betrachte, wenn der Kreis keine Seite in ihrer Verlängerung berührt.

1. *Der Inhalt und der Umfang des unregelmässigen* $n+1$ *seitigen Polygons wird grösser, wenn* n *Ecken unverändert bleiben, und die*

letzte so am Kreise verschoben wird, dass der Unterschied der Bögen zwischen ihr und je einer benachbarten Ecke kleiner wird.

Die Ecke A_0 (Figur I), die zu A_1 näher ist als zu A_n, verschiebe man nach A. Den Forderungen des Satzes gemäss muss A auf dem Bogen $A_0 A_n$ gewählt werden, und zwar so, dass das Bogenstück AA_n grösser sei als der Bogen $A_0 A_1$.



Die Sehnen AA_1 und $A_0 A_n$ schneiden sich in B. Im Dreiecke ABA_0 ist der Winkel bei A_0 grösser als jener bei A, denn als Peripheriewinkel betrachtet steht er auf einem grösseren Bogen. Folglich ist auch

$$BA > BA_0.$$

Ebenso ist

$$BA_n > BA_1.$$

Wenn man nun auf BA resp. BA_n die Strecken

$$BC = BA_0, \quad BD = BA_1$$

aufträgt, so ist das Dreieck CBD ein Theil von ABA_n:

Und nachdem die Dreiecke CBD und A_0BA_1 congruent sind, besteht zwischen den nicht gemeinsamen Theilen der zu vergleichenden Inhalte die Ungleichheit

$$ABA_n > A_0BA_1,$$

die zu beweisen war.

Weiter sei AE der dem Bogen A_0A_1 gleiche Theil von AA_n. Die Sehnen AA_n und EA_0 schneiden sich in F.

Es ist nun

$$FE + AF > AE,$$
$$A_0F + FA_n > A_0A_n$$

und wenn man addirt:

$$A_0E + AA_n > AE + A_0A_n.$$

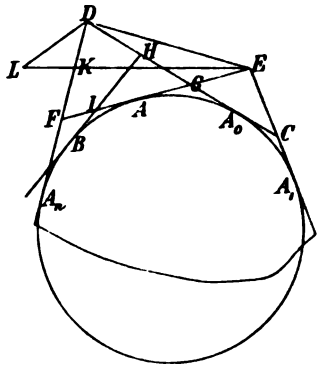
Folglich ist auch

$$AA_1 + AA_n > A_0A_1 + A_0A_n.$$

Der Satz ist also auch hinsichtlich des Umfangs richtig.

2. *Der Inhalt und der Umfang des unregelmässigen $n+1$ seitigen umgeschriebenen Polygons wird kleiner, wenn die Berührungspunkte von n Seiten unverändert bleiben, und der letzte Berührungspunkt so am Kreise verschoben wird, dass der Unterschied der Bögen zwischen ihm und je einem benachbarten Berührungspunkte kleiner wird.*

Den Berührungspunkt A_0 (Figur II), der zu A_1 näher ist als zu A_n, verschiebe man nach A. Die Wahl von A ist ebenso beschränkt, wie bei dem vorigen Satze. Ausser den Seiten der zu vergleichenden Vielecke bedarf man auch der Tangente von B, wenn AB das dem Bogen A_0A_1 gleiche Stück von AA_n ist.



Die nicht gemeinsamen Theile der Vielecke seien GEC und GDF. Die Tangente von B schneide die Tangenten von A_0 und A in den Punkten H und I, die auf die Strecken DG resp. FG fallen.

$$GH = HA_0 - GA_0 = EA - GA = EA,$$
$$GI = GA + AI = GA_0 + A_0C = GC.$$

Folglich sind die Dreiecke GHI und GEC congruent. Ersteres ist ein Theil von GDF. Also ist

$$GEC < GDF,$$

wie es der Satz behauptet.

Das Dreieck DEG hat bei E einen grösseren Winkel als bei D, weil

$$DG > HG = GE.$$

Wenn also der Winkel KED dem Winkel GDE gleich ist, und mit GED auf gleicher Seite von DE liegt, so fällt die Linie EK in den Winkel DEF, und schneidet die Strecke DF. In der Figur ist der Schnittpunkt mit K bezeichnet.

Ist $EL = CD$, so liegt L in der Verlängerung der Strecke EK, nachdem

$$DL + EL = DF + EF.$$

Es ist nämlich

$$DL + EL = DC + EC = DA_0 + EA_1 = DA_n + EA$$
$$= DF + EF.$$

Nun ist

$$DL < KL + DK,$$
$$EF < EK + KF,$$

und wenn man addirt

$$DL + EF < EL + DF,$$

mithin auch

$$CE + EF < CD + DF,$$

was noch zu beweisen war.

3. *Unter den $n+1$ seitigen* $\begin{matrix}\textit{eingeschriebenen}\\ \textit{umgeschriebenen}\end{matrix}$ *Vielecken haben die regelmässigen den* $\begin{matrix}\textit{grössten}\\ \textit{kleinsten}\end{matrix}$ *Inhalt und Umfang.*

Man kann ein beliebiges unregelmässiges ein- oder umgeschriebenes Vieleck mit dem regelmässigen dem Inhalte und Umfange nach folgendermassen vergleichen.

Die zu betrachtenden Grössen ändern sich nicht, wenn man ein neues $\left.\begin{matrix}\text{eingeschriebenes}\\ \text{umgeschriebenes}\end{matrix}\right\}$ Vieleck bildet, das zwischen seinen $\left.\begin{matrix}\text{Ecken}\\ \text{Berührungspunkten}\end{matrix}\right\}$ dieselben Bögen hat, wie das gegebene Vieleck, bloss in anderer Reihenfolge.

Man kann dabei solche Bögen neben einander bringen, deren einer — A_0A_1 — kleiner, deren anderer — A_0A_n — grösser ist als der $(n+1)^{te}$ Theil des Kreises. Wenn nun AA_n das dem $(n+1)^{ten}$ Theile des Kreises gleiche Stück des Bogens A_0A_n ist, und A_0 nach A verschoben wird, so $\left.\begin{matrix}\text{vergrössert}\\ \text{verkleinert}\end{matrix}\right\}$ sich (nach den eben bewiesenen Hülfssätzen) der Inhalt und der Umfang des $\left.\begin{matrix}\text{eingeschriebenen}\\ \text{umgeschriebenen}\end{matrix}\right\}$ Polygons. Die Form hat sich insofern der Regelmässigkeit genähert, dass unter den zum Polygon gehörenden Bögen nun mehr dem $(n+1)^{ten}$ Kreistheile gleiche sind.

Wiederholt man diese Permutation der Bögen und die Verschiebung $\left.\begin{matrix}\text{einer Ecke,}\\ \text{eines Berührungspunktes,}\end{matrix}\right\}$ so gelangt man nach höchstens n-maliger Wiederholung zu einem regelmässigen Polygon, wobei sich Inhalt und Umfang beständig $\left.\begin{matrix}\text{vergrössert}\\ \text{verkleinert}\end{matrix}\right\}$ haben.

4. Aus jedem $\left.\begin{matrix}\text{eingeschriebenen}\\ \text{umgeschriebenen}\end{matrix}\right\}$ regelmässigen n-seitigen Vieleck kann man durch Einschaltung einer neuen $\left.\begin{matrix}\text{Ecke}\\ \text{Seite}\end{matrix}\right\}$ ein unregelmässiges $n+1$-seitiges $\left.\begin{matrix}\text{eingeschriebenes}\\ \text{umgeschriebenes}\end{matrix}\right\}$ Vieleck bilden mit $\left.\begin{matrix}\text{grösserem}\\ \text{kleinerem}\end{matrix}\right\}$ Inhalte und Umfange. Das regelmässige $n+1$-seitige Polygon hat aber noch $\left.\begin{matrix}\text{grösseren}\\ \text{kleineren}\end{matrix}\right\}$ Inhalt und Umfang. Folglich hat man den Satz:

Bei den regelmässigen Vielecken, die dem Kreise $\left.\begin{matrix}\textit{eingeschrieben}\\ \textit{umgeschrieben}\end{matrix}\right\}$ *sind, bilden so die Inhalte, wie die Umfänge eine* $\left.\begin{matrix}\textit{steigende}\\ \textit{abnehmende}\end{matrix}\right\}$ *Reihe.*

Sur les fonctions cylindriques.

Par

N. Sonine à Varsovie.

(Extrait d'une lettre adressée à la rédaction.)

A la tête du nouveau cahier des Mathematische Annalen XXX, 3 qui vient de paraître se trouve un article de M. Schafheitlin sur la répresentation de la série hypergéometrique par une intégrale définie contenant les fonctions cylindriques. Il parait que l'auteur n'a pas pris connaissance des travaux antérieurs rélatifs au sujet qu'il traite; du moins parmi les citations contenues dans son article on ne trouve mentionnés par rapport aux fonctions cylindriques que deux mémoires de M. Weber, mais non, par exemple, les mémoires de Hankel au t. VIII des Math. Ann., ainsi que mes *Recherches sur les fonctions cylindriques* publiées au t. XVI du même Recueil. Dans ce dernier mémoire l'auteur pourrait retrouver au bas de la page 51 ses deux formules générales 51) et 52) réunies en une seule, ainsi que plusieurs autres formules particulières de son article. Notre formule

$$\int_0^\infty J^n(ax)\, J^p(cx)\, x^{2m-n-p+1}\, dx$$

$$= \frac{2^{2m-n-p+2}\, a^{-n}\, c^{-p}}{\Pi(n-m-1)\,\Pi(p-m-1)} \int_0^a (a^2-b^2)^{n-m-1}\,(c^2-b^2)^{p-m-1}\, b^{2m+1}\, db,$$

$$a < c, \quad n > m > -1, \quad p > m > -1,$$

où l'intégrale au second membre s'exprime par

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Pi m \cdot \Pi(n-m-1)}{\Pi n}\, a^{2n} c^{2p-2m-2}\, F\left(m-p+1,\ m+1,\ n+1,\ \frac{a^2}{c^2}\right)$$

exprime directement l'égalité de deux expressions intégrales de la série hypergéometrique, celle qui a été donnée par Euler et celle qui contient

les fonctions cylindriques, et a été établie tout indépendamment des équations différentielles auxquelles satisfont respectivement la série hypergéometrique et les fonctions cylindriques; en effet elle a été déduite exclusivement à l'aide d'une nouvelle expression intégrale de la fonction $J^n(x)$, qui nous semble la plus avantageuse pour l'étude de cette fonction, à savoir

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(x+ri) - \frac{x^2}{2a(x+ri)}} \frac{dr}{(x+ri)^{n+1}}, \quad n > -1, \quad a > 0.$$

Il est vrai qu'en employant cette expression de la fonction $J^n(x)$ on est conduit à la condition restrictive $p > m$; mais on peut aisément s'en affranchir en divisant la formule par c^{-p} et la différentiant après par rapport à c^2 ce qui se réduit au simple remplacement de p par $p - 1$ en vertu de la formule

$$\frac{d \cdot c^p J^p(cx)}{d \cdot c^2} = \frac{x}{2} c^{p-1} J^{p-1}(cx). \ldots .$$

Varsovie, le 24. octobre 1887.

Inhaltsverzeichniss der Bände 21—30.

	Band	Seite
Fr. G. Affolter in Zürich.		
Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung. I. . . .	27,	277
Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung. II. . . .	29,	1
P. Appell in Paris.		
Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle	21,	118
Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes	30,	155
J. Bacharach in Erlangen.		
Ueber den Cayley'schen Schnittpunktsatz	26,	275
K. Bobek in Prag.		
Ueber projectivische Erzeugung von Curven	25,	448
Ueber hyperelliptische Curven	29,	386
A. Bochert in Breslau.		
Ueber die Transitivitätsgrenze der Substitutionsgruppen, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten	29,	27
P. du Bois-Reymond in Berlin.		
Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung . .	21,	109
Zusatz zu dem Aufsatze „Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung"	21,	253
Ueber den Despeyrous'schen Multiplicator der elliptischen Differentialgleichung	21,	255
Ueber die Integration der trigonometrischen Reihe	22,	260
O. Bolza in Freiburg i/Br.		
Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische durch eine Transformation vierten Grades	28,	447
Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Functionen	30,	478
Ueber Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich	30,	546
A. v. Braunmühl in München.		
Notiz über geodätische Linien auf den dreiaxigen Flächen zweiten Grades, welche sich durch elliptische Functionen darstellen lassen	26,	151
A. Brill in Tübingen.		
Bemerkungen über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen	26,	300

	Band	Seite
Fr. Brioschi in Mailand.		
Sur quelques équations différentielles	26,	106
Zur Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung	28,	594
Ueber die Transformation der algebraischen Gleichungen durch Covarianten	29,	327
H. Bruns in Leipzig.		
Die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche	22,	296
Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung	27,	234
G. Cantor in Halle.		
Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. (Fortsetzung des Artikels in Bd. 20, pag. 113)	21,	51
Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. (Fortsetzung)	21,	545
Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. (Fortsetzung)	23,	453
A. Capelli in Neapel.		
Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen	29,	331
F. Caspary in Berlin.		
Ueber die Verwendung algebraischer Identitäten zur Aufstellung von Relationen für Thetafunctionen einer Variabelen	28,	493
Bemerkung zu den desmischen Tetraedern	29,	581
Ueber einen einfachen Beweis der Rosenhain'schen Fundamentalformeln	30,	571
A. Cayley in Cambridge.		
On the quadriquadric curve in connexion with the theory of elliptic functions	25,	152
Note on Kiepert's L-equations, in the transformation of elliptic functions	30,	75
Note on the Jacobian sextic equation	30,	78
On the intersection of curves	30,	85
Alfons Delisle †.		
Bestimmung der allgemeinsten der Functionalgleichung der σ-Function genügenden Function	30,	91
Fr. Dingeldey in Darmstadt.		
Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt	27,	272
Zur Construction der Hesse'schen Curve der rationalen Curven dritter Ordnung	28,	81
W. Dyck in München.		
Gruppentheoretische Studien, II: Ueber die Zusammensetzung discreter Operationen, über ihre Primitivität und ihre Transitivität	22,	70
Fr. Engel in Leipzig.		
Zur Theorie der Berührungstransformationen	23,	1
Ueber die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen	27,	1
A. Enneper †.		
Bemerkungen über einige Transformationen von Flächen	21,	267

	Band	Seite
S. Finsterwalder in München.		
Ueber die Fadenconstruction des Ellipsoides	26,	546
R. Fricke in Braunschweig.		
Ueber die Substitutionsgruppen, welche zu den aus dem Legendre'schen Integralmodul $k^2(\omega)$ gezogenen Wurzeln gehören	28,	99
Die Congruenzgruppen der sechsten Stufe	29,	97
Ueber die ausgezeichneten Untergruppen vom Geschlechte $p = 1$, welche in der Gruppe der linearen ω-Substitutionen enthalten sind	30,	345
J. Glerster in Bamberg.		
Ueber Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. I.	21,	1
Ueber Congruenzgruppen von Primzahlstufe	22,	177
Ueber Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. II.	22,	190
Ueber die Galois'sche Gruppe der Modulargleichungen, wenn der Transformationsgrad die Potenz einer Primzahl > 2 ist	26,	309
Bemerkung zu dem Aufsatze: „Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad" (diese Annalen Bd. 14)	26,	590
P. Gordan in Erlangen.		
Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. II.	25,	459
Ueber Gleichungen fünften Grades	28,	152
Ueber biquadratische Gleichungen	29,	318
E. Goursat in Paris.		
Sur les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer	24,	445
G. H. Halphen in Versailles.		
Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre	24,	461
Ax. Harnack in Dresden.		
Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen	21,	305
Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen. I.	23,	244
Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige	23,	285
Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen. II.	24,	217
Ueber den Inhalt von Punktmengen	25,	241
Bemerkungen zur Theorie des Doppelintegrals	26,	566
Ueber die mit Ecken behafteten Schwingungen gespannter Saiten	29,	486
E. Hess in Marburg.		
Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder	28,	167
W. Hess in München.		
Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes, dessen eines Ende von einem Kräftepaar angegriffen wird	23,	181
Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes mit zwei gleichen Widerständen, auf dessen freies Ende eine Kraft und ein um die Hauptaxe ungleichen Widerstandes drehendes Kräftepaar einwirkt	25,	1

	Band	Seite
Ueber die Herpolodie	27,	465
Nachtrag zu der Note über die Herpolodie	27,	568
Ueber das Gyroskop bei allgemeinster Wahl des zur Bewegung anregenden Momentankräftesystems	29,	500

K. Heun in München.

Integration regulärer linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die Kettenbruchentwickelung von ganzen Abel'schen Integralen dritter Gattung	30,	553

W. Heymann in Dresden.

Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^r y}{dx^r} + A_m \frac{d^m y}{d(lx)^m} + A_{m-1} \frac{d^{m-1}}{d(lx)^{m-1}} + \cdots + A_1 \frac{dy}{d(lx)} + A_0 y = 0$$

mit Anwendung auf die Theorie der trinomischen Gleichungen	26,	534
Theorie der trinomischen Gleichungen	28,	61

D. Hilbert in Königsberg.

Ueber die nothwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz.	27,	158
Ueber einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete	28,	381
Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete	30,	15
Ueber die Singularitäten der Discriminantenfläche	30,	437
Ueber binäre Formenbüschel mit besonderer Combinanteneigenschaft	30,	561

O. Hölder in Göttingen.

Zur Theorie der trigonometrischen Reihen	24,	181
Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen	28,	1

A. Hurwitz in Königsberg.

Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser transcendenter Functionen.	22,	211
Ueber Tangentenconstructionen	22,	230
Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante	25,	157
Einige allgemeine Sätze über Raumcurven	25,	287
Ueber einige besondere homogene lineare Differentialgleichungen	26,	117
Zusatz zu der Note „Einige allgemeine Sätze über Raumcurven"	27,	161
Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten	27,	183
Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip	28,	561
Ueber eine besondere Raumcurve dritter Ordnung	30,	291

S. Kantor in Prag.

Ueber eine Configuration $(3, 3)_{10}$ und unicursale Curven	21,	299

L. Kiepert in Hannover.

Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen	26,	369

F. Klein in Göttingen.

	Band	Seite
Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie	21,	141
Ueber einen liniengeometrischen Satz	22,	234
Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie	22,	242
Eine Uebertragung des Pascal'schen Satzes auf Raumgeometrie	22,	246
Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve	22,	249
Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine kanonische Form	23,	539
Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten (zusammen mit S. Lie)	23,	579
Ueber gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung	23,	587
Neue Untersuchungen im Gebiete der elliptischen Functionen	26,	455
Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind	27,	106
Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen	27,	431
Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades	28,	499
Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale	28,	533

A. Kneser in Breslau.

Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabelen	28,	125
Zur Theorie der algebraischen Functionen	29,	171
Ueber die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher gegebene Gattungen algebraischer Grössen enthalten sind	30,	179

J. König in Budapest.

Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen	21,	424
Ueber eine Eigenschaft der Potenzreihen	23,	447
Ueber die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe	23,	450
Ueber die Integration der Hamilton'schen Systeme und der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung	23,	504
Ueber die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen	23,	520
Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabelen	24,	465

L. Königsberger in Heidelberg.

Bemerkung zur Form algebraischer Integrale linearer Differentialgleichungen	21,	454
Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung	22,	269
Ueber die Erniedrigung der Ordnung einer Differentialgleichung	26,	110
Ueber eine Eigenschaft unendlicher Reihen	27,	397
Ueber das Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Function von Functionen	27,	473
Bemerkungen zu Liouville's Classificirung der Transcendenten	28,	483
Ueber die Anzahl der einer algebraischen Differentialgleichung angehörigen selbständigen Transcendenten	30,	299

A. Köpcke in Ottensen.

Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen	29,	123

Koppe in Berlin. Band Seite

Ueber die in den Vielfachen eines Kettenbruchs enthaltenen grössten Ganzen 29, 187

J. Kraus in Mainz.

Die geometrische Deutung einer gewissen Invariante bei ebenen Collineationen 29, 234

M. Krause in Rostock.

Zur Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. 25, 319
Zur Transformation der Thetafunctionen zweier Veränderlichen 25, 323
Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlicher. I. und II. 26, 1
Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind 26, 569
Ueber Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen 27, 419
Zur Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. 28, 597
Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Gattung in trigonometrische Reihen.
Erste Abhandlung 30, 425
Zweite Abhandlung 30, 516

A. Krazer in Würzburg.

Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. 22, 416

K. Küpper in Prag.

Ueber die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung C^3, und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage . 24, 1

G. Kürschák in Budapest.

Ueber dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke 30, 578

S. Lie in Leipzig.

Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten (zusammen mit F. Klein) 23, 579
Ueber Differentialinvarianten 24, 537
Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten 25, 71

R. v. Lilienthal in Bonn.

Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen 30, 1

F. Lindemann in Königsberg.

Ueber die Hesse'sche Covariante einer binären algebraischen Form fünfter Ordnung 21, 71
Ueber die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders 22, 117
Ueber die Darstellung binärer Formen und ihrer Covarianten durch geometrische Gebilde im Raume 23, 111

G. Loria in Genua.

Sur les différentes espèces de complexes du 2e dégré droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre (zusammen mit C. Segre) 23, 213

A. E. H. Love in Cambridge.

	Band	Seite
On Recent English Researches in Vortex-motion	30,	326

J. Lüroth in Freiburg i/Br.

Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe	21,	411

G. Maisano in Messina.

Gleichung der Curve, welche die Berührungspunkte der doppelten Tangenten der allgemeinen Curve des fünften Grades ausschneidet.	29,	431
Die Discriminante der binären Formen sechster Ordnung	30,	442

A. Markoff in St. Petersburg.

Démonstration de certaines inégalités de Mr. Tchébychef	24,	172
Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales	25,	417
Sur les racines de certaines équations I.	27,	143
Sur les racines de certaines équations II.	27,	177
Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique I.	28,	586
Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique II.	29,	247

H. Maschke in Berlin.

Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln	30,	496

A. Mayer in Leipzig.

Ueber die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst	22,	368
Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung	26,	74

R. Mehmke in Darmstadt.

Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methoden	23,	143
Bemerkung über die Subdeterminanten symmetrischer Systeme	26,	209

Meissel in Kiel.

Ueber Primzahlmengen	21,	304
Ueber einige Fehler der Burckhardt'schen Factorentafeln	23,	600
Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Milliarde der natürlichen Zahlen vorkommen	25,	251

Fr. Meyer in Tübingen.

Ueber Apolarität und rationale Curven	21,	125
Eine neue kanonische Form von Gruppen binärer Formen	21,	434
Ein Satz über lineare Identitäten zwischen Quadraten binärer Formen	21,	441
Ein neues Uebertragungsprincip für binäre Formen, deren Ordnungszahl eine nicht prime ist	21,	528
Ueber die elliptische Curve fünfter Ordnung des Raumes von vier Dimensionen	26,	154
Ausdehnung eines Dirichlet'schen Verfahrens auf die Transformation von Differentialausdrücken, wie $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$, in allgemeine krummlinige Coordinaten	26,	509
Ueber die mit der Erzeugung der Raumcurven 4. Ordnung zweier Species verknüpften algebraischen Processe	29,	447
Zur Theorie der reducibelen ganzen Functionen von n Variabelen	30,	30

	Band	Seite
G. Morera in Genua.		
Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen	25,	203
Ueber die Integration der vollständigen Differentiale	27,	403
P. Nekrassoff in Moskau.		
Ueber trinomische Gleichungen	29,	413
E. Netto in Berlin.		
Ueber die Factorenzerlegung der Discriminanten algebraischer Gleichungen	24,	579
Ueber einen Algorithmus zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen	29,	141
Zur Theorie der iterirten Functionen	29,	148
C. Neumann in Leipzig.		
Ueber eine gewisse Erweiterung des Cantor'schen Satzes	22,	406
Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluss der Schwere	27,	478
Ueber eine einfache Methode zur Begründung des Princips der virtuellen Verrückungen	27,	502
M. Nöther in Erlangen.		
Nachtrag zur „Note über die algebraischen Curven mit einer Schaar eindeutiger Transformationen in sich" (dies. Ann. XX)	21,	138
Ueber eine Fläche sechster Ordnung vom Flächengeschlecht — 1	21,	399
Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen	23,	311
Notiz über die Normalcurven für $p = 5, 6, 7$	26,	143
Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abel'schen Functionen	28,	354
Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke	29,	339
Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Functionen	30,	410
E. Papperitz in Dresden.		
Ueber verwandte s-Functionen. I.	25,	212
Ueber verwandte s-Functionen. II.	26,	97
Untersuchungen über die algebraische Transformation der hypergeometrischen Functionen	27,	315
M. Pasch in Giessen.		
Zur Theorie der Collineationen und der Reciprocität	23,	419
Ueber Viereck, Vierseit und projective Verwandtschaft in der Ebene	26,	211
Ueber die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde	30,	127
Ueber einige Punkte der Functionentheorie	30,	132
J. Petersen in Kopenhagen.		
Bemerkungen über den Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks	29,	239
G. Pick in Prag.		
Notiz über ganzzahlige lineare Substitutionen	24,	586
Ueber gewisse durch Functionalgleichungen definirte Functionen	24,	590
Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. I.	25,	433
Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. II.	26,	219

Band Seite

Ueber gewisse ganzzahlige lineare Substitutionen, welche sich nicht durch algebraische Congruenzen erklären lassen 28, 119
Zur Theorie der elliptischen Functionen 28, 309
Zur Theorie der Abel'schen Functionen 29, 259

C. Possé in St. Petersburg.

Quelques remarques sur une certaine question de minimum 26, 593

Preisaufgabe der Fürstlich-Jablonowsky'schen Gesellschaft.

(Aus dem Jahresbericht der Gesellschaft vom März 1886, Leipzig) . . . 27, 471

A. Pringsheim in München.

Ueber die Multiplication bedingt convergenter Reihen 21, 327
Ueber gewisse Reihen, welche in getrennten Convergenzgebieten verschiedene, willkürlich vorgeschriebene Functionen vorstellen 22, 109
Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte 22, 455
Ueber das Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Convergenzkreise 25, 419
Ueber die Multiplication trigonometrischer Reihen 26, 157
Ueber analytische Ausdrücke mit hebbaren Unstetigkeiten 26, 167
Darstellung der zahlentheoretischen Function $E(x)$ durch eine unendliche Reihe 26, 193
Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der elliptischen Functionen 27, 151

L. Raffy in Paris.

Détermination du genre d'une courbe algébrique 23, 527

I. Rahts in Königsberg.

Zur Reduction der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf die Jerrard'sche Form — eine Weiterführung des von Hermite eingeschlagenen Weges 28, 34

O. Rausenberger in Frankfurt a. M.

Ueber eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden. II. 21, 59
Ueber eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden. III. 25, 222

W. Reichardt in Dresden.

Ueber die Normirung der Borchardt'schen Moduln der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p = 2$ 28, 84

V. Reyes y Prósper in Madrid.

Sur la géométrie non-Euclidienne 29, 154

E. Riecke in Göttingen.

Ueber einige Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrischen Erscheinungen 30, 309

C. Rodenberg in Hannover.

Ableitung der Polareigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten auf darstellend-geometrischem Wege 26, 557

K. Rohn in Dresden.

Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte 22, 124
Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und den vielfachen Curven einer gegebenen Fläche 23, 82

	Band	Seite
Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte	24,	55
Eine einfache lineare Construction der ebenen rationalen Curven fünfter Ordnung	25,	598
Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung	28,	284
Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung	29,	81

J. Rosanes in Breslau.

Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen	23,	412
Bemerkungen zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung	23,	416

P. Schafheitlin in Berlin.

Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral	30,	157

L. Scheeffer†.

Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen	25,	522
Bemerkungen zu dem vorstehenden Aufsatze	25,	594
Ueber die Bedeutung der Begriffe „Maximum“ und „Minimum“ in der Variationsrechnung	26,	197

O. Schlesinger in Zürich.

Ueber conjugirte binäre Formen und deren geometrische Construction	22,	520
Ueber conjugirte Curven, insbesondere über die geometrische Relation zwischen einer Curve dritter Ordnung und einer zu ihr conjugirten Curve dritter Classe	30,	453

A. Schönflies in Göttingen.

Ueber Gruppen von Bewegungen. I.	28,	319
Ueber Gruppen von Bewegungen. II.	29,	50

E. Schroeder in Karlsruhe.

Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variabelen auf den einfachsten Zahlengebieten	29,	299

H. Schroeter in Breslau.

Metrische Eigenschaften der cubischen Parabel (Raumcurve dritter Ordnung)	25,	293
Das Clebsch'sche Sechseck	28,	457

H. Schubert in Hamburg.

Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes	26,	26
Die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche m^{ten} Grades	26,	52

Fr. Schur in Leipzig.

Ueber einen das System zweier Flächen zweiten Grades betreffenden Satz und einen damit verbundenen Strahlencomplex zweiten Grades	21,	515
Ueber die Construction der Flächen n^{ter} Ordnung	23,	437
Ueber den Pohlke'schen Satz	25,	596
Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses	27,	163

	Band	Seite
Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen	27,	537
Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume	28,	343

C. Segre in Turin.

Sur les différentes espèces de complexes du 2^e dégré de droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second odre (zus. mit G. Loria)	23,	213
Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du second dégré double	23,	235
Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques	24,	152
Etude des différentes surfaces du 4^e ordre à conique double au cuspidale (générale ou décomposée), considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions	24,	313
Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes	27,	295
Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques	30,	203
Sur un théorème de la géométrie à n-dimensions	30,	308

O. Simony in Wien.

Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie.	24,	253

N. Sonine in Warschau.

Sur les fonctions cylindriques	30,	582

O. Staude in Dorpat.

Ueber geodätische Polygone auf den Flächen zweiten Grades	21,	219
Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen erster Ordnung im System der confocalen Flächen zweiten Grades. I.	22,	1
Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen erster Ordnung im System der confocalen Flächen zweiten Grades. II.	22,	145
Ueber die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlicher	24,	281
Ueber die algebraischen Charakteristiken der hyperelliptischen Thetafunctionen	25,	363
Ueber neue Focaleigenschaften der Flächen zweiten Grades	27,	253
Eine katoptrische Eigenschaft des Ellipsoids	27,	412
Ueber eine Gattung doppelt reell periodischer Function zweier Veränderlicher	29,	468

C. Stéphanos in Athen.

Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques	22,	299
Sur la théorie des quaternions	22,	589

L. Stickelberger in Freiburg i. Br.

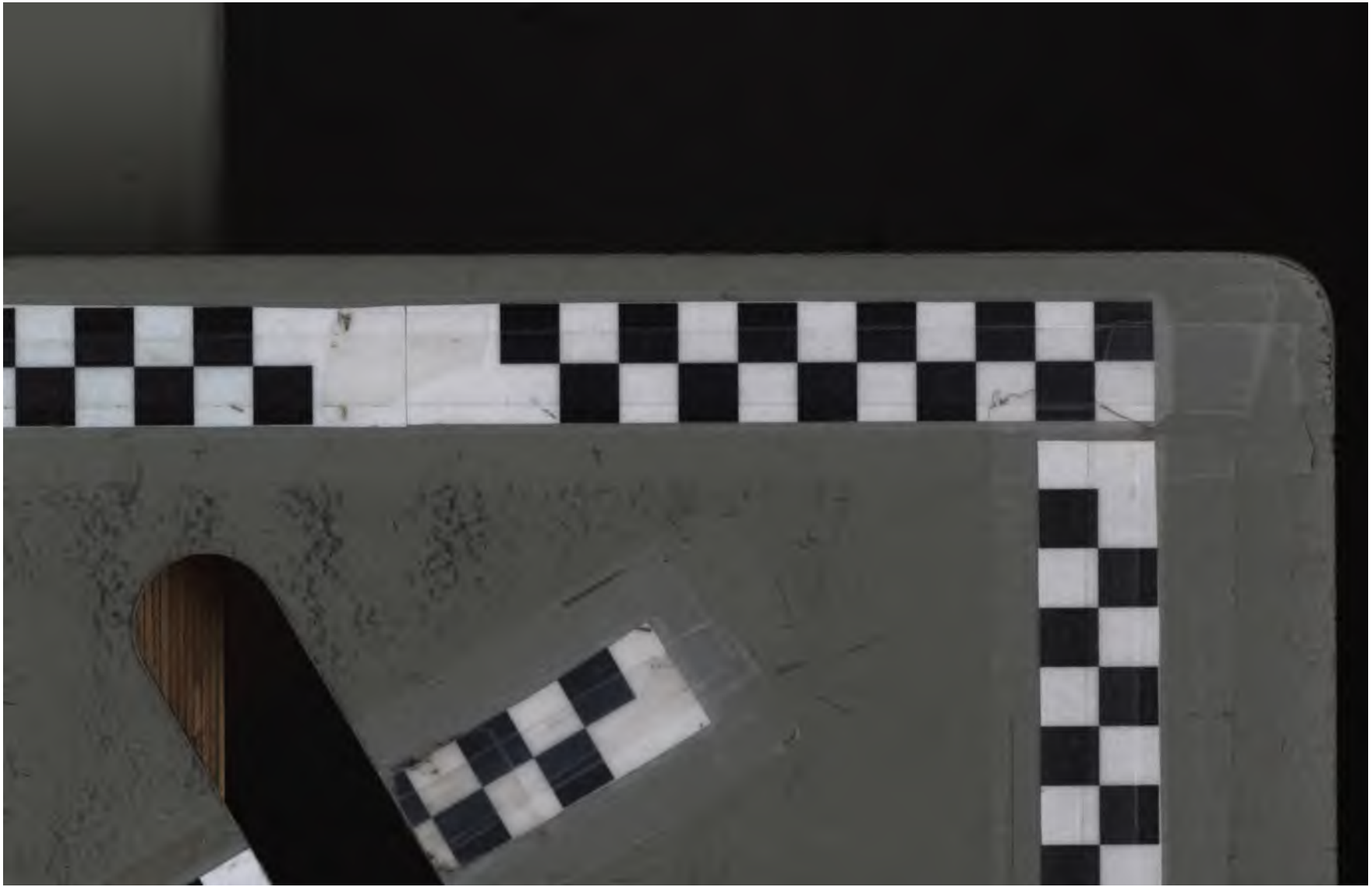
Ueber einen Satz des Herrn Nöther	30,	401

	Band	Seite
O. Stolz in Innsbruck.		
Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes	22,	504
Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth	23,	152
Ueber unendliche Doppelreihen	24,	157
Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlichen zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerthen, dass einige derselben constanten Werthen sich nähern	26,	83
E. Stroh in München.		
Reduction zweier Covarianten binärer Formen	22,	290
Zur Theorie der Combinanten	22,	393
E. Study in Leipzig.		
Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem	27,	58
Ueber die Cremona'sche Charakteristikenformel	27,	102
Ueber ternäre lineare Formen	30,	120
R. Sturm in Münster.		
Ein Analogon zu Gauss' Satz von der Krümmung der Flächen	21,	379
Ueber den integrirenden Factor der elliptischen Differentialgleichung	21,	446
Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung	21,	457
Ueber Collineation und Correlation	22,	569
Ueber die 27 Geraden der cubischen Fläche	23,	289
Note zum Verzeichnisse von Erzeugungsarten der cubischen Fläche (diese Annalen, Bd. 23, S. 308)	23,	599
Ueber Flächen zweiten Grades, welche zu sich selbst polar sind	25,	236
Beispiele zu den Cremona'schen ebenen Transformationen	26,	304
Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen zweiten Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformiren	26,	465
Ueber gleiche Punktreihen, Ebenenbüschel, Strahlenbüschel, bei collinearen Räumen	28,	261
Zur Theorie der Collineation und der Correlation	28,	268
Ueber höhere räumliche Nullsysteme	28,	277
H. Thieme in Posen.		
Ueber die Aufgabe, alle Elemente einer q-gliedrigen Gruppe binärer Formen zu construiren, wenn q dieser Formen gegeben sind	23,	597
Die Flächen dritter Ordnung als Ordnungsflächen von Polarsystemen	28,	133
M. Tichomandritzky in Charkow.		
Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale. I	22,	450
Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale. II	25,	197
W. Voigt in Göttingen.		
Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen	28,	14
K. VonderMühll in Leipzig.		
Ueber Green's Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes	27,	537
Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Nach Johann Rudolf Merian	27,	575

	Band	Seite
A. Voss in München.		
Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme	23,	45
Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades	23,	157
Theorie der rationalen algebraischen Punkt-Ebenen-Systeme	23,	359
Ueber Multiplication bedingt convergenter Reihen	24,	42
Ueber parallel geordnete Orthogonalsysteme	24,	48
Ueber Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades umgeschrieben sind	25,	39
Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik	25,	258
Ueber Poncelet-Zeuthen'sche Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind	26,	231
Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen: I. Zur Theorie der Steiner'schen Kernflächen	27,	357
Ueber eine Eigenschaft der cubischen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen	27,	515
Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen	27,	527
Ueber ein Theorem der analytischen Mechanik	27,	569
Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen: II. Ueber die zu zwei eindeutig auf einander bezogenen Flächen gehörigen Strahlensysteme	30,	227
Zur Theorie der Hesse'schen Determinante	30,	418
H. Weber in Marburg.		
Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28^{ten} Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen	23,	489
W. Weiss in Prag.		
Ueber einen Beweis der Zeuthen'schen Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts	29,	382
C. Weltzien in Berlin.		
Zur Theorie der Doppelpunkte und Doppeltangenten der ebenen rationalen Curven	26,	516
Zur Theorie derjenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich rational und ganz durch zwei lineare Functionen und zwei Quadratwurzeln aus ganzen Functionen eines Parameters darstellen lassen	30,	535
E. Wiltheiss in Halle a. S.		
Ueber die complexe Multiplication hyperelliptischer Functionen zweier Argumente	21,	385
Ueber Thetafunctionen, die nach einer Transformation in ein Product von Thetafunctionen zerfallen	26	127
Ueber eine partielle Differentialgleichung der Thetafunctionen zweier Argumente und über die Reihenentwickelung derselben	29,	272
A. Witting in Dresden.		
Ueber Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabler	29,	157
H. G. Zeuthen in Kopenhagen.		
Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. II.	26,	247

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

30M-2-60-93574

NOV 2 1 1967

510
MA
Vol.
188
MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY
STORAGE AREA